Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Mathematik

von G. Greschonig und L. Summerer, WS 2017/18

Aufgabe 1. Zeige, dass das Quadrat einer ungeraden Zahl, vermindert um 1, stets durch 4 teilbar ist. Folgere daraus, dass die Gleichung $x^2 - y^2 = 1002$ mit ganzen x, y nicht lösbar ist. (Hinweis: 1002 ist durch 2, aber nicht durch 4 teilbar!)

Aufgabe 2. Zeige, dass es keine ganzen Zahlen x, y gibt mit

$$15x - 9y = 100.$$

(Verwende die Tatsache, dass jeder Teiler des Ausdrucks auf der linken Seite auch ein Teiler der rechten Seite sein muss und umgekehrt.)

Aufgabe 3. Führe einen indirekten Beweis, um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Nimm dazu an, es gäbe ganze Zahlen a und b, sodass eine Darstellung $\sqrt{2} = a/b$ als gekürzter Bruch existiert. Quadriere diese Gleichung und argumentiere mit der Teilbarkeit, um einen Widerspruch zu erlangen.

Aufgabe 4. Schreibe folgende Summen und Produkte ohne Summen bzw. Produktzeichen:

a) $\sum_{i=1}^{6} i x^{i+1}$,
b) $\prod_{i \in \{5,6,7\}} (ix - 3)$,
c) $\sum_{j=3}^{6} \prod_{k=1}^{3} (jk - 2)$,
d) $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=k}^{m} k^j$.

Aufgabe 5. Schreibe folgende Ausdrücke unter Verwendung des Summen bzw. Produktzeichens oder beider:

a) $6 + 12 + 18 + 24$,
b) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8$,
c) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 27$,
d) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + 10x^9$,
e) $a_1 + (1{+}2)(a_1 a_2) + (1{+}2{+}3)(a_1 a_2 a_3) + \ldots + (1{+}2{+}\ldots{+}n)(a_1 a_2 \cdots a_n)$.

Aufgabe 6. Richtig oder falsch? Begründe!

a) $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij})$.
b) $\prod_{i=1}^{n} (\prod_{j=1}^{n} (a_i + b_j)) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) (\sum_{j=1}^{n} b_j)$.
c) $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_i b_j) = (\sum_{i=1}^{n} a_i) (\sum_{j=1}^{n} b_j)$.
d) $\prod_{i=1}^{n} a_i / a_{i+1} = a_1 / a_n$.
e) $\sum_{i=0}^{n} (i^2 + 2i) a_{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (i^2 - 1) a_i$.

Aufgabe 7. a) Schreibe folgende Matrix explizit an:

$$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \text{ mit } a_{ij} = \delta_{i+1,j}.$$

b) Finde Formeln für die Eintragungen b_{ij} von $B := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8. a) Zeige durch Rechnung unter Verwendung der Formel für die Binomialkoeffizienten für $n \geq 0$ und $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

b) Verwende den binomischen Lehrsatz, um $\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}$ zu berechnen.

Aufgabe 9. Zeige $\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$.

Aufgabe 10. Zeige durch vollständige Induktion:

a) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$.
b) $n^3 - n$ ist für alle natürlichen Zahlen n durch 6 teilbar.

Aufgabe 11. Finde für a) und b) aus Aufgabe 10 jeweils eine alternative Beweismethode und zeige damit diese Aussagen.

Aufgabe 12. Zeige durch vollständige Induktion $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 13. Zeige durch vollständige Induktion $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ für $n \geq 0$.

Aufgabe 14. Finde eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige mathematische Aussage $A(n)$ (am besten eine Gleichung oder Ungleichung), die folgendes erfüllt: man kann zeigen, dass aus der Gültigkeit von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n+1)$ folgt, aber dennoch ist $A(n)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Aufgabe 15. p, s seien wahre Aussagen, q, r hingegen falsche Aussagen. Bestimme den Wahrheitswert von

a) $(p \vee r) \wedge ((r \wedge s) \vee p)$,
b) $\neg(p \vee q) \vee (\neg s \wedge \neg r)$.

Aufgabe 16. Finde unter den folgenden Aussagen die Kontradiktionen und Tautologien heraus:

a) $p \vee (q \wedge \neg p)$,
b) $r \vee q \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow q)$,
c) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$,
d) $(p \vee (\neg p \vee q)) \vee \neg(q \wedge r)$.

Aufgabe 17. Bilde die Verneinung von

a) Alle Rosen sind geruchlos oder haben Stacheln.
b) Alle Rosen sind entweder geruchlos oder haben Stacheln.
c) $\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$,
d) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists! y \in \mathbb{Z} : x + y = 1$.

Welche Aussagen sind richtig?

Aufgabe 18. Formuliere gemäß der Regel $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ äquivalente Aussagen zu:

a) $n^2 > n \Rightarrow n > 1$
b) $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n \Rightarrow 4|n$
c) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3$ ungerade $\Rightarrow n$ ungerade

Aufgabe 19. A, B seien zwei beliebige Mengen. Zeige:

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B = B \wedge A \cap B = A)$$

Aufgabe 20. Bestimme $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\times B$, $AB := \{ab | a \in A, b \in B\}$ und $\mathcal{P}(A)$ für $A = \{1, 4, 7\}$ und $B = \{1, 3, 5, 8\}$.

Aufgabe 21. Zeige, dass für drei Mengen A, B, C gilt:

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ und $(A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Aufgabe 22. Gib ein Beispiel für eine Relation an, die antisymmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv ist, und eines einer Relation, die symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv ist.

Aufgabe 23. Zeige, dass auf $\mathbb{Z}$ durch die Relation

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade}$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird, dass aber durch

$$x \approx y :\Leftrightarrow |x - y| \leq 2$$

keine solche definiert wird.

Aufgabe 24. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Dann definiert

$$x \sim x' :\Leftrightarrow f(x) \approx f(x')$$

eine Äquivalenzrelation auf X. Dies gilt insbesondere für $y \approx y' :\Leftrightarrow y = y'$.

Aufgabe 25. Sei M die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Setze:

$P_0 := \{\emptyset\}$,
$P_1 := \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$,
$P_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$,
$P_3 := \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$,
$P_4 := \{\{1, 2, 3, 4\}\}$.

Zeige, dass $P_0, \ldots, P_4$ eine Partition von M bilden und bestimme die durch diese Partition festgelegte Äquivalenzrelation.

Aufgabe 26. Seien $(A, \leq)$ und $(B, \preceq)$ zwei geordnete Mengen. Zeige, dass auf $A \times B$ durch

$$(a, b) \trianglelefteq (a', b') :\Leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \preceq b')$$

eine Ordnungsrelation definiert ist.

Aufgabe 27. Wir betrachten die Menge aller Punkte auf dem Einheitskreis in der Ebene. Für zwei Punkte P, Q setzen wir $P < Q$ falls der Kreisbogen von P nach Q gegen den Uhrzeigersinn kürzer ist als der Kreisbogen von Q nach P mit derselben Orientierung. Ist die Relation $<$ eine Ordnungsrelation?

Aufgabe 28. Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Dann definiert $A \leq B :\Leftrightarrow A \subseteq B$ eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

Aufgabe 29. Ermittle für folgende Mengen Supremum, Infimum, Maximum und Minimum, sofern diese existieren:

a) $(-3, 1] \cup (2, 7]$
b) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$
c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1 + \frac{1}{n+1}, n + 2)$

d) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1-1/n^2, 2-1/n]$.

Aufgabe 30. Bestimme das Bild und das Urbild von

a) $[0,2)$ unter der Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, x\mapsto (x-1)/(x+1)$.
b) $[-1,2)$ unter der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x^2-2$.

Aufgabe 31. Sei $f: A\to B$.

a) Sind $A_1, A_2 \subseteq A$, so gilt
$$f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2).$$
Zeige anhand eines Beispiels, dass die Gleichheit i.A. nicht zutrifft, für injektive f aber immer erfüllt ist.
b) Sind $B_1, B_2 \subseteq B$, so gilt
$$f^{-1}(B_1\setminus B_2) = f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2).$$

Aufgabe 32. Wähle jeweils Teilmengen von $\mathbb{R}$ so als Definitionsbereich und Zielbereich aus, dass durch die Zuordnung $x\mapsto x^2+x-6$ eine weder injektive noch surjektive Funktion, eine injektive aber nicht surjektive Funktion, eine surjektive aber nicht injektive Funktion, eine bijektive Funktion bestimmt wird.

Aufgabe 33. A und B seien Mengen mit n bzw. m Elementen. Wieviele Abbildungen von A nach B gibt es? Unter welchen Bedingungen an n und m gibt es injektive bzw. surjektive bzw. bijektive Abbildungen und wieviele?

Aufgabe 34. Bestimme $f\circ g$ und $g\circ f$ für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-2$ und $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^{-1}$. (Dies beinhaltet natürlich auch die Angabe des Definitionsbereichs!)

Aufgabe 35. Bestimme die Umkehrfunktion von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^3-3x^2+3x-1$.

Aufgabe 36. a) Gibt es zwei Funktionen f, g die beide nicht bijektiv sind, sodass die Verknüpfung $f\circ g$ bijektiv ist?
b) Gibt es zwei Funktionen f, g die beide nicht injektiv sind, sodass die Verknüpfung $f\circ g$ injektiv ist?

Aufgabe 37. In welchen Intervallen sind die folgenden Abbildungen monoton wachsend/fallend?

a) $f(x)=4x^3+3x^2-x+4$,
b) $\cos x$
c) $\tan x$
d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=0$ falls $x\in\mathbb{Q}$, $f(x)=1$ falls $x\notin\mathbb{Q}$.

Aufgabe 38. Gib eine auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbare Funktion an, deren Ableitung stets positiv ist, die aber nicht monoton wachsend ist.

Aufgabe 39. Sei $f: A\to B$ injektiv (resp. surjektiv) und $A, B\neq\emptyset$. Zeige, dass ein $g: B\to A$ existiert, das surjektiv (resp. injektiv) ist.

Aufgabe 40. Konstruiere eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}^3$ und $\mathbb{N}$.

Aufgabe 41. Zeige, dass alle Teilmengen der Gestalt $m\mathbb{Z}$ mit $m\in\mathbb{N}$ versehen mit der Addition Untergruppen von $(\mathbb{Z},+)$ sind.

Aufgabe 42. Bestimme die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_6, +)$ und alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Aufgabe 43. Sei $\mathcal{S}_n$ die Menge aller bijektiven Abbildungen (= Permutationen) der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ in sich und für $\phi, \psi \in \mathcal{S}_n$ bezeichne $\phi \circ \psi$ die Hintereinanderausführung dieser beiden Permutationen. Zeige, dass $(\mathcal{S}_n, \circ)$ eine Gruppe bildet. Gib die Gruppentafel für $\mathcal{S}_3$ an.

Aufgabe 44. Bilde die Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_5 \backslash \{\bar{0}\}, \cdot)$. Welche additive Gruppe hat dieselbe Gruppentafel? Gib einen Gruppenisomorphismus zwischen den beiden Gruppen an.

Aufgabe 45. Bestimme die Lösungen der folgenden Kongruenzen:

a) $3 + x \equiv 2(\mod 7)$,
b) $3 + 4x \equiv 2(\mod 7)$,
c) $x^2 \equiv 2(\mod 7)$.

Aufgabe 46. Berechne 7^{100} modulo 20 und löse die Gleichung $x^2 = -3$ in $\mathbb{Z}_5$ bzw. in $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 47. Zeige, dass die Menge $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ mit der geerbten Addition und Multiplikation einen Teilring von $\mathbb{C}$ bildet, die sog. Gauss'schen ganzen Zahlen. Versuche die invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ zu bestimmen.

Aufgabe 48. Zeige, dass die Einheiten (invertierbaren Elemente) eines Ringes mit Eins stets eine Gruppe bilden und stelle die Gruppentafel der Einheiten aus Aufgabe 47 auf.

Aufgabe 49. Bestimme die Einheiten und Nullteiler im Ring $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$. Zeige, dass in einem kommutativen Ring die Menge der Einheiten disjunkt zur Menge der Nullteiler ist.

Aufgabe 50. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Verknüpfungen

$$a \oplus b := a + b - 3,$$

$$a \odot b := ab - 3a - 3b + 12.$$

Zeige, dass $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ ein Körper ist. Gib einen Körperisomorphismus von $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ nach $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ an.

Aufgabe 51. Zeige, dass die Menge $\mathbb{Q}[i] := \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ mit der geerbten Addition und Multiplikation einen Teilkörper von $\mathbb{C}$ bildet. Schreibe $(3 + 2i)^{-1}$ in der Gestalt $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 52. a) Bestimme $ggT(645, 354)$ auf zwei verschiedene Arten.
b) Versuche ein Computerprogramm zu schreiben, das bei Eingabe zweier positiver ganzer Zahlen deren größten gemeinsamen Teiler berechnet.
c) Wende den Euklidischen Algorithmus auf die Polynome $x^2 + 3x + 2$ und $x^4 - 2x^2 - 2x - 1$ an. Erhält man so den ggT von zwei beliebigen Polynomen?

Aufgabe 53. Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist durch $(m, n) \sim (p, q) :\Leftrightarrow m + q = n + p$ eine Äquivalenzrelation definiert. Auf der Menge der Äquivalenzklassen definieren wir eine Multiplikation durch

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] := [(mp + nq, mq + np)].$$

Zeige, dass diese Operation wohldefiniert ist.

Aufgabe 54. Zeige, dass in $\mathbb{Z}$ die Kürzungsregel gilt, d.h. für $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$:

$$km = kn \Rightarrow m = n.$$

Aufgabe 55. Zeige, dass in angeordneten Körpern stets

$$0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1} \text{ und } x^2 > 0$$

gilt. Folgere aus zweiterem, dass $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper ist. Bedeutet das, dass auf $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation existiert?

Aufgabe 56. Sei K ein angeordneter Körper, $a, b \in K$. Zeige, dass aus $a < b$ folgt, dass $a < (a + b)/2 < b$, wobei $2 := 1 + 1$.

Aufgabe 57. Zeige, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ und } |x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

Aufgabe 58. Löse in $\mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|2x - 5| \geq |x^2 + 8|.$$

Aufgabe 59. Bestimme die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ der folgenden Gleichung in Abhängigkeit von t:

$$(x + 1)^2 + t^2 = 4.$$

Aufgabe 60. Berechne

a) $|z|$, $arg(z)$, z^{-1} und $\sqrt{z}$ für $z = 3 - 4i$ und $z = -i$.
b) $(-1 + i)^8$.

Aufgabe 61. Bestimme die Lösungen der quadratischen Gleichung $ix^2 - (2 + i)x - 1 + 3i = 0$ und die Nullstellen des quadratischen Polynoms $p(z) = z^2 + (5 - 5i)z - 13i$.

Aufgabe 62. Bestimme die Polarkoordinaten sowie Real- und Imaginärteil der Lösungen von $x^6 = 1$ und stelle die Lösungen graphisch dar.

Aufgabe 63. Zeige, dass die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ ein Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 64. Sei P ein Polynom mit reellen Koeffizienten, das an der Stelle $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle besitzt, d.h. $P(z) = 0$. Zeige, dass auch $P(\bar{z}) = 0$ gilt.