Stochastik

Eine Vorlesung für das Lehramtsstudium

Verfasst von Franz Hofbauer,
bearbeitet von Gernot Greschonig

Wintersemester 2018/19

Vorwort

Der Begriff Wahrscheinlichkeit wird üblicherweise mit Häufigkeit assoziiert. Was oft eintritt, hat hohe Wahrscheinlichkeit, was selten eintritt, hat niedrige Wahrscheinlichkeit. Daher wird in diesem Skriptum Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten definiert. Damit wird der Additionssatz für endlich viele Ereignisse bewiesen, auf dem dann die Wahrscheinlichkeitstheorie aufbaut. Man kommt auch ohne σ-Additivität aus.

Das Skriptum beginnt mit der für die Wahrscheinlichkeitstheorie notwendigen Kombinatorik, bevor dann im zweiten Kapitel Wahrscheinlichkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit definiert und die wichtigsten Sätze zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bewiesen werden. Diese sind der Satz über gleichwahrscheinliche Ausfälle (Laplace-Wahrscheinlichkeit), der Multiplikationssatz, der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes.

Im dritten Kapitel werden diskrete und kontinuierliche Zufallsvariable und deren Verteilungen eingeführt. Ausführlich behandelt werden Binomialverteilung, geometrische und hypergeometrische Verteilung, Poissonverteilung, Exponentialverteilung, Gammaverteilung und Normalverteilung. Die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung wird nur heuristisch hergeleitet.

Im vierten Kapitel wird die gemeinsame Verteilung mehrerer Zufallsvariable und die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen eingeführt. Es geht dann ums Rechnen mit Zufallsvariablen. Für die Wurzel aus einer Zufallvariable, für die Summe und für den Quotienten zweier Zufallsvariable werden die Wahrscheinlichkeitsdichten bestimmt. Es wird gezeigt, dass eine Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist. Schließlich werden noch Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz behandelt. Bewiesen werden sie jedoch nur für diskrete Zufallsvariable. Schließlich gibt es noch einen kurzen Ausblick auf den Zentralen Grenzwertsatz und das Gesetz der großen Zahlen.

Das fünfte Kapitel des Skriptums ist der Statistik gewidmet. Zuerst wird die Methode der kleinsten Quadrate behandelt. So gewinnt man Formeln zum Schätzen von Parametern aus vorliegenden Stichproben. Dann folgen Konfidenzintervalle und statistische Tests.

Das Skriptum enthält eine große Anzahl durchgerechneter Beispiele, von denen viele auch im Schulunterricht verwendet werden können.

Das Skriptum hat zwei Anhänge. Im ersten findet man einige Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie, im zweiten werden notwendige Vorkenntnisse aus der Analysis zusammengestellt.

I. Kombinatorik

Stichproben spielen in der Stochastik eine wesentliche Rolle. In der Wahrscheinlichkeitstheorie man das Ausrechnen von Wahrscheinlichkeiten oft auf das Abzählen von Stichproben zurückführen. In der Statistik besteht die grundlegende Methode ja gerade darin, aus einer zufällig gezogenen Stichprobe Folgerungen zu ziehen.

Damit setzen wir uns in diesem ersten Teil auseinander. Das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Berechnen von Anzahlen beschäftigt, heißt Kombinatorik. Wir beginnen mit geordneten Stichproben, behandeln dann ungeordnete Stichproben und schließlich Zerlegungen von Mengen und Anordnungen von vorgegebenen Objekten.

1. Geordnete Stichproben

Wir haben eine Menge M vor uns, aus der eine Stichprobe gezogen wird (zum Beispiel eine Menge von gleichartigen Waren, aus der eine Stichprobe zur Qualitätskontrolle gezogen wird, oder eine Menge von Losen, aus der die Preisträger gezogen werden). Mit n bezeichnen wir die Anzahl der Elemente der Menge M. Aus dieser n-elementigen Menge M ziehen wir der Reihe nach k Elemente. Es gibt also einen ersten Zug, einen zweiten Zug, und so weiter bis zum k-ten Zug. Die Ordnung in der Stichprobe ist wesentlich, daher spricht man von geordneten Stichproben. Die Anzahl k der Elemente in der Stichprobe heißt *Stichprobenumfang*.

Wir unterscheiden geordnete Stichproben mit und ohne Zurücklegen. Geordnete Stichproben mit Zurücklegen vom Umfang k erhält man, wenn man aus der Menge M der Reihe nach k Elemente zieht und jedes sofort wieder zurücklegt. Es wird also jedes Mal aus der ursprünglichen Menge M gezogen. Jedes Element kann öfter in der Stichprobe vorkommen. Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen vom Umfang k erhält man, wenn man aus der Menge M der Reihe nach k Elemente zieht und nicht zurücklegt. Jedes Element kann nur einmal in der Stichprobe vorkommen.

Geordnete Stichproben schreibt man in der Form von k-Tupeln $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ im Gegensatz zu Mengen, die ungeordnet sind und für die man geschwungene Klammern verwendet. Geordnete Stichproben vom Umfang 2 sind Paare (x_1, x_2) und geordnete Stichproben vom Umfang 3 sind Tripel (x_1, x_2, x_3).

Beispiel 1: Man schreibe alle geordneten Stichproben vom Umfang 2 aus der Menge $\{a, b, c, d\}$ auf.

Mit Zurücklegen:

$$\begin{array}{cccc} (a,a) & (a,b) & (a,c) & (a,d) \\ (b,a) & (b,b) & (b,c) & (b,d) \\ (c,a) & (c,b) & (c,c) & (c,d) \\ (d,a) & (d,b) & (d,c) & (d,d) \end{array}$$

Ohne Zurücklegen:

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & (a,c) & (a,d) \\ (b,a) & (b,c) & (b,d) \\ (c,a) & (c,b) & (c,d) \\ (d,a) & (d,b) & (d,c) \end{array}$$

Man sieht hier schon, wie man diese Stichproben zählen kann. Für den ersten Zug gibt es 4 Möglichkeiten, nämlich alle Elemente der Menge. Wird zurückgelegt, dann gibt es für den zweiten Zug ebenfalls 4 Möglichkeiten. Da man jeden der 4 möglichen zweiten Züge an jeden der 4 möglichen ersten Züge anfügen kann, erhält man $4 \cdot 4 = 16$ geordnete Stichproben mit Zurücklegen.

Wird nicht zurückgelegt, dann gibt es für den zweiten Zug nur 3 Möglichkeiten. Welche Möglichkeiten das sind, hängt davon ab, wie der erste Zug ausgefallen ist. Es sind aber immer 3 Möglichkeiten. Daher gibt es $4 \cdot 3 = 12$ geordnete Stichproben ohne Zurücklegen.

Wir wollen diese Anzahlen allgemein ausrechnen. Zuvor eine Definition.

Definition: Wir definieren $n! = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! = 1$. Man liest $n!$ als „n-Faktorielle".

Satz 1: *Die Anzahl der geordneten Stichproben aus einer n-elementigen Menge M vom Umfang k mit Zurücklegen ist n^k (entspricht dem kartesischen Produkt $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{k-mal}$).*

Die Anzahl der geordneten Stichproben aus einer n-elementigen Menge M vom Umfang k ohne Zurücklegen ist $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Beweis: Mit Zurücklegen: Für den ersten Zug kommen alle Elemente der Menge M in Frage, also gibt es n Möglichkeiten. Da wir zurücklegen, wird beim zweiten Mal ebenfalls aus der ursprünglichen Menge M gezogen, also gibt es auch für den zweiten Zug n Möglichkeiten. Das geht so weiter bis zum k-ten Zug. Für jeden gibt es n Möglichkeiten. Wir erhalten also $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$ Stichproben.

Ohne Zurücklegen: Für den ersten Zug x_1 kommen alle Elemente der Menge M in Frage, also gibt es n Möglichkeiten. Da wir nicht zurücklegen, wird beim zweiten Mal aus der Menge $M \setminus \{x_1\}$ gezogen, die um ein Element weniger hat, also gibt es für den zweiten Zug $n-1$ Möglichkeiten. Beim dritten Mal wird aus der Menge $M \setminus \{x_1, x_2\}$ gezogen, die um zwei Elemente weniger hat, also gibt es für den dritten Zug $n-2$ Möglichkeiten. Das geht so weiter bis zum k-ten Zug, für den es dann nur mehr $n-k+1$ Möglichkeiten gibt. Wir erhalten also $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ Stichproben. $\square$

Beispiel 2: In einem Hotel sind 6 Einbettzimmer frei. Es kommen 4 Gäste. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese auf die 6 Zimmer zu verteilen?

Hier handelt es sich um geordnete Stichproben vom Umfang 4 aus einer 6-elementigen Menge ohne Zurücklegen. Also haben wir $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ mögliche Zimmereinteilungen.

Stimmt der Stichprobenumfang k mit der Anzahl n der Elemente der Menge, aus der gezogen wird, überein, dann sind die geordneten Stichproben ohne Zurücklegen gerade die verschiedenen möglichen Anordnungen der n Elemente der Menge. Wir schreiben das als eigenen Satz auf.

Satz 2: *Die Anzahl aller möglichen Anordnungen von n verschiedenen Objekten ist $n!$.*

Beweis: Genauso wie bei den geordneten Stichproben ohne Zurücklegen. Auf den ersten Platz können wir jedes der n Objekte setzen. Ist der erste Platz besetzt, dann sind noch $n-1$ Objekte übrig, die wir auf den zweiten Platz setzen können. Für den dritten Platz gibt es noch $n-2$ Besetzungsmöglichkeiten und so weiter. Für den n-ten Platz gibt es nur mehr eine Möglichkeit. Also haben wir $n(n-1)\dots 1 = n!$ mögliche Anordnungen. $\square$

Wir verallgemeinern die geordneten Stichproben, indem wir bei jedem Zug aus einer anderen Menge ziehen.

Satz 3: *Seien $M_1, M_2, \dots, M_k$ Mengen, wobei n_j die Anzahl der Elemente der Menge M_j ist. Die Anzahl aller geordneten Stichproben vom Umfang k, wobei beim j-ten Mal aus der Menge M_j gezogen wird, ist $n_1 n_2 \dots n_k$ (entspricht dem kartesischen Produkt $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_k$).*

Beweis: Für den ersten Zug kommen alle Elemente der Menge M_1 in Frage, also gibt es n_1 Möglichkeiten. Für den zweiten Zug kommen alle Elemente der Menge M_2 in Frage, also gibt es n_2 Möglichkeiten. So geht es weiter bis zum letzten Zug, für den es n_k Möglichkeiten gibt. Also haben wir $n_1 n_2 \ldots n_k$ verschiedene Stichproben. □

Beispiel 3: Eine Autonummer ist eine Folge von Zeichen, die Ziffern oder Buchstaben sein können. Wie viele 4-stellige Autonummern gibt es? Wie viele 4-stellige Autonummern gibt es, die mit einer Ziffer ungleich 0 beginnen und mit 3 Buchstaben enden? Wie viele 5-stellige Autonummern gibt es, die mit vier Ziffern ohne führende 0 beginnen und mit einem Buchstaben enden? Wie viele 5-stellige Autonummern gibt es, die abwechselnd aus Ziffern und Buchstaben bestehen?

Die 4-stelligen Autonummern sind die geordneten Stichproben vom Umfang 4 aus einer 36-elementigen Menge mit Zurücklegen. Es gibt also $36^4 = 1{,}679.616$ 4-stellige Autonummern.

Soll die Autonummer mit einer Ziffer ungleich 0 beginnen und mit 3 Buchstaben enden, dann wird das erste Zeichen aus einer 9-elementigen Menge gewählt, die weiteren drei Zeichen aus einer 26-elementigen Menge. Daher gibt es $9 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 158.184$ derartige Autonummern.

Soll eine 5-stellige Autonummer mit vier Ziffern ohne führende 0 beginnen und mit einem Buchstaben enden, dann wird das erste Zeichen aus einer 9-elementigen Menge gewählt, die dann folgenden drei Zeichen aus einer 10-elementigen Menge und letzte Zeichen aus einer 26-elementigen Menge. Daher gibt es $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 = 234.000$ derartige Autonummern.

Wechseln Ziffern und Buchstaben einander ab, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden. Beginnt die Autonummer mit einer Ziffer, dann stehen an der ersten, dritten und fünften Stelle Ziffern, an der zweiten und vierten Stelle Buchstaben. Für diesen Fall gibt es $10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 = 676.000$ Möglichkeiten. Beginnt die Autonummer mit einem Buchstaben, dann stehen an der ersten, dritten und fünften Stelle Buchstaben, an der zweiten und vierten Stelle Ziffern. Für diesen Fall gibt es $26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 = 1{,}757.600$ Möglichkeiten. Es gibt also insgesamt 2,433.600 derartige Autonummern.

2. Ungeordnete Stichproben

Im Gegensatz zu den geordneten Stichproben spielt bei den ungeordneten Stichproben die Reihenfolge innerhalb der Stichprobe keine Rolle. Die ungeordneten Stichproben vom Umfang k einer n-elementigen Menge M sind also die k-elementigen Teilmengen dieser Menge.

Beispiel 4: Man schreibe alle ungeordneten Stichproben vom Umfang 3, also alle 3-elementigen Teilmengen aus der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ auf.

$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$

Die Anzahl der 3-elementigen Teilmengen aus der 5-elementigen Menge $\{a, b, c, d, e\}$ ist somit 10. Wir suchen eine Formel für die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Zuvor eine Definition.

Definition: Für $n \geq 0$ und $0 \leq k \leq n$ definieren wir $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, die sogenannten Binomialkoeffizienten. Man liest n über k. Wenn $k < 0$ oder $k > n$ gilt, dann setzt man $\binom{n}{k} = 0$.

Satz 4: *Sei $0 \leq k \leq n$. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge M ist $\binom{n}{k}$.*

Beweis: Den Fall $k = 0$ behandeln wir zuerst. Es gibt genau eine 0-elementige Teilmenge, nämlich die leere Menge. Wegen $\binom{n}{0} = 1$ stimmt die angegebene Formel für $k = 0$.

Sei jetzt $k \geq 1$ und a_k die Anzahl der k-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge M. Nach Satz 2 gibt es für jede k-elementige Teilmenge $k!$ verschiedene Anordnungen, daher erhalten wir insgesamt $a_k k!$ geordnete Stichproben vom Umfang k ohne Zurücklegen aus der n-elementigen Menge M. Die Anzahl der geordneten Stichproben ist $\frac{n!}{(n-k)!}$ nach Satz 1. Daher muss $a_k k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ gelten und es folgt $a_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. □

Beispiel 5: Wie viele Diagonalen hat ein regelmäßiges n-Eck?

Die Anzahl aller Geraden, die durch je 2 Punkte dieser n Eckpunkte gehen, ist gleich der Anzahl der 2-elementigen Teilmengen aus den n Eckpunkten, also $\binom{n}{2}$. Daher ist die Anzahl der Seiten und Diagonalen zusammen gleich $\binom{n}{2}$. Da es n Seiten gibt, ist die Anzahl der Diagonalen gleich $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Beispiel 6: Ein Verein, der 22 Mitglieder hat, will einen Ausschuss von 5 Personen einsetzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Von den 22 Mitgliedern sind 14 Frauen und 8 Männer. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn der Ausschuss aus 3 Frauen und 2 Männern bestehen soll?

Ein Ausschuss ist eine Teilmenge. Daher gibt es $\binom{22}{5} = 26.334$ Möglichkeiten, einen 5-köpfigen Ausschuss aus den 22 Mitgliedern zu wählen.

Soll der Ausschuss 3 Frauen und 2 Männer enthalten, dann wählen wir die Frauen und Männer getrennt aus. Sei $\mathcal{T}_1$ die Menge aller 3-elementigen Teilmengen aus der Menge der 14 Frauen. Sei $\mathcal{T}_2$ die Menge aller 2-elementigen Teilmengen aus der Menge der 8 Männer. Einen 5-köpfigen Ausschuss mit 3 Frauen und 2 Männern erhält man dann, indem man eine der Mengen aus $\mathcal{T}_1$ mit einer der Mengen aus $\mathcal{T}_2$ zusammensetzt. Die Anzahl aller möglichen Ausschüsse ist nach Satz 3 gleich $n_1 n_2$, wobei $n_1 = \binom{14}{3} = 364$ die Anzahl der Elemente von $\mathcal{T}_1$ ist und $n_2 = \binom{8}{2} = 28$ die Anzahl der Elemente von $\mathcal{T}_2$ ist. Es gibt daher $\binom{14}{3}\binom{8}{2} = 10.192$ mögliche Ausschüsse mit 3 Frauen und 2 Männern.

Beispiel 7: Aus 52 Spielkarten (13 $\heartsuit$-Karten, 13 $\diamondsuit$-Karten, 13 $\clubsuit$-Karten und 13 $\spadesuit$-Karten) wird eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang 11 gezogen. Wie viele solche Stichproben gibt es, die 6 $\heartsuit$-Karten, 3 $\diamondsuit$-Karten und 2 $\clubsuit$-Karten enthalten?

Wir gehen wie in Beispiel 6 vor. Sei $\mathcal{T}_1$ die Menge aller 6-elementigen Teilmengen aus den $\heartsuit$-Karten. Ihre Anzahl ist $\binom{13}{6} = 1.716$. Sei $\mathcal{T}_2$ die Menge aller 3-elementigen Teilmengen aus den $\diamondsuit$-Karten. Ihre Anzahl ist $\binom{13}{3} = 286$. Sei $\mathcal{T}_3$ die Menge aller 2-elementigen Teilmengen aus den $\clubsuit$-Karten. Ihre Anzahl ist $\binom{13}{2} = 78$. Eine 11-elementige Teilmenge mit 6 $\heartsuit$-Karten, 3 $\diamondsuit$-Karten und 2 $\clubsuit$-Karten erhält man dadurch, dass man eine Menge aus $\mathcal{T}_1$, eine Menge aus $\mathcal{T}_2$, und eine Menge aus $\mathcal{T}_3$ zusammensetzt. Gemäß Satz 3 gibt es dafür $\binom{13}{6}\binom{13}{3}\binom{13}{2} = 38{,}280.528$ Möglichkeiten.

Mit dieser Vorgangsweise können wir folgende Summenformel für Binomialkoeffizienten beweisen. Hier ist die Definition $\binom{n}{k} = 0$ für $k < 0$ oder $k > n$ wesentlich.

Satz 5: *Seien $N > 0$ und $0 \leq M \leq N$ natürliche Zahlen. Dann gilt für $0 \leq n \leq N$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}$.*

Beweis: Aus einer Menge von N unterscheidbaren Kugeln, von denen M weiß und $N-M$ schwarz sind, werden n-elementige Teilmengen gezogen. Die Anzahl der n-elementigen Teilmengen, die k weiße Kugeln und $n-k$ schwarze Kugeln enthalten, ist $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$, da sich jede dieser Teilmengen aus einer k-elementigen Teilmenge der M weißen Kugeln und einer $(n-k)$-elementigen Teilmenge der $N-M$ schwarzen Kugeln zusammensetzen lässt. Die Anzahl aller n-elementigen Teilmengen ist dann $\sum_{k=0}^{n}\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$, denn aufgrund der Definition $\binom{M}{k}=0$ für $k>M$ entspricht jede nicht mögliche Ziehung einem Summanden von 0. Die Anzahl aller n-elementigen Teilmengen ist aber auch $\binom{N}{n}$. Damit ist die Gleichung bewiesen. □

Wir betrachten nun geordnete Stichproben ähnlich dem Beispiel 7.

Beispiel 8: Aus 52 Spielkarten (13 ♡-Karten, 13 ♢-Karten, 13 ♣-Karten und 13 ♠-Karten) wird eine geordnete Stichprobe vom Umfang 17 mit gezogen. Wie viele solche Stichproben mit Zurücklegen und ohne Zurücklegen gibt es, die 8 ♡-Karten und 9 ♢-Karten enthalten?

Da 8 der 17 Plätze mit ♡-Karten und die übrigen 9 mit ♢-Karten besetzt werden, gibt es $\binom{17}{8}$ mögliche Platzaufteilungen. Wir betrachten zuerst die geordneten Stichproben, wobei die ersten 8 Plätze mit ♡-Karten und die letzten 9 Plätze mit ♢-Karten besetzt sind. Wenn wir zurücklegen, dann ist deren Anzahl $13^8 13^9$. Wenn wir nicht zurücklegen, dann bilden die ersten 8 Plätze eine geordnete Stichprobe vom Umfang 8 ohne Zurücklegen aus den 13 ♡-Karten und letzten 9 Plätze bilden eine geordnete Stichprobe vom Umfang 9 ohne Zurücklegen aus den 13 ♢-Karten. Deren Anzahlen sind $\frac{13!}{5!}$ und $\frac{13!}{4!}$. Dieselben Anzahlen erhält man auch für alle anderen Platzaufteilungen, daher gibt es $\binom{17}{8}13^8 13^9 \approx 2{,}10\cdot 10^{23}$ geordnete Stichproben mit Zurücklegen und $\binom{17}{8}\frac{13!}{5!}\frac{13!}{4!}\approx 3{,}27\cdot 10^{20}$ geordnete Stichproben ohne Zurücklegen vom Umfang 17, die 8 ♡-Karten und 9 ♢-Karten enthalten. Die Anzahl der geordneten Stichproben ohne Zurücklegen ergibt sich auch durch die Anzahl der entsprechenden ungeordneten Stichproben $\binom{13}{8}\binom{13}{9}$ multipliziert mit der Anzahl der Anordnungen 17!.

Zum Abschluss sollen noch ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen behandelt werden.

Satz 6: *Die Anzahl der ungeordneten Stichproben vom Umfang k aus einer n-elementigen Menge M mit Zurücklegen ist gleich $\binom{n+k-1}{k}$.*

Beweis: Wir betrachten die Menge M der Kugeln mit den Nummern 1 bis n. Für $i=1,\dots,n$ sei $k_i\in\mathbb{N}$ die Häufigkeit der i-ten Kugel in unserer Stichprobe, dann gilt $k_1+k_2+\dots+k_n=k$. Wir ordnen unserer Stichprobe eineindeutig eine $0-1$-Folge der Länge $n+k-1$ mit k-mal 1 und $n-1$-mal 0 zu:

$$\underbrace{1\dots1}_{k_1-mal}\,0\,\underbrace{1\dots1}_{k_2-mal}\,0\dots\dots0\,\underbrace{1\dots1}_{k_n-mal}$$

Diese Folgen entsprechen genau den k-elementigen Teilmengen einer $n+k-1$-elementigen Menge, nach Satz 4 folgt die Behauptung. □

Beispiel 9: Ein Beispiel für ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen vom Umfang 2 aus der Menge $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ sind Dominosteine. Ihre Anzahl ist $\binom{7+2-1}{2}=28$.

3. Zerlegungen einer Menge

In Beispiel 8 kommen nur $\heartsuit$-Karten und $\diamondsuit$-Karten in der Stichprobe vor. Fragen wir nach der Anzahl der geordneten Stichproben vom Umfang 18, die fünf $\heartsuit$-Karten, drei $\diamondsuit$-Karten, zwei $\clubsuit$-Karten und acht $\spadesuit$-Karten enthalten, dann müssen wir zuerst die Anzahl der möglichen Aufteilungen der 18 Plätze in fünf Plätze für die $\heartsuit$-Karten, in drei Plätze für die $\diamondsuit$-Karten, in zwei Plätze für die $\clubsuit$-Karten und in acht Plätze für die $\spadesuit$-Karten bestimmen. Eine Platzaufteilung entspricht einer Zerlegung der Menge der Plätze in Teilmengen, wobei die Anzahl der Elemente für jede dieser Teilmengen vorgegeben ist. Mit solchen Zerlegungen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Vorgegeben ist eine n-elementige Menge M. Zu bestimmen ist die Anzahl aller möglichen Zerlegungen dieser Menge in j Teilmengen, von denen die erste k_1 Elemente, die zweite k_2 Elemente und schließlich die j-te k_j Elemente enthält.

Beispiel 10: Man schreibe alle Zerlegungen der Menge $\{a,b,c,d,e\}$ in 3 Teilmengen auf, von denen die erste 2 Elemente, die zweite 1 Element und die dritte 2 Elemente enthält.

$$\begin{array}{lll}
\{a,b\},\ \{c\},\ \{d,e\} & \{a,b\},\ \{d\},\ \{c,e\} & \{a,b\},\ \{e\},\ \{c,d\} \\
\{a,c\},\ \{b\},\ \{d,e\} & \{a,c\},\ \{d\},\ \{b,e\} & \{a,c\},\ \{e\},\ \{b,d\} \\
\{a,d\},\ \{b\},\ \{c,e\} & \{a,d\},\ \{c\},\ \{b,e\} & \{a,d\},\ \{e\},\ \{b,c\} \\
\{a,e\},\ \{b\},\ \{c,d\} & \{a,e\},\ \{c\},\ \{b,d\} & \{a,e\},\ \{d\},\ \{b,c\} \\
\{b,c\},\ \{a\},\ \{d,e\} & \{b,c\},\ \{d\},\ \{a,e\} & \{b,c\},\ \{e\},\ \{a,d\} \\
\{b,d\},\ \{a\},\ \{c,e\} & \{b,d\},\ \{c\},\ \{a,e\} & \{b,d\},\ \{e\},\ \{a,c\} \\
\{b,e\},\ \{a\},\ \{c,d\} & \{b,e\},\ \{c\},\ \{a,d\} & \{b,e\},\ \{d\},\ \{a,c\} \\
\{c,d\},\ \{a\},\ \{b,e\} & \{c,d\},\ \{b\},\ \{a,e\} & \{c,d\},\ \{e\},\ \{a,b\} \\
\{c,e\},\ \{a\},\ \{b,d\} & \{c,e\},\ \{b\},\ \{a,d\} & \{c,e\},\ \{d\},\ \{a,b\} \\
\{d,e\},\ \{a\},\ \{b,c\} & \{d,e\},\ \{b\},\ \{a,c\} & \{d,e\},\ \{c\},\ \{a,b\}
\end{array}$$

An diesem Beispiel kann man auch schon erkennen, wie man die Anzahl der möglichen Zerlegungen ermitteln kann. Es gibt $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, die erste Teilmenge zu wählen. Zu jeder dieser Möglichkeiten kann man auf $\binom{3}{1} = 3$ Arten die zweite Teilmenge wählen. Für die dritte Teilmenge gibt es dann nur mehr $1 = \binom{2}{2}$ Möglichkeit. Insgesamt haben wir also $\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{2} = 30$ Möglichkeiten.

Satz 7: *Sei $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_j$. Die Anzahl der möglichen Zerlegungen einer n-elementigen Menge M in j Teilmengen, von denen die erste k_1 Elemente, die zweite k_2 Elemente, ... und die j-te k_j Elemente hat, ist $\frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_j!}$. Dieser Ausdruck heißt Polynomial- oder Multinomialkoeffizient und wird analog dem Binomialkoeffizienten mit $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_j}$ bezeichnet. Für $j = 2$ (und daher $k_1 + k_2 = n$) gilt $\binom{n}{k_1,k_2} = \binom{n}{k_1} = \binom{n}{k_2}$*

Beweis: Es gibt $\binom{n}{k_1}$ Möglichkeiten, die erste Teilmenge aus M zu wählen. Es verbleiben $n - k_1$ Elemente in M. Es gibt dann $\binom{n-k_1}{k_2}$ Möglichkeiten, die zweite Teilmenge zu wählen. Es bleiben $n - k_1 - k_2$ Elemente in M. Somit gibt es $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ Möglichkeiten, die dritte Teilmenge zu wählen. Man setzt induktiv fort, für die letzte Teilmenge bleiben $n - k_1 - \cdots - k_{j-1} = k_j$ Elemente übrig. Daher gibt es nur mehr $1 = \binom{k_j}{k_j} = \binom{n-k_1-\cdots-k_{j-1}}{k_j}$ Möglichkeit für die letzte Teilmenge. Die Anzahl aller möglichen Zerlegungen ist also

$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{j-1}}{k_j} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\dots\frac{(n-k_1-\dots-k_{j-1})!}{k_j!0!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_j!}$.
Damit ist die gewünschte Formel gefunden. □

Bemerkung: Die Bezeichnung Polynomial- oder Multinomialkoeffizient rührt von folgender Verallgemeinerung des binomischen Satzes her:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_j)^n = \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2, \dots, k_j \le n \\ k_1 + k_2 + \dots + k_j = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_j} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_j^{k_j}$$

Das vollständige Ausmultiplizieren der linken Seite liefert j^n Summanden, von denen jeder ein n-faches Produkt ist von Elementen der Menge $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$ beziehungsweise eine Zerlegung der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in k_1 Plätze mit a_1, in k_2 Plätze mit a_2 und so fort bis zu den k_j Plätzen mit a_j. Nach dem Kommutativgesetz kann jeder dieser Summanden in die Form $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_j^{k_j}$ gebracht werden und die Anzahl der Summanden mit diesem Wert ergibt sich nach Satz 7 zu $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_j}$.

Beispiel 11: Für ein Foto sollen sich 22 Personen, die verschiedene Größe haben, in zwei Reihen aufstellen, wobei die vorne stehende Person jeweils kleiner als die dahinterstehende Person ist. Auf wie viele Arten ist das möglich?

Eine 22-elementige Menge ist in 11 Teilmengen aufzuteilen, von denen jede 2 Elemente enthält. Die beiden Personen in der ersten Teilmenge stellen sich ganz links auf, die beiden Personen in der zweiten Teilmenge daneben und so weiter, wobei jeweils die kleinere Person vorne und die größere hinten steht. Nach Satz 7 ist so eine Aufteilung auf $\frac{22!}{(2!)^{11}}$ verschiedene Arten möglich.

Beispiel 12: Aus 52 Spielkarten, die aus 13 $\heartsuit$-Karten, aus 13 $\diamondsuit$-Karten, aus 13 $\clubsuit$-Karten und aus 13 $\spadesuit$-Karten bestehen, wird eine geordnete Stichprobe vom Umfang 17 mit Zurücklegen gezogen. Wie viele solche Stichproben gibt es, die 5 $\heartsuit$-Karten, 3 $\diamondsuit$-Karten, 7 $\clubsuit$-Karten und 2 $\spadesuit$-Karten enthalten.

Wir gehen vor wie in Beispiel 8. Es werden zuerst die 17 Plätze aufgeteilt und zwar in 5 Plätze für die $\heartsuit$-Karten, in 3 Plätze für die $\diamondsuit$-Karten, in 7 Plätze für die $\clubsuit$-Karten und in 2 Plätze für die $\spadesuit$-Karten. Die Anzahl der möglichen Platzaufteilungen ist gerade die Anzahl der möglichen Zerlegungen einer 17-elementigen Menge in 4 Teilmengen, von denen die erste 5 Elemente, die zweite 3 Elemente, die dritte 7 Elemente und die vierte 2 Elemente hat. Diese Anzahl ist $\frac{17!}{5!3!7!2!}$ nach Satz 7.

Gibt man eine Platzaufteilung vor, dann gibt es 13^5 Möglichkeiten, die 5 Plätze für die $\heartsuit$-Karten zu besetzen. Weiters gibt es 13^3 Möglichkeiten, die 3 Plätze für die $\diamondsuit$-Karten zu besetzen, 13^7 Möglichkeiten, die 7 Plätze für die $\clubsuit$-Karten zu besetzen, und schließlich 13^2 Möglichkeiten, die 2 Plätze für die $\clubsuit$-Karten zu besetzen. Es gibt also $\frac{17!}{5!3!7!2!}13^5 13^3 13^7 13^2$ geordnete Stichproben vom Umfang 17 mit Zurücklegen, die 5 $\heartsuit$-Karten, 3 $\diamondsuit$-Karten, 7 $\clubsuit$-Karten und 2 $\spadesuit$-Karten enthalten.

4. Anordnungen (Permutationen) nicht unterscheidbarer Objekte

Die Anzahl der möglichen Anordnungen von n verschiedenen Objekten ist $n!$ wie in Satz 2 gezeigt wurde. Wie viele Anordnungen gibt es nun, wenn die n Objekte nicht alle unterscheidbar sind? Wir betrachten n Buchstaben, unter denen k_1-mal Buchstabe B_1, k_2-mal Buchstabe $B_2, \ldots$ und k_j-mal Buchstabe B_j vorkommt, wobei $n = k_1+k_2+\cdots+k_j$ gilt. Diese n Buchstaben werden auf n Plätzen angeordnet. Jede Anordnung entspricht einer Zerlegung der Menge der n Plätze in j Teilmengen, wobei die erste Teilmenge k_1 Elemente hat (auf diesen Plätzen steht B_1), die zweite Teilmenge k_2 Elemente hat (auf diesen Plätzen steht B_2), ... und die j-te Teilmenge k_j Elemente hat (auf diesen Plätzen steht B_j). Nach Satz 7 ist die Anzahl dieser Zerlegungen und damit auch die Anzahl der möglichen Anordnungen dieser Buchstaben gleich

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_j} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_j!}.$$

Beispiel 13: Auf wie viele Arten kann man die acht Buchstaben AAABBBCC anordnen, wenn an erster Stelle kein A stehen soll?

Die Anzahl aller möglichen Anordnungen dieser acht Buchstaben ist $\frac{8!}{3!3!2!} = 560$. Um die Anzahl der Anordnungen, die A an erster Stelle haben, zu bestimmen, schreiben wir ein A an die erste Stelle. Da die übrigen sieben Buchstaben beliebig auf den restlichen sieben Plätzen angeordnet werden können, ist diese Anzahl $\frac{7!}{2!3!2!} = 210$. Es gibt $560 - 210 = 350$ Anordnungen, die A nicht an erster Stelle haben.

Genausogut kann man die Anzahl der Anordnungen berechnen, die B an erster Stelle haben, es sind $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$, und die Anzahl der Anordnungen, die C an erster Stelle haben, das sind $\frac{7!}{3!3!1!} = 140$. Die Anzahl der Anordnungen, die A nicht an erster Stelle haben, ist daher $210 + 140 = 350$.

Bemerkung: Beim vorangehenden Beispiel ist es wesentlich, dass Summen nur von den Elementzahlen disjunkter Mengen und Differenzen nur von der Elementzahl einer Obermenge abzüglich der Elementzahl einer ihrer Teilmengen gebildet werden.

II. Wahrscheinlichkeitstheorie

In der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt man sich mit Vorgängen, deren Ausgang zufällig und nicht vorherbestimmbar ist. Idealerweise kann so ein Vorgang (Zufallsexperiment) unter genau festgelegten Bedingungen mit von vornherein bekannten möglichen Ergebnissen (zumindest theoretisch) beliebig oft wiederholt werden. Die Wahrscheinlichkeit ist eine Maßzahl für die Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses bei der wiederholten Durchführung eines solchen Zufallsexperiments. Entsprechend werden wir die Wahrscheinlichkeit auch definieren, diese Definition wird auch als „frequentistischer" oder „statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff" bezeichnet und geht unter anderem auf *Richard von Mises* zurück. Diesem Zugang werden wir auch die Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nach *Andrei Kolmogorow* gegenüberstellen.

Wir beweisen Sätze und Formeln für die Wahrscheinlichkeit und verwenden diese zum Rechnen von Beispielen. Die wichtigsten Sätze sind der Additionssatz, die Formel für gleichwahrscheinliche Ausfälle, der Multiplikationssatz, die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit und die Formel von Bayes.

1. Zufallsexperiment, Ausfall, Ereignis

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment mit verschiedenen möglichen Ausfällen (Ergebnissen). Beispiele für Zufallsexperimente sind das Werfen eines Würfels oder die Lottoziehung. Die möglichen Ausfälle beim Würfeln sind die Augenzahlen 1 bis 6. Die möglichen Ausfälle des Zufallsexperiments Lottoziehung sind alle 6-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 45\}$. Die möglichen Ausfälle eines Zufallsexperiments fassen wir zu einer Menge zusammen, die üblicherweise mit Ω bezeichnet wird. Wir nennen Ω die Ausfallsmenge oder Ergebnismenge. Beim Zufallsexperiment Würfeln haben wir $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Beim Zufallsexperiment Lottoziehung ist Ω die Menge aller sechselementigen Teilmengen aus der Menge der ersten 45 natürlichen Zahlen.

Der zentrale Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der des Ereignisses. Ereignisse werden üblicherweise in Worten beschrieben. Man spricht zum Beispiel vom Ereignis, eine gerade Zahl zu würfeln. Oft genügt diese Art der Beschreibung. Um die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen berechnen zu können, ist es jedoch manchmal notwendig, in eine Mengensprache überzuwechseln. Ereignisse werden dann als Teilmengen der Ausfallsmenge Ω aufgefasst. Das Ereignis „gerade Zahl würfeln" ist zum Beispiel die Teilmenge $\{2, 4, 6\}$. Das Ereignis „die Lottoziehung ergibt nur Zahlen ≤ 7" ist die Teilmenge $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}, \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}, \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}, \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$ aus der oben beschriebenen Ausfallsmenge Ω für das Zufallsexperiment Lottoziehung. Ein als Menge geschriebenes Ereignis A tritt genau dann ein, wenn das Zufallsexperiment einen Ausfall liefert, der in A liegt.

Wirft man zwei Würfel gleichzeitig, so nimmt man unterscheidbare Würfel (einen roten und einen grünen). Die Ausfälle des Zufallsexperiments sind dann Paare von Augenzahlen, wobei die Augenzahl des roten Würfels an die erste Stelle und die Augenzahl des grünen Würfels an die zweite Stelle geschrieben wird. Diese Vorgangsweise wird später das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten erleichtern. Die Ausfallsmenge Ω ist dann $\{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$. Das Ereignis „Augensumme $= 4$" ist die Teilmenge, die alle Paare (i, j) von Augenzahlen mit $i + j = 4$ enthält, also die Menge $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$. Das Ereignis „Maximum der Augenzahlen ≤ 2" ist die Teilmenge $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Genauso geht man bei mehrmaligem Münzenwerfen vor. Wirft man eine Münze dreimal hintereinander, so sind die Ausfälle Tripel, an deren erster Stelle das Ergebnis des ersten Wurfes, an deren zweiter Stelle das Ergebnis des zweiten Wurfes und an deren dritter Stelle das Ergebnis des dritten Wurfes steht. Nennt man die Seiten der Münze 0 und 1, so erhält man $\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Das Ereignis „keine gleichen Ergebnisse hintereinander" ist die Teilmenge $\{(0,1,0),(1,0,1)\}$.

Zieht man eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang 2 aus der Menge $\{a,b,c,d\}$, dann ist die Ausfallsmenge $\Omega = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$. Zieht man eine geordnete Stichprobe vom Umfang 2 ohne Zurücklegen aus $\{a,b,c,d\}$, dann ist die Ausfallsmenge $\Omega = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c)\}$. Das Ereignis „aufeinanderfolgende Buchstaben ziehen" ist $\{(a,b),(b,c),(c,d)\}$.

Bei fortgeschrittenen Problemstellungen verwendet man häufig die Mengen $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (reelle Zahlenfolgen) oder $\Omega = \mathbb{R}^I$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (reelle Funktionen auf I). Mit diesen Ausfallsmengen kann eine Folge von Zufallsexperimenten mit reellwertigem Ergebnis beziehungsweise ein zeitliches Kontinuum von Zufallsexperimenten (stochastischer Prozess) beschrieben werden.

Ereignisse kann man auch miteinander verknüpfen. Verwendet man die umgangssprachliche Beschreibung, so ist es naheliegend logische Operatoren ($\wedge$,$\vee$,$\neg$) zu verwenden. Arbeitet man mit der Mengenschreibweise, so wird man Mengenoperatoren verwenden. Mit $A \wedge B$ bezeichnet man das Ereignis, dass sowohl A als auch B eintritt. Ist A das Ereignis „gerade Zahl würfeln" und B das Ereignis „eine Zahl ≤ 3 würfeln", dann ist $A \wedge B$ das Ereignis „die Zahl 2 würfeln". In der Mengenschreibweise schreibt man dafür $A \cap B$. Man hat dann $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,2,3\}$ und $A \cap B = \{2\}$. Das Ereignis, sowohl A als auch B tritt ein, wird durch den Durchschnitt richtig dargestellt, da es ja genau die Ausfälle enthalten muss, die sowohl in A als auch in B liegen.

Das Ereignis, A tritt nicht ein, wird mit $\neg A$ bezeichnet. Im obigen Beispiel ist $\neg A$ das Ereignis „ungerade Zahl würfeln". In der Mengenschreibweise entspricht das der Komplementärmenge A', da es ja genau die Ausfälle enthalten muss, die A nicht enthält.

Genauso kann man andere Mengenoperationen interpretieren, siehe folgende Tabelle.

logische Schreibweise	Mengenschreibweise	ist das Ereignis, dass
$A \wedge B$	$A \cap B$	A und B eintreten
$A \vee B$	$A \cup B$	A oder B oder beide eintreten
$\neg A$	$A' = \Omega \setminus A$	A nicht eintritt
$A \wedge \neg B$	$A \setminus B$	A eintritt, aber B nicht
$\neg A \wedge \neg B$	$A' \cap B'$	weder A noch B eintritt

Die leere Menge $\emptyset$ ist das Ereignis, das nie eintritt. Man spricht daher auch vom unmöglichen Ereignis. Die Menge Ω ist das Ereignis, das immer eintritt. Man spricht daher vom sicheren Ereignis.

Zwei Ereignisse A und B heißen unvereinbar, wenn sie nicht gleichzeitig eintreten können. In der Mengensprache bedeutet das, dass die beiden Teilmengen A und B von Ω disjunkt sind, also $A \cap B = \emptyset$ gilt. Sie können ja genau dann nicht gleichzeitig eintreten, wenn es keinen Ausfall gibt, der in beiden Mengen liegt.

Mindestens eines der Ereignisse A oder B tritt ein, wenn jeder mögliche Ausfall entweder in A oder in B liegt. In der Mengensprache bedeutet das $A \cup B = \Omega$. Gilt sowohl $A \cap B = \emptyset$ als auch $A \cup B = \Omega$, dann tritt genau eines der beiden Ereignisse A oder B ein. Man sagt dann, die Ereignisse A und B bilden eine Zerlegung (Partition) von Ω.

2. Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist eine Maßzahl für die Häufigkeit, mit der das Ereignis eintritt. Um den frequentistischen Begriff der Wahrscheinlichkeit zu definieren, gehen wir folgendermaßen vor. Wir wiederholen das Zufallsexperiment (zum Beispiel das Zufallsexperiment Würfeln) k Mal und zählen, wie oft ein Ereignis A (zum Beispiel das Ereignis „gerade Zahl würfeln") eintritt. Diese Anzahl bezeichnen wir mit $N_k(A)$. Der Quotient $\frac{N_k(A)}{k}$ ist dann der Anteil (relative Häufigkeit) der Wiederholungen, bei denen A eintritt. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A definieren wir dann durch

$$P(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_k(A)}{k}$$

Da man ein Zufallsexperiment praktisch nicht unendlich oft wiederholen kann, lässt sich die Existenz dieses Grenzwerts nicht entscheiden. Selbst seine Existenz ohne Kenntnis der Konvergenzgeschwindigkeit ist praktisch bedeutungslos. Trotzdem werden wir seine Existenz annehmen und daraus grundlegende Eigenschaften und Rechenregeln herleiten. Diese Konvergenz wird auch als das *empirische Gesetz der grossen Zahlen* bezeichnet und geht auf *Jacob Bernoulli* zurück.

Satz 8: *Es gilt*
(a) $0 \le P(A) \le 1$ *für alle Ereignisse* A
(b) $P(\emptyset) = 0$ *und* $P(\Omega) = 1$

Beweis: Da $N_k(A)$ die Anzahl der insgesamt k Wiederholungen ist, bei denen A eintritt, folgt $0 \le N_k(A) \le k$ und daraus $0 \le \frac{N_k(A)}{k} \le 1$. Mit k gegen ∞ erhält man (a).
Das Ereignis $\emptyset$ tritt nie ein. Daher gilt $N_k(\emptyset) = 0$, woraus $P(\emptyset) = 0$ folgt. Das Ereignis Ω tritt immer ein. Daher gilt $N_k(\Omega) = k$, woraus $P(\Omega) = 1$ folgt. □

Satz 9 (Additionssatz) *Die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ seien unvereinbar (disjunkt), das heißt keine zwei dieser Ereignisse können gleichzeitig eintreten. Dann gilt*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

wobei wir die Mengenschreibweise verwendet haben. Genauso könnte man statt $\cup$ auch $\vee$ schreiben.

Beweis: Wir wiederholen das Zufallsexperiment k Mal. Die Anzahl der Wiederholungen, bei denen A_1 eintritt, ist $N_k(A_1)$. Die Anzahl der Wiederholungen, bei denen A_2 eintritt, ist $N_k(A_2)$ und so weiter. Daher ist $N_k(A_1) + N_k(A_2) + \dots + N_k(A_n)$ die Anzahl der Wiederholungen, bei denen mindestens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ eintritt. Keine der k Wiederholungen wird mehrfach gezählt, da die Ereignisse ja unvereinbar sind und daher bei jeder Wiederholung höchstens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ eintritt.
Andererseits ist $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ gerade das Ereignis, dass mindestens eines der Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ eintritt. Daraus folgt

$$N_k(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N_k(A_1) + N_k(A_2) + \dots + N_k(A_n)$$

Dividiert man durch k und lässt k gegen ∞ gehen, so folgt das gewünschte Resultat. $\square$

Aus dem Additionssatz erhält man weitere Rechenregeln für die Wahrscheinlichkeit. Wir verwenden dazu wieder die Mengensprache.

Satz 10: *Seien A und B Ereignisse. Dann gilt*
(a) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
(b) $B \subseteq A \;\Rightarrow\; P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
(c) $B \subseteq A \;\Rightarrow\; P(B) \leq P(A)$
(d) $P(A') = 1 - P(A)$
(e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(f) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Beweis: (a): Die Ereignisse $A \setminus B$ und $A \cap B$ sind disjunkt und ihre Vereinigung ist A. Aus dem Additionssatz folgt daher $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ und man erhält (a).
(b): Gilt $B \subseteq A$, dann auch $A \cap B = B$. Aus (a) erhalten wir $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.
(c): Aus (b) erhalten wir $P(A) - P(B) = P(A \setminus B)$. Aus Satz 8 (a) folgt $P(A \setminus B) \geq 0$, womit (c) gezeigt ist.
(d): Die Mengen A und A' sind disjunkt und ihre Vereinigung ist Ω. Der Additionssatz ergibt daher $P(A) + P(A') = P(\Omega)$. Satz 8 (b) besagt, dass $P(\Omega) = 1$ gilt. Daraus erhalten wir $P(A') = 1 - P(A)$ und (d) ist gezeigt.
(e): Die Ereignisse B und $A \setminus B$ sind disjunkt. Ihre Vereinigung ist $A \cup B$. Daher erhalten wir aus dem Additionssatz, dass $P(A \cup B) = P(B) + P(A \setminus B)$ gilt. In (a) wurde $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ gezeigt. Setzt man das ein, so hat man bereits (e).
(f): Da $P(A \cap B) \geq 0$ wegen Satz 8 (a) gilt, folgt (f) aus (e). $\square$

Beim axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Kolmogorow wird zuerst die Menge der zulässigen Ereignisse festgelegt. Das geschieht mittels einer sogenannten *σ-Algebra*.

Definition: Eine σ-Algebra ist eine Teilmenge $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (d.h. einer Menge von Teilmengen von Ω) mit folgenden Eigenschaften:
(a) $\emptyset \in \Sigma, \Omega \in \Sigma$
(b) Aus $A \in \Sigma$ folgt $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$.
(c) Aus $A_k \in \Sigma$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \Sigma$.

Bei endlichen oder abzählbar unendlichen Ausfallsmengen Ω wird üblicherweise $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ gesetzt. Im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ ist dies in der Regel nicht möglich, dann verwendet man für Σ die sogenannte Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Diese Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist die kleinste Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, die alle offenen Intervalle enthält und die Eigenschaften einer σ-Algebra erfüllt. Dann definiert man die Wahrscheinlichkeit durch folgende Axiome.

Definition: Eine Wahrscheinlichkeit (auch Wahrscheinlichkeitsmaß) ordnet jedem Element A einer σ-Algebra eine reelle Zahl $0 \leq P(A) \leq 1$ zu. Es gelten:
(a) $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
(b) Für eine Folge A_k ($k \in \mathbb{N}$) von paarweise disjunkten Mengen aus Σ (d.h. $A_k \cap A_l = \emptyset$ für alle $k \neq l$) gilt die σ-Additivität:

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$$

Hier wird eine stärkere Form des Additionssatzes als Axiom vorausgesetzt, die Aussagen von Satz 10 folgen dann analog. Die Annahme der σ-Additivität ermöglicht die Anwendung der Maß- und Integrationstheorie und liefert insbesondere stärkere Sätze zur Vertauschung von Integral und Grenzübergang einer Funktionenfolge.

Beim maßtheoretischen Zugang können σ-Algebren und Wahrscheinlichkeiten auf Produkträume ausgedehnt werden. Damit können geeignete Ergebnismengen Ω für Folgen von Zufallsexperimenten beziehungsweise stochastische Prozesse definiert werden, sogar bei komplizierten Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zufallsexperimenten (Existenz- oder Ausdehnungssatz von Kolmogorow).

3. Gleichwahrscheinliche Ausfälle (Laplace-Wahrscheinlichkeit)

Bei vielen Zufallsexperimenten haben alle Ausfälle die gleiche Wahrscheinlichkeit. Beispiele dafür sind das Werfen eines fairen Würfels und die Lottoziehung. Beim Werfen von zwei Würfeln und beim mehrmaligen Münzenwerfen haben wir die Ausfallsmenge Ω so gewählt, dass alle Ausfälle gleichwahrscheinlich sind.

Für eine endliche Menge X sei $|X|$ die Anzahl der Elemente von X. Der folgende Satz führt das Berechnen der Wahrscheinlichkeit auf das Abzählen der Elemente von Mengen zurück. Es ist der einzige Satz, der die Mengendarstellung der Ereignisse verlangt.

Satz 11 (Formel für gleichwahrscheinliche Ausfälle) *Ein Zufallsexperiment mit endlicher Ausfallsmenge Ω habe gleichwahrscheinliche Ausfälle. Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann gilt*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Beweis: Sei q die Wahrscheinlichkeit, mit der jeder der Ausfälle eintritt, oder genauer, mit der jede einelementige Teilmenge von Ω eintritt. Sei $k = |A|$ die Anzahl der Elemente der Menge A. Weiters seien $A_1, A_2, \ldots, A_k$ die einelementigen Teilmengen von A. Da diese disjunkt sind und ihre Vereinigung gleich A ist, erhalten wir aus dem Additionssatz, dass $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$ gilt. Da die Ereignisse A_j einelementig sind, gilt $P(A_j) = q$ für $1 \le j \le k$. Es folgt $P(A) = qk = q|A|$. Es ist nur noch q zu bestimmen. Dazu setzen wir $A = \Omega$ und erhalten $P(\Omega) = q|\Omega|$. Nach Satz 8 gilt $P(\Omega) = 1$, sodass $q = \frac{1}{|\Omega|}$ folgt. Damit erhalten wir $P(A) = q|A| = \frac{|A|}{|\Omega|}$, was zu zeigen war. □

Mit Hilfe dieses Satzes und den Formeln aus der Kombinatorik kann man jetzt viele Beispiele rechnen.

Beispiel 14: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu würfeln?

Die Ausfallsmenge beim Würfeln ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Das Ereignis „gerade Augenzahl" ist $A = \{2, 4, 6\}$. Da die Ausfälle gleichwahrscheinlich sind, gilt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$.

Beispiel 15: Es wird mit 2 Würfeln gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
(a) Augensumme 5 zu erhalten?
(b) dass mindestens eine 6 auftritt?

Die Ausfallsmenge ist $\Omega = \{(i, j) : 1 \le i, j \le 6\}$, die Menge aller Paare von Augenzahlen. Sie hat $6^2 = 36$ Elemente. Alle Ausfälle sind gleichwahrscheinlich. Wir wenden Satz 11 an.

(a) Um das Ereignis „Augensumme 5" zu bestimmen, müssen wir alle Paare von Augenzahlen finden, deren Summe 5 ist. Wir erhalten $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$. Das ergibt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36}$.

(b) Wir bestimmen das Ereignis „mindestens eine 6“, indem wir Ω durchsuchen und erhalten $A = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$. Das ergibt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$.

Beispiel 16: Es wird mit 3 Würfeln gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
(a) Augensumme 5 zu erhalten?
(b) dass keine 6 auftritt?
(c) dass genau zwei Mal 6 auftritt?

Die Ausfallsmenge ist $\Omega = \{(i,j,k) : 1 \leq i,j,k \leq 6\}$, die Menge aller Tripel von Augenzahlen. Sie hat $6^3 = 216$ Elemente. Alle Ausfälle sind gleichwahrscheinlich. Wir können Satz 11 anwenden.

(a) Das Ereignis „Augensumme 5“ besteht aus allen Tripeln von Augenzahlen, deren Summe 5 ist. Wir erhalten $A = \{(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)\}$. Das ergibt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{216}$.

(b) Das Ereignis „keine 6“ ist $A = \{(i,j,k) : 1 \leq i,j,k \leq 5\}$, die Menge aller Tripel, die keine 6 enthalten. Wegen $|A| = 5^3 = 125$ folgt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{125}{216}$.

(c) Das Ereignis „zwei Mal 6“ ist die Menge A aller Tripel, die genau zwei 6 enthalten. Man kann die Menge A aufschreiben. Wir wollen aber versuchen, ihre Elemente zu zählen, ohne sie aufzuschreiben. Es gibt $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, die beiden Plätze auszuwählen, auf denen 6 steht. Ist eine Platzaufteilung festgelegt, dann gibt es für die beiden ausgewählten Plätze nur eine Möglichkeit, nämlich 6, und für den dritten Platz gibt es 5 Möglichkeiten, nämlich alle Augenzahlen außer 6. Für jede Platzaufteilung gibt es also $1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$ Möglichkeiten, woraus $|A| = \binom{3}{2} \cdot 5 = 15$ folgt. Wir erhalten $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{216}$.

Beispiel 17: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit sechs Würfeln sechs verschiedene Augenzahlen zu erhalten?

Die Ausfallsmenge Ω ist die Menge aller geordneten Stichproben vom Umfang 6 aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$ mit Zurücklegen. Also gilt $|\Omega| = 6^6$. Das Ereignis „sechs verschiedene Augenzahlen“ ist die Menge A aller geordneten Stichproben vom Umfang 6 ohne Zurücklegen aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$. Daher gilt $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$. Wir erhalten $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6!}{6^6} \approx 0{,}015$.

Bis jetzt haben wir nur Würfelbeispiele gerechnet, diese entsprechen geordneten Stichproben aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6\}$. Wir wollen jetzt ungeordnete Stichproben behandeln, wobei so gezogen wird, dass jede Teilmenge die gleiche Chance hat dranzukommen. Dann sind alle Ausfälle gleichwahrscheinlich und wir können Satz 11 anwenden.

Beispiel 18: Aus einem Kartenspiel mit 20 Karten (5 $\heartsuit$-Karten, 5 $\diamondsuit$-Karten, 5 $\clubsuit$-Karten und 5 $\spadesuit$-Karten) werden 7 Karten ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 2 $\heartsuit$-Karten, 2 $\diamondsuit$-Karten und 3 $\clubsuit$-Karten zu erhalten?

Die Ausfallsmenge Ω ist die Menge aller 7-elementigen Teilmengen aus den 20 Karten. Somit ist $|\Omega| = \binom{20}{7}$. Das gefragte Ereignis ist die Menge A aller 7-elementigen Teilmengen, die 2 $\heartsuit$-Karten, 2 $\diamondsuit$-Karten und 3 $\clubsuit$-Karten enthalten. Da es $\binom{5}{2}$ 2-elementige Teilmengen aus den 5 $\heartsuit$-Karten, $\binom{5}{2}$ 2-elementige Teilmengen aus den 5 $\diamondsuit$-Karten und $\binom{5}{3}$ 3-elementige Teilmengen aus den 5 $\clubsuit$-Karten gibt, erhalten wir $|A| = \binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{3}$. Daraus ergibt sich dann $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{20}{7}} \approx 0{,}013$.

Bemerkung: Man könnte die Wahrscheinlichkeit bestimmter Stichprobenmengen ebenso mit geordneten Stichproben ohne Zurücklegen berechnen. Im vorangehenden Beispiel würde man ein $|\Omega|$ und ein $|A|$ erhalten, das jeweils mit 7! multipliziert ist, die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ wäre dieselbe. Wir werden Stichproben ohne Zurücklegen wenn immer möglich als ungeordnete auffassen, da sich in diesem Fall die Anzahlen leicht mittels Binomialkoeffizienten berechnen lassen.

4. Geometrische Wahrscheinlichkeit

Wieder hat das Zufallsexperiment gleichwahrscheinliche Ausfälle, aber die Ausfallsmenge Ω ist nicht mehr endlich, sondern ein beschränktes Intervall oder eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ (allgemeiner auch $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$). Analog zu Satz 11 verwenden wir wieder die Formel

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{für} \quad A \subseteq \Omega$$

wobei $|X|$ die Länge von X bedeutet, wenn X ein Intervall ist, und $|X|$ die Fläche von X bedeutet, wenn X eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ist (bzw. das n-dimensionale Volumen im $\mathbb{R}^n$). Im Falle einer zusammengesetzten Menge (beispielsweise die Vereinigung mehrerer disjunkter Intervalle in $\mathbb{R}$) verwenden wir den Additionssatz. Wesentlich ist hier die Bedingung $0 < |\Omega| < \infty$.

Wir untersuchen einige Beispiele.

Beispiel 19: Jemand lässt seine mechanische Uhr auslaufen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der große Zeiger zwischen 2 und 4 stehen bleibt?

Die Ausfallsmenge ist $\Omega = [0, 12)$, die Menge aller Punkte, in denen der große Zeiger stehen bleiben kann. Das gefragte Ereignis ist $A = (2, 4)$. Wir erhalten $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{12}$.

Beispiel 20: Zwei Personen treffen folgende Vereinbarung. Jede kommt zufällig zwischen 5 und 6 Uhr und wartet eine Viertelstunde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einander treffen?

Die Ausfallsmenge ist $\Omega = [5, 6] \times [5, 6] = \{(x, y) : 5 \leq x, y \leq 6\}$, wobei x der Zeitpunkt ist, zu dem die erste Person kommt, und y der Zeitpunkt, zu dem die zweite Person kommt. Durch welche Teilmenge A wird das Ereignis „sie treffen einander“ dargestellt? Da jede eine Viertelstunde wartet, treffen sie einander genau dann, wenn ihre Ankunftszeitpunkte x und y höchstens $\frac{1}{4}$ voneinander entfernt sind. Das heißt $A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq \frac{1}{4}\}$. Wegen $|\Omega| = 1$ und $|A| = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$ folgt $P(A) = \frac{7}{16}$.

Beispiel 21: Ein Paar von Zahlen (x, y) wird zufällig im Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ gewählt. Wie groß ist für $0 < t < 1$ die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Produkt $\leq t$ ist?

Die Ausfallsmenge ist $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Das gefragte Ereignis ist $A = \{(x, y) \in \Omega : xy \leq t\}$. Es gilt $|\Omega| = 1$. Die Fläche $|A|$ von A erhält man als Summe der Fläche des Rechtecks $[0, t] \times [0, 1]$ und der Fläche über dem Intervall $[t, 1]$ unter der Funktion $x \mapsto \frac{t}{x}$. Diese Fläche ist $t + \int_t^1 \frac{t}{x}\,\mathrm{d}x = t - t \ln t$. Wir erhalten $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = t - t \ln t$.

5. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wir führen ein Zufallsexperiment durch und interessieren uns dafür, ob das Eintreten eines Ereignisses B ein anderes Ereignis A begünstigt. Dazu wiederholen wir das Zufallsexperiment k Mal, wir berücksichtigen jedoch nur die Wiederholungen, wobei das Ereignis B eintritt. Unter diesen Wiederholungen zählen wir die Häufigkeit des Ereignisses A, das ist die Anzahl der Wiederholungen, sodass A und B eintreten, also $N_k(A \cap B)$ nach der Bezeichnung aus Kapitel 2. Die bedingte relative Häufigkeit des Eintretens von A unter B ist dann $N_k(A \cap B)/N_k(B)$. Wir werden hier immer voraussetzen, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B positiv ist. Dann ist für hinreichend große k die relative Häufigkeit $N_k(B)/k$ positiv und damit auch $N_k(B)$. Lässt man k gegen ∞ gehen, so erhält man wieder eine Wahrscheinlichkeit, diesmal die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B (oder gegeben B), die mit $P(A|B)$ bezeichnet wird. Wir definieren also

$$P(A|B) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_k(A\cap B)}{N_k(B)} = \lim_{k\to\infty} \frac{N_k(A\cap B)/k}{N_k(B)/k} = \frac{\lim_{k\to\infty} N_k(A\cap B)/k}{\lim_{k\to\infty} N_k(B)/k} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)},$$

das Vertauschen von Limes und Quotientenbildung ist aufgrund der Bedingung $P(B) = \lim_{k\to\infty} N_k(B)/k > 0$ zulässig.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ ist eine Maßzahl für die Häufigkeit des Eintretens von A unter jenen Wiederholungen des Zufallsexperiments, bei denen B eintritt.

Bei Verwendung des axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs definiert man für beliebige Ereignisse $A, B \in \Sigma$ mit $P(B) > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit durch die Formel $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Für ein fest gewähltes $B \in \Sigma$ mit $P(B) > 0$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} P(\cdot|B) : \Sigma &\longrightarrow [0,1] \\ A &\mapsto P(A|B) \end{aligned}$$

mit $P(B|B) = P(\Omega|B) = 1$ und $P(\emptyset|B) = 0$ eine Wahrscheinlichkeit. Denn für eine Folge A_k $(k \in \mathbb{N})$ von paarweise disjunkten Mengen aus Σ ist die Folge $A_k \cap B$ $(k \in \mathbb{N})$ wieder paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k=0}^\infty (A_k \cap B) = (\bigcup_{k=0}^\infty A_k) \cap B$. Wir erhalten $P(\bigcup_{k=0}^\infty A_k|B) = P((\bigcup_{k=0}^\infty A_k) \cap B)/P(B) = P(\bigcup_{k=0}^\infty (A_k \cap B))/P(B)$. Dieser Term stimmt nach der σ-Additivität von P überein mit $(\sum_{k=0}^\infty P(A_k \cap B))/P(B) = \sum_{k=0}^\infty P(A_k|B)$. Somit erfüllt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\cdot, B)$ für ein festes Ereignis B ebenfalls das Axiom der σ-Additivität.

Definition: Gilt für zwei Ereignisse A und B die Bedingung $P(A\cap B) = P(A)P(B)$, dann bezeichnet man A und B als unabhängig. Im Fall $P(B) > 0$ ist dies wegen $P(A|B) = P(A\cap B)/P(B)$ äquivalent zu $P(A|B) = P(A)$.

Gilt $P(A|B) > P(A)$, dann sagt man, dass das Ereignis A durch das Eintreten von B begünstigt wird. Gilt $P(A|B) < P(A)$, dann sagt man, dass das Ereignis A durch das Eintreten von B benachteiligt wird.

Bemerkungen: Wenn A und B unabhängige Ereignisse sind, dann trifft das auch auf die Ereignisse A' und B zu. Denn es gilt $A' \cap B = B \setminus (A \cap B)$ und nach Satz 10 (b) folgt $P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A')$.

Ein Ereignis A ist unabhängig von jedem beliebigen Ereignis B dann und nur dann, wenn $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$ gilt. Aus der Unabhängigkeit des Ereignisses A von jedem beliebigen Ereignis B folgt für $B = A$, dass $P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$ und daher $P(A) \in \{0, 1\}$. Wenn $P(A) = 0$ gilt, dann folgt aus $A \cap B \subseteq A$ und Satz 10 die Gleichheit

$0 = P(A) = P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Wenn $P(A) = 1$ gilt, dann folgt $P(A') = 0$ und nach dem vorangeheneden Argument ist A' unabhängig von jedem Ereignis B. Nach der ersten Bemerkung ist auch A unabhängig von jedem beliebigen Ereignis B.

Die Bedingung B kann man als schon vorhandene Information auffassen. Wird nach der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gefragt und setzt man voraus, dass B eingetreten ist, so berechnet man nicht $P(A)$ sondern $P(A|B)$. Bei der Laplace-Wahrscheinlichkeit und der geometrischen Wahrscheinlichkeit ist die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit besonders einfach.

Satz 12: *Sind alle Ausfälle gleichwahrscheinlich, dann gilt* $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. *Dieser Satz gilt auch für die geometrische Wahrscheinlichkeit.*

Beweis: Da die Ausfälle gleichwahrscheinlich sind, haben wir $P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|}$ und $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$. Es folgt $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$. □

Beispiel 22: Es wird zweimal gewürfelt. Man erfährt, dass die Augensumme 7 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal 6 aufgetreten ist.

Die Ausfallsmenge Ω ist die Menge aller Paare von Augenzahlen. Sie hat 36 Elemente. Gefragt ist nach dem Ereignis A, dass mindestens einmal 6 aufgetreten ist. Das Ereignis A wurde in Beispiel 15 bestimmt. Wir haben die Information, dass die Augensumme 7 ist, also dass das Ereignis $B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ eingetreten ist. Zu berechnen ist daher $P(A|B)$. Es gilt $A \cap B = \{(1,6),(6,1)\}$, also $|A \cap B| = 2$, und $|B| = 6$. Aus Satz 12 folgt $P(A|B) = \frac{2}{6}$.

Einer der wichtigsten Sätze über bedingte Wahrscheinlichkeiten ist der sogenannte Multiplikationssatz. Er berechnet die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts von Ereignissen.

Satz 13 (Multiplikationssatz) *Für Ereignisse* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *gilt*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Ereignisse, die als Bedingungen auftreten, Wahrscheinlichkeit > 0 *haben.*

Beweis: Wir haben $P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$, ebenso $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}$ und so fort bis $P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$. Setzt man diese Terme in die rechte Seite der Formel ein, so ergibt sich ein Teleskopprodukt und es bleibt nur die linke Seite übrig. □

Typische Anwendungsbeispiele für den Multiplikationssatz sind geordnete Stichproben. Dazu gehört auch wiederholtes Würfeln und Münzenwerfen.

Beispiel 23: Aus einer Menge von 2 roten und 5 gelben Kugeln zieht man eine geordnete Stichprobe vom Umfang 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote, dann eine gelbe und zuletzt wieder eine rote Kugel zu ziehen?

Sei A_1 das Ereignis „erste Kugel ist rot“, A_2 das Ereignis „zweite Kugel ist gelb“ und A_3 das Ereignis „dritte Kugel ist rot“. Gesucht ist $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Aus dem Multiplikationssatz folgt $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$. Wir müssen also die drei Wahrscheinlichkeiten, deren Produkt auf der rechten Seite steht, berechnen.

Wir berechnen diese Wahrscheinlichkeiten zuerst für den Fall, dass nicht zurückgelegt wird. Da die Menge 2 rote und 5 gelbe Kugeln enthält, folgt $P(A_1) = \frac{2}{7}$.

Wir berechnen $P(A_2|A_1)$. Die Bedingung A_1 besagt, dass beim ersten Zug eine rote Kugel gezogen wurde, die Menge beim zweiten Zug also nur mehr 1 rote und 5 gelbe Kugeln enthält. Daraus ergibt sich $P(A_2|A_1) = \frac{5}{6}$ als bedingte Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Zug eine gelbe Kugel zu ziehen.

Wir berechnen $P(A_3|A_1 \cap A_2)$. Die Bedingung $A_1 \cap A_2$ besagt, dass bei den ersten beiden Zügen eine rote und eine gelbe Kugel gezogen wurden, die Menge beim dritten Zug also nur mehr 1 rote und 4 gelbe Kugeln enthält. Daraus ergibt sich $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{1}{5}$ als bedingte Wahrscheinlichkeit, beim dritten Zug eine rote Kugel zu ziehen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, bei Ziehen ohne Zurücklegen zuerst eine rote, dann eine gelbe und zuletzt wieder eine rote Kugel zu ziehen, ist also $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$.

Jetzt behandeln wir den Fall, dass zurückgelegt wird. Die Menge enthält 2 rote und 5 gelbe Kugeln, daher gilt wieder $P(A_1) = \frac{2}{7}$. Da zurückgelegt wird, wird die Menge durch den ersten Zug nicht verändert. Beim zweiten Mal wird wieder aus derselben Menge gezogen, sodass $P(A_2|A_1) = \frac{5}{7}$ gilt. Dasselbe gilt für den dritten Zug. Auch beim dritten Mal wird aus der ursprünglichen Menge gezogen, sodass $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{7}$ gilt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, bei Ziehen mit Zurücklegen zuerst eine rote, dann eine gelbe und zuletzt wieder eine rote Kugel zu ziehen, ist also $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7}$.

Bei vielen Beispielen tritt der Multiplikationssatz in Kombination mit dem Additionssatz auf. Dabei wird das Ereignis, nach dessen Wahrscheinlichkeit gefragt wird, in unvereinbare Teilereignisse zerlegt. Die Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse berechnet man mit dem Multiplikationssatz und der Additionssatz liefert dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse. Oft wird die Lösung solcher Beispiele in Form eines Baumdiagramms aufgeschrieben, wir verwenden eine Tabellenschreibweise.

Beispiel 24: Aus einer Menge von 2 roten und 5 gelben Kugeln zieht man eine geordnete Stichprobe vom Umfang 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl von gelben Kugeln zu erhalten?

Wir kürzen „rote Kugel“ mit R und „gelbe Kugel“ mit G ab. Das Ereignis „ungerade Anzahl von gelben Kugeln“ tritt genau dann ein, wenn GGG, GRR, RGR oder RRG gezogen wird. Es lässt sich in diese vier unvereinbaren Teilereignisse zerlegen.

Wir behandeln zuerst den Fall, dass ohne Zurücklegen gezogen wird. In Beispiel 23 wurde $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}$ als Wahrscheinlichkeit für das Ereignis RGR gefunden. Genauso findet man die Wahrscheinlichkeiten der anderen Teilereignisse. Wir stellen das in folgender Tabelle dar:

Teilereignis	Wahrscheinlichkeit nach dem Multiplikationssatz
GGG	$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{60}{210}$
GRR	$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{10}{210}$
RGR	$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{10}{210}$
RRG	$\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{10}{210}$
Summe (nach dem Additionssatz)	$= \frac{90}{210}$

Da die Teilereignisse unvereinbar sind, erhält man die Wahrscheinlichkeit des gefragten Ereignisses mit dem Additionssatz durch Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten der

Teilereignisse. Das wurde bereits in der Tabelle durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl von gelben Kugeln zu erhalten, ist $\frac{90}{210}$, wenn nicht zurückgelegt wird. Zieht man die Stichprobe mit Zurücklegen, dann kann man genauso vorgehen.

Teilereignis	Wahrscheinlichkeit nach dem Multiplikationssatz
GGG	$\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{125}{343}$
GRR	$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{20}{343}$
RGR	$\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{20}{343}$
RRG	$\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{343}$
Summe (nach dem Additionssatz)	$= \frac{185}{343}$

Die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl von gelben Kugeln zu erhalten, ist $\frac{185}{343}$, wenn zurückgelegt wird.

Beispiel 25: Eine unfaire Münze, bei der Wappen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ auftritt, wird fünf Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau dreimal Wappen auftritt?

Wir kürzen „Wappen“ mit W und „Zahl“ mit Z ab. Genau dreimal Wappen tritt auf, wenn das fünfmalige Werfen eine der Folgen WWWZZ, WWZWZ, WWZZW, WZWWZ, WZWZW, WZZWW, ZWWWZ, ZWWZW, ZWZWW, ZZWWW ergibt. Das sind die zehn unvereinbaren Ereignisse, in die sich das Ereignis „genau dreimal Wappen“ zerlegen lässt. Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten führen wir in folgender Tabelle durch:

Teilereignis	Wahrscheinlichkeit nach dem Multiplikationssatz
WWWZZ	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{243}$
WWZWZ	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{243}$
WWZZW	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$
WZWWZ	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{243}$
WZWZW	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$
WZZWW	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$
ZWWWZ	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{243}$
ZWWZW	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$
ZWZWW	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$
ZZWWW	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$
Summe (nach dem Additionssatz)	$= \frac{40}{243}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal Wappen auftritt, ist also $\frac{40}{243}$.

Beispiel 26: Aus einer Menge von 3 roten, 2 gelben und 2 schwarzen Kugeln ziehen wir solange ohne Zurücklegen, bis eine schwarze Kugel gezogen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auch zumindest eine gelbe Kugel zu ziehen?

Das Ereignis, zumindest eine gelbe Kugel vor der ersten schwarzen Kugel zu ziehen, zerfällt in die Teilereignisse, die jeweils den Zugfolgen mit den Anfangssequenzen G, RG, RRG und RRRG entsprechen. Diese Teilereignisse sind unvereinbar, da die erste gelbe Kugel in verschiedenen Ziehungen auftritt, und es tritt sicher eine schwarze Kugel auf.

Teilereignis	Wahrscheinlichkeit nach dem Multiplikationssatz
G	$\frac{2}{7} = \frac{60}{210}$
RG	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{30}{210}$
RRG	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{210}$
RRRG	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{210}$
Summe (nach dem Additionssatz)	$= \frac{105}{210}$

Die Wahrscheinlichkeit, zumindest eine gelbe Kugel vor der ersten schwarzen Kugel zu ziehen, ist somit $\frac{105}{210} = \frac{1}{2}$.

Beispiel 27: Anna und Barbara haben beide die gleiche Schachtel mit vier weißen und einer schwarzen Kugel. Jede zieht zufällig aus ihrer Schachtel ohne Zurücklegen und zwar zuerst einmal Anna, dann zweimal Barbara, dann zweimal Anna, dann zweimal Barbara, und immer so weiter. Wer zuerst eine schwarze Kugel zieht gewinnt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Barbara gewinnt.

Die Zugfolgen, die zu einem Sieg von Barbara führen, sind $\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{S}$, $\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WS}$, $\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WW}\tilde{\mathrm{W}}\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{S}$ und $\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WW}\tilde{\mathrm{W}}\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WS}$, wobei ˜ bedeutet, dass Anna zieht. Sonst zieht Barbara. Die Wahrscheinlichkeit, dass Anna $\tilde{\mathrm{W}}\tilde{\mathrm{W}}\tilde{\mathrm{W}}$ zieht, ist $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Barbara WWS zieht, ist $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit für die Zugfolge $\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WW}\tilde{\mathrm{W}}\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{S}$ ist somit $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$. Die vollständige Rechnung findet man in folgender Tabelle.

Teilereignis	Wahrscheinlichkeit nach dem Multiplikationssatz
$\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{S}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{25}$
$\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WS}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{25}$
$\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WW}\tilde{\mathrm{W}}\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{S}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{25}$
$\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WW}\tilde{\mathrm{W}}\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{WS}$	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{25}$
Summe (nach dem Additionssatz)	$= \frac{12}{25}$

Barbara gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{12}{25}$.

Bemerkung: Mit dem Multiplikationssatz kann man auch Wahrscheinlichkeiten für Stichproben des Umfangs k aus einer Menge von n Elementen bestimmen. Die Wahrscheinlichkeit der geordneten Stichprobe $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ohne Zurücklegen ist nach dem Multiplikationssatz $\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \cdots \frac{1}{n-k+1}$, da man in jeder Ziehung die gleiche Wahrscheinlichkeit aller verbliebenen Elemente annnimmt. Das gilt für jede Anordnung der Elemente $\{x_1, \ldots, x_k\}$, daher erhält man nach dem Additionssatz den Ausdruck $\frac{k!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$ für die Wahrscheinlichkeit einer ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen. Diese Werte stimmen mit der Annahme der gleichwahrscheinlichen Ausfälle unter den gesamten Stichproben überein.

6. Totale Wahrscheinlichkeit

Manches Mal sind für ein Ereignis A bedingte Wahrscheinlichkeiten vorgegeben und man soll daraus die (totale) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bestimmen. Wir leiten die dafür notwendigen Formeln her. Dazu benötigen wir folgende Definition.

Definition: Man sagt, die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bilden eine Zerlegung der Ausfallsmenge Ω, wenn sie paarweise disjunkt sind und wenn $\bigcup_{j=1}^n B_j = \Omega$ gilt.

Man kann das auch so ausdrücken: Die Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ bilden eine Zerlegung der Ausfallsmenge Ω, wenn jeder Ausfall in genau einer dieser Mengen liegt. Das aber bedeutet, dass genau eines der Ereignisse $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eintritt.

Satz 14: *Es liege eine Zerlegung $B_1, B_2, \ldots, B_n$ der Ausfallsmenge Ω vor. Seien weiters $A, B \subseteq \Omega$ zwei Ereignisse. Dann gilt*
(a) $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$
(b) $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$
Man nennt (a) *die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit und* (b) *die Formel von Bayes. Die Existenz aller bedingten Wahrscheinlichkeiten wird in beiden Formeln vorausgesetzt.*

Beweis: Wir zeigen (a). Es gilt $\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j) = \sum_{j=1}^n P(A \cap B_j)$ nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Da die Ereignisse B_j disjunkt sind, sind es auch die Ereignisse $A \cap B_j$ und es folgt $\sum_{j=1}^n P(A \cap B_j) = P(\bigcup_{j=1}^n (A \cap B_j))$ aus dem Additionssatz. Wegen $\bigcup_{j=1}^n B_j = \Omega$ erhalten wir $\bigcup_{j=1}^n (A \cap B_j) = A \cap \bigcup_{j=1}^n B_j = A \cap \Omega = A$ und (a) ist bewiesen.
Es gilt $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ und $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Daraus folgt (b) sofort. □

Bemerkung: Im axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff wird der Begriff der Zerlegung durch eine Folge von paarweise disjunkten Ereignissen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ mit $\bigcup_{j=1}^\infty B_j = \Omega$ definiert. Durch die σ-Additivität gilt der Satz 14 (a) in der allgemeineren Form $P(A) = \sum_{j=1}^\infty P(A|B_j)P(B_j)$.

Wir rechnen einige typische Beispiele zu diesen Formeln.

Beispiel 28: Eine Versicherung teilt die Autofahrer in zwei Typen ein, in Risikofahrer und in Sicherheitsfahrer. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sicherheitsfahrer in einem Jahr einen Unfall hat, ist 0,06. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Risikofahrer in einem Jahr einen Unfall hat, ist 0,6. Die Versicherung weiß aus Erfahrung, dass $\frac{5}{6}$ der Autofahrer Sicherheitsfahrer und $\frac{1}{6}$ der Autofahrer Risikofahrer sind. Ein Autofahrer schließt eine Versicherung ab (man sieht ihm natürlich nicht an, von welchem Typ er ist). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nächstes Jahr einen Unfall haben wird?

Sei B_1 das Ereignis, dass der Autofahrer ein Sicherheitsfahrer ist, und B_2 das Ereignis, dass der Autofahrer ein Risikofahrer ist. Es tritt genau eines dieser beiden Ereignisse ein. Die Ereignisse B_1 und B_2 bilden eine Zerlegung.

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass der Autofahrer innerhalb des nächsten Jahres einen Unfall hat. Wenn der Autofahrer ein Sicherheitsfahrer ist, dann ist diese Wahrscheinlichkeit 0,06, das heißt $P(A|B_1) = 0{,}06$. Wenn der Autofahrer ein Risikofahrer ist, dann ist diese Wahrscheinlichkeit 0,6, das heißt $P(A|B_2) = 0{,}6$. Jetzt können wir in die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit einsetzen und erhalten

$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 0{,}06 \cdot \frac{5}{6} + 0{,}6 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}15.$
Die Wahrscheinlichkeit für einen Unfall im nächsten Jahr beträgt also 0,15.

Beispiel 29: Seit sich der Autofahrer aus dem letzten Beispiel versichern ließ, ist ein Jahr vergangen. Es hat sich herausgestellt, dass er einen Unfall hatte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer ein Risikofahrer ist?

Wonach wird hier gefragt? Wir haben die Information, dass der Autofahrer einen Unfall hatte. Gefragt ist daher die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass er ein Risikofahrer ist. Verwendet man die Bezeichnung aus dem letzten Beispiel, dann ist das die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B_2|A)$.

Die Formel von Bayes besagt $P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}$. Aus dem letzten Beispiel wissen wir $P(A|B_2)P(B_2) = 0{,}6 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}1$ und $P(A) = 0{,}15$. Wir erhalten $P(B_2|A) = \frac{0{,}1}{0{,}15} = \frac{2}{3}$. Nach diesem Unfall ist der Autofahrer verdächtig, ein Risikofahrer zu sein.

Beispiel 30: Eine Firma stellt Computerchips her, wobei der Ausschussanteil 30 % beträgt. Damit diese nicht in den Verkauf gehen, findet eine Kontrolle statt, bei der ein defekter Computerchip mit Wahrscheinlichkeit 0,97 als solcher erkannt und ausgeschieden wird, bei der aber auch ein intakter Computerchip mit Wahrscheinlichkeit 0,05 irrtümlich ausgeschieden wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computerchip, der in den Verkauf geht, intakt ist?

Sei B_1 das Ereignis, dass ein Computerchip intakt ist, und B_2 das Ereignis, dass ein Computerchip defekt ist. Dann gilt $P(B_1) = \frac{7}{10}$ und $P(B_2) = \frac{3}{10}$. Die Ereignisse B_1 und B_2 bilden eine Zerlegung. Es tritt ja genau eines ein. Sei A das Ereignis, dass ein Computerchip durch die Kontrolle geht, sodass $P(B_1|A)$ die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist. Aus der Angabe erhalten wir $P(A|B_1) = 0{,}95$. Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein intakter Computerchip durch die Kontrolle geht. Weiters erhalten wir $P(A|B_2) = 0{,}03$. Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein defekter Computerchip durch die Kontrolle geht. Wir müssen zuerst $P(A)$ mit Hilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit berechnen: $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 0{,}95 \cdot \frac{7}{10} + 0{,}03 \cdot \frac{3}{10} = 0{,}674$. Jetzt ergibt sich $P(B_1|A) = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}7}{0{,}674} = 0{,}987$ aus der Formel von Bayes.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computerchip, der in den Verkauf geht, auch intakt ist, beträgt 0,987.

Beispiel 31: Morsezeichen Punkt und Strich werden im Verhältnis 3:4 gesendet. Durch Übertragungsfehler wird Punkt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ zu Strich und Strich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ zu Punkt. Der Empfänger registriert Punkt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde Punkt gesendet?

Sei B_1 das Ereignis, dass Punkt gesendet wurde, und B_2 das Ereignis, dass Strich gesendet wurde. Die Ereignisse B_1 und B_2 bilden dann eine Zerlegung, da genau eines eintritt. Aus der Angabe entnehmen wir $P(B_1) = \frac{3}{7}$ und $P(B_2) = \frac{4}{7}$. Sei A das Ereignis, dass der Empfänger Punkt registriert. Dann folgt $P(A|B_1) = \frac{8}{9}$ und $P(A|B_2) = \frac{1}{8}$ aus der Angabe. Gefragt ist nach der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(B_1|A)$. Bevor wir die Formel von Bayes anwenden, berechnen wir $P(A)$ nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit: $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{19}{42}$. Die Formel von Bayes ergibt jetzt $P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{42}{19} = \frac{16}{19}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass auch Punkt gesendet wurde, wenn der Empfänger Punkt registriert, ist also $\frac{16}{19}$.

III. Zufallsvariable

Oft hat man es mit Zufallsexperimenten zu tun, deren Ausfälle Messwerte oder Anzahlen sind, jedenfalls reelle Zahlen. Das ermöglicht es, den Ausfall des Zufallsexperiments mit einer Variablen zu bezeichnen und mit diesen Variablen zu rechnen.

1. Darstellung von Ereignissen durch Zufallsvariable

Um das Ereignis „höchstens k defekte Glühlampen in der Stichprobe“ einfach aufschreiben zu können, bezeichnet man die Anzahl der defekten Glühlampen in der Stichprobe mit X. Das Ereignis lässt sich dann einfach durch $X \leq k$ ausdrücken. Diese Variablen, die man zur Beschreibung von Ereignissen verwendet, heißen Zufallsvariable. Sie beschreiben immer Ausfälle eines Zufallsexperiments, das heißt für jede reelle Zahl t definiert $X \leq t$ ein Ereignis. Für Zufallsvariable werden üblicherweise Großbuchstaben $X, Y, Z, \ldots$ verwendet. Formal gesehen ist eine Zufallsvariable X eine reellwertige Funktion auf einer Menge Ω (d.h. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$), wobei Ω mit einer Wahrscheinlichkeit P versehen ist und für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ die Menge

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$$

ein Ereignis ist. Daher ist für jedes Intervall I die Wahrscheinlichkeit

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}) = P(X \in I)$$

definiert, insbesondere ist für jede reelle Zahl t die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq t)$ definiert. Im axiomatischen Zugang nach Kolmogorow ist die Menge $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ immer ein Element der σ-Algebra Σ, derartige Funktionen X werden auch als *messbare Funktionen* bezeichnet. Wenn man beispielsweise mit 2 Würfeln würfelt, dann kann die Augensumme als reellwertige Funktion auf der Ausfallsmenge $\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$ angesehen werden. Mit geeigneten Mengen Ω (Produkträumen) können auch Folgen von Zufallsvariablen konstruiert werden.

Mit Zufallsvariablen kann man auch rechnen. Es gilt zum Beispiel

$$3X + 5 \leq 11 \Leftrightarrow 3X \leq 6 \Leftrightarrow X \leq 2$$

Die durch diese drei Ungleichungen dargestellten Ereignisse sind gleich, daher gilt

$$P(3X + 5 \leq 11) = P(3X \leq 6) = P(X \leq 2)$$

An diesem Beispiel sieht man, wie man Ereignisse umformen kann.

Die Darstellung der Ereignisse in der umgangssprachlichen Beschreibung wird in eine mathematische Darstellung mit Hilfe von Zufallsvariablen übersetzt. Um die so dargestellten Ereignisse miteinander zu verknüpfen, verwenden wir die logischen Zeichen. Der Additionssatz und die daraus folgenden Rechenregeln aus Satz 10 gelten natürlich weiterhin, da sie ja nicht davon abhängen, wie man Ereignisse darstellt. So gilt zum Beispiel

$$X \leq 3 \Leftrightarrow X \leq 2 \ \vee \ X \in (2, 3]$$

wobei die Ereignisse $X \leq 2$ und $X \in (2, 3]$ unvereinbar sind. Aus dem Additionssatz folgt

$$P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X \in (2, 3])$$

beziehungsweise $P(X \in (2, 3]) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2)$.

Ebenso ist $X \leq 3$ das Gegenereignis zu $X > 3$. Aus Satz 10 (d) folgt daher

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

Im Folgenden werden wir solche Umformungen häufig verwenden.

2. Wahrscheinlichkeitsvektoren und Wahrscheinlichkeitsdichten

Wir haben gesehen, wie man Ereignisse mit Hilfe von Zufallsvariablen darstellen kann und wie man die so dargestellten Ereignisse umformt. Jetzt geht es um die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse. Dazu unterscheiden wir diskrete und kontinuierliche Zufallsvariable. Bei diskreten Zufallsvariablen liegen die möglichen Werte, also die Ausfälle des Zufallsexperiments, in einer endlichen oder abzählbaren Menge, während sie bei einer kontinuierlichen Zufallsvariable ein (oft unbeschränktes) Intervall ausfüllen.

Definition: Sei S eine endliche oder abzählbare Menge (meistens eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$). Ein Vektor $(w(i))_{i\in S}$ heißt Wahrscheinlichkeitsvektor, wenn $w(i) \geq 0$ für alle $i \in S$ und $\sum_{i\in S} w(i) = 1$ gilt. Eine Zufallsvariable X heißt diskret, wenn ein Wahrscheinlichkeitsvektor $(w(i))_{i\in S}$ existiert mit $w(i) = P(X = i)$ für alle $i \in S$.

Beispiel 32: Die Zufallsvariable X bezeichne den Ausfall eines Würfels. Man bestimme den Wahrscheinlichkeitsvektor von X.

Sei $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es gilt $w(i) = P(X = i) = \frac{1}{6}$ für alle $i \in S$, da ja jede Augenzahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftritt. Man prüft $\sum_{i=1}^{6} w(i) = 1$ nach.

Kennt man den Wahrscheinlichkeitsvektor einer Zufallsvariablen, so kann man damit Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen berechnen.

Satz 15: *Sei $(w(i))_{i\in S}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor einer diskreten Zufallsvariable X. Für jede Teilmenge B von S gilt dann $P(X \in B) = \sum_{i\in B} w(i)$.*

Beweis: Sei zuerst $B = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, eine endliche Teilmenge von S. Es gilt dann $X \in B \Leftrightarrow X = i_1 \vee X = i_2 \vee \dots \vee X = i_k$. Da die rechtsstehenden Ereignisse unvereinbar sind, folgt $P(X \in B) = P(X = i_1) + \dots + P(X = i_k) = w(i_1) + \dots + w(i_k) = \sum_{i\in B} w(i)$ mit Hilfe des Additionssatzes.

Ist S eine endliche Menge, dann sind wir schon fertig. Sei S also abzählbar und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\sum_{i\in S} w(i) = 1$ existiert eine endliche Teilmenge U von S mit $\sum_{i\in U} w(i) > 1-\varepsilon$, da ja die Partialsummen gegen 1 konvergieren. Es folgt $\sum_{i\in S\setminus U} w(i) = 1 - \sum_{i\in U} w(i) < \varepsilon$. Da U endlich ist, erhalten wir $P(X \in U) = \sum_{i\in U} w(i) > 1 - \varepsilon$ aus dem ersten Teil des Beweises und damit $P(X \in S \setminus U) \leq P(X \in U') = 1 - P(X \in U) < \varepsilon$.

Ist B jetzt eine beliebige Teilmenge von S, dann sei $C = B \cap U$ und $D = B \setminus U$. Da B die disjunkte Vereinigung von C und D ist, haben wir $\sum_{i\in B} w(i) = \sum_{i\in C} w(i) + \sum_{i\in D} w(i)$ und $P(X \in B) = P(X \in C) + P(X \in D)$ ergibt sich aus dem Additionssatz. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt $P(X \in C) = \sum_{i\in C} w(i)$, da C endlich ist. Wegen $D \subseteq S \setminus U$ erhalten wir $P(X \in D) \leq P(X \in S \setminus U) < \varepsilon$ und $\sum_{i\in D} w(i) \leq \sum_{i\in S\setminus U} w(i) < \varepsilon$. Es folgt damit $|P(X \in B) - \sum_{i\in B} w(i)| = |P(X \in C) + P(X \in D) - \sum_{i\in C} w(i) - \sum_{i\in D} w(i))| = |P(X \in D) - \sum_{i\in D} w(i)| < 2\varepsilon$. Da ε beliebig war, ist $P(X \in B) = \sum_{i\in B} w(i)$ gezeigt. $\square$

Bemerkungen: Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit dem Wahrscheinlichkeitsvektor $(w(i))_{i\in S}$, dann folgt $P(X \in S) = \sum_{i\in S} w(i) = 1$ aus Satz 15. Es gilt dann auch $P(X \notin S) = 1 - P(X \in S) = 0$. Man nennt daher S den Wertebereich der Zufallsvariable X.

Aus dem Satz folgt weiters, dass bei einer diskreten Zufallsvariable die endliche Additivität bereits die σ-Additivität der Wahrscheinlichkeit impliziert. Für eine Folge A_k ($k \in \mathbb{N}$) von disjunkten Ereignissen mit $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ gilt $P(A) = \sum_{i\in A} w(i)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt weiters $P(A_k) = \sum_{i\in A_k} w(i)$ und die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i\in A_k} w(i)$ ist wegen $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ eine Umordnung der Summe $\sum_{i\in A} w(i)$. Aus Satz A1 folgt nun $P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k)$.

Definition: Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ definiert durch

$$F(t) = P(X \leq t)$$

heißt Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

Wir definieren den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen X. Der Erwartungswert ist ein Durchschnittswert aller möglichen Werte von X, wobei jedoch jeder Wert i mit seiner Wahrscheinlichkeit $w(i)$ gewichtet wird. Jeder Wert i geht in den Erwartungswert gemäß der Häufigkeit seines Auftretens ein.

Definition: Der Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X mit Wertebereich $S \subsetneq \mathbb{R}$ und Wahrscheinlichkeitsvektor $(w(i))_{i\in S}$ ist definiert durch

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i\in S} i\, w(i),$$

wobei die Reihe $\sum_{i\in S} i\, w(i)$ absolut konvergent sein muss (d.h. die Summe $\sum_{i\in S} |i\, w(i)| = \sum_{i\in S} |i|\, w(i)$ ist endlich). Durch die absolute Konvergenz ist die Reihensumme unabhängig von der Reihenfolge der Summation.

Wie stark eine Zufallsvariable X um ihren Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ schwankt, wird durch die Varianz gemessen.

Definition: Die Varianz $\mathrm{V}(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X mit Wertebereich $S \subsetneq \mathbb{R}$ und Wahrscheinlichkeitsvektor $(w(i))_{i\in S}$ ist definiert durch

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i\in S} (i-m)^2\, w(i),$$

wobei $m = \mathrm{E}(X)$ ist und die Reihe (absolut) konvergieren muss. Die Quadratwurzel $\sqrt{\mathrm{V}(X)}$ heißt Standardabweichung der Zufallsvariablen X und ist ein sogenanntes Streuungsmaß.

Bemerkung: Wenn für eine diskrete Zufallsvariable X mit Wahrscheinlichkeitsvektor $(w(i))_{i\in S}$ die Reihe $\sum_{i\in S} i^2\, w(i)$ gegen einen endlichen Limes konvergiert, dann existiert aufgrund der Ungleichung $|i| \leq 1 + i^2$ auch der Erwartungswert $m = E(X)$. Wegen $(i-m)^2 = i^2 - 2im + m^2$ konvergiert nun auch die Reihe $\sum_{i\in S} (i-m)^2\, w(i)$ gegen einen endlichen Limes, daher besitzt die Zufallsvariable X eine Varianz. Es gilt auch die Umkehrung, denn eine Zufallsvariable mit Varianz besitzt per definitionem einen Erwartungswert m und die Reihe $\sum_{i\in S} i^2\, w(i)$ konvergiert wegen $i^2 = (i-m)^2 + 2im - m^2$.

Um Erwartungswert und Varianz zu berechnen, bestimmt man den Wahrscheinlichkeitsvektor und setzt in die Formeln ein.

Beispiel 33: Bei einer Verlosung bringen 1% der Lose einen Gewinn von 1000 Euro, 9% der Lose bringen einen Gewinn von 100 Euro und 90% der Lose bringen keinen Gewinn. Welchen Gewinn muss man durchschnittlich pro Los auszahlen? Wie hoch soll man den Lospreis festsetzen?

Sei X der Gewinn eines (zufällig gewählten) Loses. Wir berechnen $\mathrm{E}(X)$. Die möglichen Gewinne, also die möglichen Werte von X sind 1000, 100 und 0 mit Wahrscheinlichkeiten $w(1000) = 0{,}01$, $w(100) = 0{,}09$ und $w(0) = 0{,}9$. Aus der Formel für den Erwartungswert erhalten wir $\mathrm{E}(X) = 1000 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}09 + 0 \cdot 0{,}9 = 19$. Jedenfalls sollte man den Lospreis höher als 19 Euro festsetzen.

Wir berechnen die Varianz des Gewinns: $\mathrm{V}(X) = 981^2 \cdot 0{,}01 + 81^2 \cdot 0{,}09 + (-19)^2 \cdot 0{,}9 = 10539$. Die Standardabweichung ist $\sqrt{\mathrm{V}(X)} = 102{,}66$.

Jetzt behandeln wir die sogenannten kontinuierlichen Zufallsvariablen. Man kann sie als kontinuierliches Analogon zu den diskreten Zufallsvariablen auffassen, wobei Summen durch Integrale ersetzt werden.

Definition: Eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte. Eine reellwertige Zufallsvariable X heißt kontinuierlich, wenn eine Wahrscheinlichkeitsdichte f existiert, sodass

$$P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte kann man daher auch als Ableitung der Verteilungsfunktion auffassen.

Satz 16: *Die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariablen X ist eine monoton wachsende Funktion von $\mathbb{R}$ nach $[0,1]$. Für $r < s$ gilt $P(r < X \leq s) = F(s) - F(r)$.*

Beweis: Es gilt $X \leq s \Leftrightarrow X \leq r \;\vee\; r < X \leq s$, wobei die Ereignisse $X \leq r$ und $r < X \leq s$ unvereinbar sind. Daher folgt $P(X \leq s) = P(X \leq r) + P(r < X \leq s)$ aus dem Additionssatz. Wir erhalten

$$P(r < X \leq s) = P(X \leq s) - P(X \leq r) = F(s) - F(r)$$

mit Hilfe der Definition der Verteilungsfunktion.
Sind r und s in $\mathbb{R}$ beliebig mit $r < s$, dann gilt $F(s) - F(r) = P(r < X \leq s) \geq 0$ nach Satz 8. Somit ist F monoton wachsend. Ebenfalls aus Satz 8 folgt $0 \leq P(X \leq t) \leq 1$, sodass $F(t) \in [0,1]$ gilt. $\square$

Wahrscheinlichkeiten für kontinuierliche Zufallsvariablen lassen sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte berechnen.

Satz 17: *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ die Wahrscheinlichkeitsdichte einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X und $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ ihre Verteilungsfunktion. Dann gilt*
(a) $P(X \in B) = F(s) - F(r) = \int_r^s f(x)\,\mathrm{d}x$ *für ein Intervall B mit Endpunkten r und s*
(b) $P(X < s) = P(X \leq s) = F(s) = \int_{-\infty}^s f(x)\,\mathrm{d}x$ *für $s \in \mathbb{R}$*
(c) $P(X > r) = P(X \geq r) = 1 - F(r) = \int_r^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *für $r \in \mathbb{R}$*

Beweis: In Satz 16 wurde $P(X \in B) = F(s) - F(r)$ für $B = (r,s]$ gezeigt. Aus der Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte folgt

$$F(s) - F(r) = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{r}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x$$

womit (a) für $B = (r,s]$ bereits bewiesen ist.
Wir zeigen, dass $P(X = u) = 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$ gilt. Wenn das Ereignis $X = u$ eintritt, dann tritt für jedes $\varepsilon > 0$ auch das Ereignis $X \in (u-\varepsilon, u]$ ein. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $P(X = u) \leq P(X \in (u-\varepsilon, u])$ nach Satz 10 (c) und $P(X \in (u-\varepsilon,u]) = \int_{u-\varepsilon}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x$ wurde oben bewiesen. Da f eine integrierbare Funktion ist, gilt nach Satz A3 $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{u-\varepsilon}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Daraus ergibt sich $\lim_{\varepsilon\to 0} P(X \in (u-\varepsilon, u]) = 0$. Also muss auch $P(X = u) = 0$ gelten. Die Wahrscheinlichkeit $P(X \in B)$ ändert sich also nicht, wenn man einen Endpunkt des Intervalls B dazugibt oder weglässt (Additionssatz). Sind r und s die Endpunkte von B, dann gilt $P(X \in B) = P(X \in (r,s])$ und (a) ist gezeigt.

Aus den Definitionen folgt $P(X \leq s) = F(s) = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x$. Da $P(X = s) = 0$ gilt, ergibt sich $P(X < s) = P(X < s) + P(X = s) = P(X \leq s)$ und (b) ist gezeigt.

Um (c) zu beweisen, gehen wir zum Gegenereignis über und verwenden (b). Mit Satz 10 (d) folgt $P(X > r) = 1 - P(X \leq r) = 1 - F(r)$. Mit Hilfe von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ erhält man

$$P(X > r) = 1 - P(X \leq r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{r}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Da $P(X = r) = 0$ gilt, folgt $P(X \geq r) = P(X > r)$ und (c) ist gezeigt. □

Bemerkung: Oft kommt es vor, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte f einer Zufallsvariablen X außerhalb eines (meist unbeschränkten) Intervalls W gleich 0 ist. Aus Satz 17 folgt $P(X \in W) = \int_W f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, sodass X mit Wahrscheinlichkeit 1, also immer, in W liegt. Wir nennen daher W den Wertebereich der Zufallsvariablen X.

Satz 18: *Sei X eine diskrete oder kontinuierliche reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Dann gilt*

(a) $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ *und* $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$

(b) $P(X < s) = \lim_{t\to s-} F(t)$ *und* $P(X = s) = F(s) - \lim_{t\to s-} F(t)$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$

(c) $F(s) = \lim_{t\to s+} F(t)$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$ *(d.h. F ist rechtsseitig stetig)*

Für eine kontinuierliche Zufallsvariable X folgt mit Satz 17 (b) die Stetigkeit der Verteilungsfunktion F.

Beweis: Sei zuerst X diskret mit Wertebereich S und Wahrscheinlichkeitsvektor $(w(i))_{i\in S}$. Für eine streng monoton wachsende Folge reeller Zahlen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = s$, wobei $s \in \mathbb{R}$ oder $s = \infty$, setzen wir $A_0 = S \cap (-\infty, t_0]$ und $A_k = S \cap (t_{k-1}, t_k]$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Die Ereignisse $X \in A_k$ für $k = 0, \dots, n$ sind unvereinbar und es gilt $S \cap (-\infty, t_n] = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$, daher $\bigcup_{k\geq 0} A_k = S \cap (-\infty, s)$. Aus Satz 9 folgt

$$P(X \leq t_n) = F(t_n) = P(X \in A_0) + P(X \in A_1) + \dots + P(X \in A_n)$$

und nach Satz 15 gilt $F(t_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i\in A_k} w(i)$. Weiters gilt nach Satz 15

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i\in A_k} w(i) = P\left(X \in S \cap (-\infty, s)\right),$$

denn der Limes entspricht der Reihensumme $\sum_{i\in S\cap(-\infty,s)} w(i)$ bezüglich einer Anordnung der $i \in S \cap (-\infty, s)$. Daher gilt $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = P(X < s)$, aus der Monotonie von F folgt für $s = \infty$ die Aussage $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ bzw. für $s \in \mathbb{R}$ folgt (b).

Sei nun $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge mit $\lim_{n\to\infty} t_n = s$, wobei $s \in \mathbb{R}$ oder $s = -\infty$. Wir setzen nun $B_0 = S \cap (t_0, \infty)$ und $B_k = S \cap (t_k, t_{k-1}]$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wieder sind die Ereignisse $X \in B_k$ für $k = 0, \dots, n$ unvereinbar und es gilt $S \cap (t_n, \infty) = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$, daher $\bigcup_{k\geq 0} B_k = S \cap (s, \infty)$. Mit dem Additionssatz folgt wieder $P(X \leq t_n) = F(t_n) = 1 - P(X > t_n) = 1 - P(X \in B_0) - P(X \in B_1) - \dots - P(X \in B_n)$ und nach Satz 15 gilt $F(t_n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i\in B_k} w(i)$. Analog erhalten wir $P(X > s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i\in B_k} w(i)$, daher gilt $\lim_{n\to\infty} P(X > t_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i\in B_k} w(i) = P(X > s)$ bzw. $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = P(X \leq s)$. Aus der Monotonie von F folgt für $s = -\infty$ die Aussage $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ bzw. für $s \in \mathbb{R}$ folgt (c).

Bei einer kontinuierlichen Zufallsvariable X folgen die Limiten in (a) aus Satz 17 und der Konvergenz der Integrale. Die Aussage in (b) folgt aus $P(X < s) - P(X \leq t) = \int_t^s f(x)\,\mathrm{d}x$ und der Konvergenz dieses Integrals gegen 0 im Limes $t \to s-$ nach Satz A3. Der Beweis von (c) folgt analog. □

Bemerkung: Unter der Voraussetzung der Axiome nach Kolmogorow kann Satz 18 für beliebige Zufallsvariablen analog dem diskreten Fall bewiesen werden, dabei wird im Beweis $S = \mathbb{R}$ gesetzt und die Reihensumme direkt mit σ-Additivität ermittelt.

Will man die Wahrscheinlichkeitsdichte f einer Zufallsvariablen X berechnen, so berechnet man zuerst die Verteilungsfunktion $F(t) = P(X \leq t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Man erhält dann die Wahrscheinlichkeitsdichte f als Ableitung von F.

Beispiel 34: Zwei Punkte a und b werden zufällig im Intervall $[0,1]$ gewählt. Sei X das Minimum der beiden Punkte. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte f von X.

Für $t \in \mathbb{R}$ berechnen wir $F(t) = P(X \leq t)$. Wir verwenden dazu die geometrische Wahrscheinlichkeit. Die Ausfallsmenge unseres Zufallsexperiments ist $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Das Ereignis $X \leq t$ entspricht der Teilmenge $A = \{(a,b) \in \Omega : \min(a,b) \leq t\}$ von Ω. Für $t < 0$ ist $A = \emptyset$ und somit $|A| = 0$. Für $t \geq 1$ ist $A = \Omega$ und somit $|A| = 1$. Für $0 \leq t < 1$ ist $A = \Omega \setminus (t,1] \times (t,1]$ und somit $|A| = 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2$. Wir erhalten $F(t) = 0$ für $t < 0$, $F(t) = 2t - t^2$ für $0 \leq t < 1$ und $F(t) = 1$ für $t \geq 1$. Wegen $f(x) = F'(x)$ folgt $f(x) = 0$ für $x \notin [0,1]$ und $f(x) = 2 - 2x$ für $x \in [0,1]$. Der Wertebereich von X ist das Intervall $[0,1]$.

Bemerkung: Im Beispiel 34 ist die Verteilungsfunktion $F(t)$ im Punkt $t = 0$ nicht differenzierbar, jedoch definiert die angegebene Wahrscheinlichkeitsdichte die geforderte Verteilungsfunktion. Wie man den Funktionswert von f im Punkt 0 wählt, hat keinen Einfluss auf die mit Hilfe von f berechneten Wahrscheinlichkeiten, da diese ja Integrale über f sind.

Erwartungswert und Varianz für kontinuierliche Zufallsvariable werden analog wie für diskrete Zufallsvariable definiert. Die Summe wird durch das Integral ersetzt und der Wahrscheinlichkeitsvektor durch die Wahrscheinlichkeitsdichte.

Definition: Der Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X mit Wahrscheinlichkeitsdichte f ist definiert durch

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Die Varianz $\mathrm{V}(X)$ ist definiert durch

$$\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)\, \mathrm{d}x$$

mit $m = \mathrm{E}(X)$. Wir setzen immer eine Konvergenz des uneigentlichen Integrals gegen einen endlichen Limes voraus. Wieder nennt man $\sqrt{\mathrm{V}(X)}$ die Standardabweichung der Zufallsvariablen X.

Auch eine kontinuierliche Zufallsvariable besitzt nicht notwendigerweise einen Erwartungswert beziehungsweise eine Varianz. Analog dem Fall einer diskreten Zufallsvariable folgt auch hier aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x$ wegen $|x| \leq 1 + x^2$ und $(x-m)^2 = x^2 - 2xm + m^2$ die Existenz von $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{V}(X)$.

Beispiel 35: Die Wahrscheinlichkeitsdichte f der Zufallsvariablen X sei gegeben durch $f(x) = \frac{1}{b-a}$ für $x \in [a,b]$ und $f(x) = 0$ für $x \notin [a,b]$. Gesucht sind $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{V}(X)$.

Der Wertebereich der Zufallsvariablen X ist das Intervall $[a,b]$. Da f außerhalb von $[a,b]$

verschwindet, genügt es, von a bis b zu integrieren. Wir erhalten

$$\mathrm{E}(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$
$$\mathrm{V}(X) = \int_a^b \big(x - \frac{a+b}{2}\big)^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3-(a-b)^3}{24}\frac{1}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

In den folgenden Kapiteln werden häufig auftretende Wahrscheinlichkeitsvektoren und Wahrscheinlichkeitsdichten behandelt. Man verwendet die Bezeichnung Verteilung als gemeinsamen Überbegriff. Wird nach der Verteilung gefragt, so meint man für diskrete Zufallsvariable den Wahrscheinlichkeitsvektor und für kontinuierliche Zufallsvariable die Wahrscheinlichkeitsdichte oder die Verteilungsfunktion.

3. Binomialverteilung und geometrische Verteilung

Diese beiden Verteilungen treten bei wiederholtem Münzenwerfen auf. Die Binomialverteilung erhält man, wenn man zählt, wie oft „Wappen“ fällt.

Definition: Sei $n \geq 1$ und $p \in (0,1)$. Eine diskrete Zufallsvariable X mit Wertebereich $S = \{0,1,2,\dots,n\}$ und Wahrscheinlichkeitsvektor

$$w(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{für} \quad i \in S$$

heißt binomialverteilt mit Parametern n und p oder kurz $B(n,p)$-verteilt. Es gilt $w(i) \geq 0$ für alle $i \in S$ und $\sum_{i\in S} w(i) = \big(p + (1-p)\big)^n = 1$ folgt aus dem binomischen Lehrsatz.

Satz 19: *Eine Münze, bei der „Wappen“ mit Wahrscheinlichkeit p und „Zahl“ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ fällt, wird n Mal geworfen. Sei X die Anzahl mit der „Wappen“ unter diesen n Würfen auftritt. Dann hat X die $B(n,p)$-Verteilung.*

Beweis: Sei $S = \{0,1,2,\dots,n\}$. Wir müssen $P(X=i)$ für $i \in S$ berechnen. Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit, dass unter den n Würfen genau i Mal „Wappen“ auftritt. Wir zerlegen in unvereinbare Teilereignisse, diese entsprechen gerade den Folgen der Länge n, die i Mal W und $n-i$ Mal Z enthalten. Nach Satz 4 ist die Anzahl dieser Teilereignisse gleich $\binom{n}{i}$.
Berechnet man die Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse nach dem Multiplikationssatz, so erhält man $p^i(1-p)^{n-i}$ für jedes dieser Teilereignisse. Nach dem Additionssatz erhält man als Summe der Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X=i) = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$. Die Zufallsvariable X ist somit $B(n,p)$-verteilt. □

Bemerkung: Bei der Anwendung des Multiplikationssatzes im vorangehenden Beweis wurde bei jedem Münzenwurf vorausgesetzt, dass sein Ausfall unabhängig vom kombinierten Ergebnis aller vorangehenden Würfe ist und damit seine Wahrscheinlichkeit gleich seiner bedingten Wahrscheinlichkeit ist. Auf dieses Problem werden wir bei der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen noch formaler eingehen.

Ein Zufallsexperiment heißt Bernoulliexperiment, wenn es nur zwei mögliche Ausfälle hat. Den einen der beiden Ausfälle nennen wir Erfolg, den anderen nennen wir Misserfolg. Ein Bernoulliexperiment entspricht daher dem Münzenwerfen, wobei wir „Wappen“ als Erfolg und „Zahl“ als Misserfolg auffassen. Sei p die Wahrscheinlichkeit für Erfolg, das heißt für das Auftreten von „Wappen“. Führt man das Bernoulliexperiment n Mal unabhängig durch und zählt, wie oft Erfolg eintritt, dann ist diese Anzahl $B(n,p)$-verteilt.

Beispiel 36: Es wird 10 Mal gewürfelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt höchstens 3 Mal die Augenzahl 6 auf?

Es liegt ein Bernoulliexperiment vor, wobei wir Augenzahl 6 als Erfolg auffassen und alle anderen Augenzahlen als Misserfolg. Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg ist $\frac{1}{6}$. Sei X die Anzahl, mit der Erfolg, das heißt die Augenzahl 6, unter den 10 Würfen auftritt. Nach Satz 19 hat X die $B(n,p)$-Verteilung mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$, das heißt der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariable X ist durch $w(i) = \binom{10}{i}(\frac{1}{6})^i(\frac{5}{6})^{10-i}$ mit $0 \leq i \leq 10$ gegeben. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $X \leq 3$ eintritt. Aus Satz 15 folgt $P(X \leq 3) = w(0) + w(1) + w(2) + w(3)$. Wir erhalten also $P(X \leq 3) = \binom{10}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{10} + \binom{10}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^9 + \binom{10}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^8 + \binom{10}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7 = 0{,}9303$.

Beispiel 37: In einer Pension gibt es 16 Einzelzimmer. Man weiß, dass im Durchschnitt 20% der bestellten Zimmer nicht belegt werden. Der Pensionsinhaber nimmt für die Ferienwoche 18 Buchungen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt eine Überbelegung ein?

Es liegt ein Bernoulliexperiment vor. Unter Erfolg verstehen wir, dass die gebuchte Person kommt. Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg ist $p = \frac{4}{5}$. Es werden 18 Buchungen entgegengenommen, das heißt das Bernoulliexperiment wird 18 Mal durchgeführt. Sei X die Anzahl der Erfolge, das ist die Anzahl der Personen, die kommen. Nach Satz 19 hat X die $B(n,p)$-Verteilung mit $n = 18$ und $p = \frac{4}{5}$. Es gibt Schwierigkeiten, wenn mehr als 16 kommen, also wenn $X \geq 17$ ist. Nach Satz 15 ist die Wahrscheinlichkeit dafür $P(X \geq 17) = w(17) + w(18) = \binom{18}{17}(\frac{4}{5})^{17}(\frac{1}{5})^1 + \binom{18}{18}(\frac{4}{5})^{18}(\frac{1}{5})^0 = 0{,}0991$.

Beispiel 38: Eine Maschine produziert Schrauben. Der Anteil der unbrauchbaren Schrauben beträgt 10%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung von 100 Schrauben mehr als 7 unbrauchbare Schrauben sind?

Die Produktion einer Schraube ist ein Bernoulliexperiment. Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg (brauchbare Schraube) ist $p = 0{,}9$. Sei X die Anzahl der brauchbaren Schrauben in der Packung von 100 Stück. Nach Satz 19 hat X die $B(n,p)$-Verteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}9$. Gesucht ist $P(X \leq 92)$. Wir gehen zur Gegenwahrscheinlichkeit über: $P(X \geq 93) = \sum_{i=93}^{100} w(i) = \sum_{i=93}^{100} \binom{100}{i} 0{,}9^i 0{,}1^{100-i}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $1 - P(X \geq 93)$. Wir werden später sehen, wie man diese Wahrscheinlichkeit durch Approximation mit der Normalverteilung näherungsweise berechnen kann.

Wir berechnen den Erwartungswert einer $B(n,p)$-verteilten Zufallsvariable X. Aus der Definition $\mathrm{E}(X) = \sum_{i \in S} i\, w(i) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} && \text{da der Summand für } i = 0 \text{ null ist} \\
&= \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} && \text{da } i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1} \text{ für } i \geq 1 \\
&= np \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} && \text{neue Summationsvariable } j = i - 1 \\
&= np\big(p + (1-p)\big)^{n-1} = np && \text{binomischer Lehrsatz}
\end{aligned}
$$

Für eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X gilt also $\mathrm{E}(X) = np$. Der Erwartungswert gibt den durchschnittlichen Wert einer Zufallsvariable an. Der Pensionsinhaber aus Beispiel 37 kann also erwarten, dass durchschnittlich $18 \cdot 0{,}8 = 14{,}4$ der 18 Personen, die gebucht haben, kommen. In einer Packung Schrauben aus Beispiel 38 wird man durchschnittlich $100 \cdot 0{,}9 = 90$ brauchbare Schrauben finden.

Mit den selben Methoden wie den Erwartungswert kann man auch die Varianz $\mathrm{V}(X)$ einer $B(n,p)$-verteilten Zufallsvariablen X berechnen:

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \sum_{i=0}^{n}(i-np)^2\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n}\big(i(i-1)+(1-2np)i+n^2p^2\big)\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} + (1-2np)\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} + \\ &\quad + n^2p^2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\end{aligned}$$

Aus dem binomischen Lehrsatz folgt, dass $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = 1$ gilt. Weiters wurde die Summe $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = np$ oben bei der Berechnung des Erwartungswertes bestimmt. In der Summe $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$ sind die Summanden für $i = 0, 1$ gleich null und für $i \geq 2$ gilt $i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)\binom{n-2}{i-2}$. Es folgt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} = n(n-1)\sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2}p^i(1-p)^{n-i} = \\ &= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{n-2-j} = n(n-1)p^2\big(p+(1-p)\big)^{n-2} = n(n-1)p^2\end{aligned}$$

und für $n = 1$ sind beide Seiten gleich 0. Wir erhalten somit für eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X:

$$\mathrm{V}(X) = n(n-1)p^2 + (1-2np)np + n^2p^2 = np(1-p)$$

Wir führen noch eine weitere Verteilung ein, die mit Bernoulliexperimenten zu tun hat. Jetzt geht es um die Wartezeit auf den ersten Erfolg.

Definition: Sei $p \in (0,1)$. Eine diskrete Zufallsvariable X mit Wertebereich $S = \{1,2,3,\ldots\}$ und Wahrscheinlichkeitsvektor

$$w(i) = (1-p)^{i-1}p \quad \text{für} \quad i \in S$$

heißt geometrisch verteilt mit Parameter p oder kurz $G(p)$-verteilt. Es gilt $w(i) \geq 0$ für alle $i \in S$ und $\sum_{i\in S} w(i) = 1$ folgt aus der Formel für die geometrische Reihe.

Satz 20: *Ein Bernoulliexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit für Erfolg gleich p ist, wird so oft durchgeführt, bis der erste Erfolg auftritt. Sei X die Anzahl der dafür notwendigen Wiederholungen. Dann hat X die $G(p)$-Verteilung.*

Beweis: Sei $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $i \in S$. Das Ereignis $X = i$ tritt genau dann ein, wenn die ersten $i-1$ Wiederholungen des Bernoulliexperiments Misserfolg und die i-te Wiederholung Erfolg ergibt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $(1-p)^{i-1}p$ nach dem Multiplikationssatz, da Misserfolg ja mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ und Erfolg mit Wahrscheinlichkeit p auftritt. Wir haben $P(X=i) = (1-p)^{i-1}p$ für $i \in S$ gezeigt, das heißt X ist $G(p)$-verteilt. $\square$

Beispiel 39: Man würfelt so lange, bis 6 kommt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens 10 Mal würfeln muss?

Es liegt ein Bernoulliexperiment vor, wobei Augenzahl 6 Erfolg bedeutet und alle anderen Augenzahlen Misserfolg. Die Wahrscheinlichkeit für Erfolg ist $\frac{1}{6}$. Sei X die Anzahl der Würfe, die man benötigt, bis zum ersten Mal 6 auftritt. Gesucht ist $P(X \leq 10)$. Nach Satz 20 hat X die $G(p)$-Verteilung mit $p = \frac{1}{6}$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten wir $P(X \leq 10) = \sum_{i=1}^{10} (\frac{5}{6})^{i-1}\frac{1}{6} = 1 - (\frac{5}{6})^{10} = 0{,}8385$.

Beispiel 40: Anna und Barbara würfeln, und zwar zuerst einmal Anna, dann zweimal Barbara, dann zweimal Anna, dann zweimal Barbara, und immer so weiter. Wer zuerst 6 würfelt, gewinnt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Barbara gewinnt.

Sei X die Anzahl der Würfe, bis zum ersten Mal 6 auftritt. Nach Satz 20 hat X die $G(p)$-Verteilung mit $p = \frac{1}{6}$. Der Wahrscheinlichkeitsvektor von X ist $w(i) = (\frac{5}{6})^{i-1}\frac{1}{6}$ mit $i \geq 1$. Barbara gewinnt, wenn X einen Wert aus der Menge $M = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, \dots\}$ annimmt. Es gilt $P(X \in M) = w(2) + w(3) + w(6) + w(7) + w(10) + w(11) + \cdots = (\frac{5}{6}\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2\frac{1}{6})(1 + (\frac{5}{6})^4 + (\frac{5}{6})^8 + \dots) = \frac{55}{6^3}\frac{1}{1-(\frac{5}{6})^4} = \frac{330}{6^4-5^4} = \frac{330}{671}$. Barbara gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{330}{671} = 0{,}4918$.

Den Erwartungswert einer $G(p)$-verteilten Zufallsvariablen X berechnen wir mit folgendem Trick. Wir gehen von der geometrischen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} - 1$ aus und differenzieren diese Potenzreihe innerhalb des Konvergenzintervalls $(-1, 1)$ gliedweise. Es folgt $\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ und daraus ergibt sich

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i\, w(i) = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Beispiel 41: Wie oft muss man durchschnittlich würfeln, bis die Augenzahl 6 kommt?

Die Anzahl X der Würfe, die man benötigt, bis 6 kommt, ist $G(p)$-verteilt mit $p = \frac{1}{6}$. Die durchschnittliche Anzahl ist daher $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} = 6$.

4. Die hypergeometrische Verteilung

Aus einer Menge von N Kugeln, von denen M weiß und $N - M$ schwarz sind, wird eine Stichprobe vom Umfang n gezogen. Sei X die Anzahl der weißen Kugeln in der Stichprobe. Zieht man geordnet mit Zurücklegen, dann hat X die $B(n, p)$-Verteilung mit $p = \frac{M}{N}$, da sich der Anteil p der weißen Kugeln nicht ändert. Es liegt ein Bernoulliexperiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p vor. Zieht man jedoch ungeordnet ohne Zurücklegen, dann gilt

$$P(X=i) = \frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}},$$

da $\binom{N}{n}$ die Anzahl aller n-elementigen Teilmengen ist und $\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}$ die Anzahl der Teilmengen, die i weiße und $n - i$ schwarze Kugeln enthalten. Es sei daran erinnert, dass $\binom{u}{v} = 0$ gilt für $v < 0$ und $v > u$.

Wir führen dazu eine Verteilung ein, diese Verteilung nähert sich bei kleinem Stichprobenumfang n (im Vergleich zu N) der Binomialverteilung $B(n, p)$ mit $p = M/N$ an. Nach einer gängigen Regel kann bei $n/N < 0{,}05$ durch $B(n, M/N)$ approximiert werden.

Definition: Seien N und M in $\mathbb{N}$ mit $0 < M < N$ und sei $1 \le n \le N$. Eine diskrete Zufallsvariable X mit Wertebereich $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ und Wahrscheinlichkeitsvektor

$$w(i) = \frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für} \quad i \in S$$

heißt hypergeometrisch verteilt mit Parametern N, M und n oder $H(N, M, n)$-verteilt. Es gilt $w(i) \ge 0$ für $i \in S$ und $\sum_{i\in S} w(i) = 1$ folgt aus der Gleichung $\sum_{i=0}^{n} \binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i} = \binom{N}{n}$ in Satz 5.

Wir berechnen Erwartungswert und Varianz einer $H(N, M, n)$-verteilten Zufallsvariable X. Das funktioniert ähnlich wie für eine $B(n, p)$-verteilte Zufallsvariable, es gelten hier immer $N \ge 2$ und $M, n \ge 1$.

$$\begin{aligned}
\binom{N}{n} \mathrm{E}(X) &= \sum_{i=0}^{n} i \binom{M}{i} \binom{N-M}{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \binom{M}{i} \binom{N-M}{n-i} && \text{da der Summand für } i = 0 \text{ null ist} \\
&= \sum_{i=1}^{n} M \binom{M-1}{i-1} \binom{N-1-(M-1)}{n-1-(i-1)} && \text{da } i\binom{M}{i} = M\binom{M-1}{i-1} \text{ für } i \ge 1 \\
&= M \sum_{j=0}^{n-1} \binom{M-1}{j} \binom{N-1-(M-1)}{n-1-j} && \text{neue Summationsvariable } \ j = i-1 \\
&= M \binom{N-1}{n-1} && \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{M-1}{j}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-j} = \binom{N-1}{n-1}
\end{aligned}$$

Wegen $\binom{N}{n} = \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}$ erhalten wir $\mathrm{E}(X) = n\frac{M}{N}$.

Auch die Berechnung der Varianz erfolgt ähnlich wie für die $B(n, p)$-Verteilung. Für $n = 1$ berechnen wir $\binom{N}{1}\mathrm{V}(X) = \sum_{i=0}^{1}(i-\frac{M}{N})^2\binom{M}{i}\binom{N-M}{1-i} = (\frac{M}{N})^2(N-M)+(1-\frac{M}{N})^2 M = \frac{M^2}{N} + M - 2\frac{M^2}{N} = \frac{MN-M^2}{N}$, daher gilt $\mathrm{V}(X) = \frac{M}{N}\frac{N-M}{N}$ für eine $H(N, M, 1)$-verteilte Zufallsvariable X, übereinstimmend mit der $B(1, M/N)$-Verteilung. Für $n \ge 2$ gilt
$\binom{N}{n}\mathrm{V}(X) = \sum_{i=0}^{n}(i - n\frac{M}{N})^2\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\big(i(i-1) + (1-2n\frac{M}{N})i + (n\frac{M}{N})^2\big)\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}$
In $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}$ sind wieder die Summanden für $i = 0, 1$ gleich 0 und für $i \ge 2$ gilt $i(i-1)\binom{M}{i} = M(M-1)\binom{M-2}{i-2}$. Für $M \ge 2$ folgt $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i} = M(M-1)\sum_{i=2}^{n}\binom{M-2}{i-2}\binom{N-M}{n-i} = M(M-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{M-2}{j}\binom{N-2-(M-2)}{n-2-j} = M(M-1)\binom{N-2}{n-2}$, für $N = 2$ oder $M = 1$ sind beide Seiten gleich 0. Mit $\sum_{i=0}^{n} i\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i} = M\binom{N-1}{n-1}$ und $\sum_{i=0}^{n}\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i} = \binom{N}{n}$ erhalten wir

$$\binom{N}{n}\mathrm{V}(X) = M(M-1)\binom{N-2}{n-2} + (1-2n\frac{M}{N})M\binom{N-1}{n-1} + (n\frac{M}{N})^2\binom{N}{n}$$

und wegen $\binom{N}{n} = \frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1} = \frac{N(N-1)}{n(n-1)}\binom{N-2}{n-2}$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= M(M-1)\tfrac{n(n-1)}{N(N-1)} + (1-2n\tfrac{M}{N})\tfrac{nM}{N} + (n\tfrac{M}{N})^2 = (\tfrac{(M-1)(n-1)}{N-1} + \tfrac{N-nM}{N})n\tfrac{M}{N} = \\
&= \tfrac{MNn-MN-Nn+N+N^2-MNn-N+Mn}{N(N-1)}n\tfrac{M}{N} = n\tfrac{M}{N}\tfrac{N-M}{N}\tfrac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt jedoch auch im Fall $n = 1$ die korrekte Formel.

5. Poissonverteilung

Es soll noch eine weitere diskrete Verteilung besprochen werden, die wir durch einen Grenzübergang aus der Binomialverteilung erhalten.

Definition: Sei $\lambda > 0$. Eine diskrete Zufallsvariable X mit Wertebereich $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ und Wahrscheinlichkeitsvektor

$$w(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \quad \text{für} \quad i \in S$$

heißt Poissonverteilt mit Parameter λ oder kurz $P(\lambda)$-verteilt. Es gilt $w(i) \geq 0$ für alle $i \in S$ und $\sum_{i=0}^{\infty} w(i) = 1$ folgt aus $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{\lambda}$.

Satz 21: *Für eine feste reelle Zahl $\lambda > 0$ und alle $n > \lambda$ sei X_n eine $B(n, \frac{\lambda}{n})$-verteilte Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsvektor $w_n(i)$, wobei wir $w_n(i) = 0$ für $i > n$ setzen. Für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ konvergiert $w_n(i)$ im Limes $n \to \infty$ gegen den Wert des Wahrscheinlichkeitsvektors $w(i)$ der $P(\lambda)$-Verteilung.*

Beweis: Wir berechnen $w_n(i) = P(X_n = i)$ für $n > i$ und formen um

$$w_n(i) = \binom{n}{i} \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-i} = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} \left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right)^{-i}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$ und $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-i} = 1$ erhalten wir $\lim_{n\to\infty} w_n(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = w(i)$. □

Eine Faustregel besagt, dass bei $p < 0{,}05$ und $n > 10$ die $B(n,p)$-Verteilung durch die $P(np)$-Verteilung approximiert werden kann.

Wir entwickeln zur Poissonverteilung folgendes Modell: Bei einem Callcenter treffen zu zufälligen Zeitpunkten Telefonanrufe ein. Wir legen einen Zeitpunkt als Nullpunkt fest und bezeichnen die Anzahl der Anrufe im Zeitintervall $[0, t]$ mit X. Um den Wahrscheinlichkeitsvektor von X zu berechnen, müssen wir einige Annahmen zugrundelegen. Sei $z > t$ und n die Anzahl der Personen, die im Zeitintervall $[0, z]$ anrufen. Wir nehmen an, dass jede Person unabhängig von den anderen zufällig einen Zeitpunkt in $[0, z]$ auswählt, zu dem sie anruft. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Anrufer im Zeitintervall $[0, t]$ anruft, ist dann $\frac{t}{z}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass er im Zeitintervall $(t, z]$ anruft, ist $\frac{z-t}{z} = 1 - \frac{t}{z}$. Es liegt für jeden der n Anrufer ein Bernoulliexperiment vor. Ein Erfolg (eine bestimmte Person ruft im Zeitintervall $[0, t]$ an) tritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{t}{z}$ auf. Jeder der n Anrufe entspricht einer unabhängigen Wiederholung des Bernoulliexperiments. Da X die Anzahl der Anrufe im Zeitintervall $[0, t]$ ist, also die Anzahl der Erfolge, hat X die $B(n, \frac{t}{z})$-Verteilung. Wir halten $\mu = \frac{n}{z}$, die durchschnittliche Anzahl der Anrufe pro Zeiteinheit, fest und lassen n und damit auch $z = \frac{n}{\mu}$ gegen ∞ gehen. Wegen $\frac{t}{z} = \frac{t\mu}{n}$ erhalten wir nach Satz 21 den Wahrscheinlichkeitsvektor von X als $w(i) = \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t}$ für $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Daher ist die Anzahl X der im Zeitintervall $[0, t]$ eintreffenden Anrufe Poissonverteilt mit Parameter μt.

Wir berechnen noch Erwartungswert und Varianz einer $P(\lambda)$-verteilten Zufallsvariable X. Es gilt $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, w(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda$. Für die Varianz erhalten wir

$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (i-\lambda)^2\, w(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (i(i-1) + (1-2\lambda)i + \lambda^2) \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda^2 + \lambda(1-2\lambda) + \lambda^2 = \lambda$,

denn es gilt $\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+2}}{j!} = \lambda^2 e^{\lambda}$.

Beispiel 42: Die Anzahl der Anrufe in einem Zeitintervall von t Stunden habe die $P(\mu t)$-Verteilung mit $\mu = 12$ Anrufen pro Stunde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 16:00 und 16:15 höchstens ein Anruf kommt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 16:00 und 16:15 mindestens drei Anrufe eintreffen?

Sei X die Anzahl der Anrufe zwischen 16:00 und 16:15, das heißt X ist $P(\lambda)$-verteilt mit $\lambda = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$. Daher gilt $\mathrm{E}(X) = 3$ und

$P(X \leq 1) = w(0) + w(1) = \frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} = 4e^{-3} = 0{,}199$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - w(0) - w(1) - w(2) = 1 - (\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!})e^{-3} = 0{,}5768$

Mit Wahrscheinlichkeit 0,199 kommt höchstens ein Anruf. Mit Wahrscheinlichkeit 0,577 kommen mindestens drei Anrufe.

Die Poissonverteilung wird immer dann verwendet, wenn ein Verhalten vorliegt, wie es oben für die Telefonanrufe beschrieben wurde. Das gilt für die Personen, die ein Geschäft betreten, für die Defekte eines Gerätes, das immer wieder repariert wird, und für die Schadensmeldungen, die bei einer Versicherung eintreffen.

Eine weitere Anwendung der Poissonverteilung besteht in der zufälligen Verteilung von Punkten in einem euklidischen Raum beliebiger Dimension. Dabei wird eine durchschnittliche Dichte μ der Punkte pro Flächeneinheit (Raumeinheit) festgelegt. Nun sei eine beliebige endliche Fläche (endlicher Raumbereich) A mit dem Flächeninhalt (Rauminhalt) $|A|$ vorgegeben, dann ist die Zufallsvariable X der Anzahl von Punkten in A nach $P(\mu\,|A|)$-verteilt. Man bezeichnet dies auch als Poisson-Punktprozess. Das Modell wird ganz analog mit der geometrischen Wahrscheinlichkeit und der Binomialverteilung entwickelt.

6. Exponentialverteilung und Gammaverteilung

Jetzt wenden wir uns den kontinuierlichen Zufallsvariablen zu. Wir bleiben bei den Telefonanrufen, fragen jetzt aber nicht nach der Anzahl, sondern nach der Wartezeit auf einen Anruf. Das ist natürlich eine kontinuierliche Größe.

Definition: Sei $\lambda > 0$. Eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$ und Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

heißt exponentialverteilt mit Parameter λ oder kurz $E(\lambda)$-verteilt. Für $x \in \mathbb{R}^-$ setzt man $f(x) = 0$. Es gilt $f(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Satz 22: *Die Anzahl der Anrufe im Zeitintervall $[0,t]$ sei $P(\lambda t)$-verteilt, wobei λ die durchschnittliche Anzahl der Anrufe pro Zeiteinheit ist (letztes Kapitel). Sei Y die Wartezeit vom Zeitpunkt 0 bis zum ersten Anruf. Dann hat Y die $E(\lambda)$-Verteilung.*

Beweis: Sei $t > 0$ beliebig und X die Anzahl der Anrufe im Zeitintervall $[0,t]$. Die Wartezeit auf den ersten Anruf ist genau dann $\leq t$, wenn im Zeitintervall $[0,t]$ mindestens ein Anruf kommt. Das heißt $Y \leq t$ tritt genau dann ein, wenn $X \geq 1$ eintritt. Daher gilt $F(t) = P(Y \leq t) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$. Die Dichte f von Y erhält man als Ableitung von F. Es folgt $f(x) = (1 - e^{-\lambda x})' = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Die Wartezeit Y kann nicht negativ sein. Für $t \leq 0$ gilt daher $F(t) = P(Y \leq t) = 0$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$. Der Wertebereich der Zufallsvariablen Y ist gleich $\mathbb{R}_0^+$. Die Wartezeit Y auf den ersten Anruf ist also $E(\lambda)$-verteilt. $\square$

Eine weitere Anwendung der Exponentialverteilung ist die Lebensdauer eines Gerätes. Sie ist ja die Wartezeit auf den ersten Defekt. Allerdings muss man dabei voraussetzen, dass Defekte rein zufällig auftreten, genauso wie wir es für die Telefonanrufe angenommen haben.

Beispiel 43: Die Lebensdauer eines elektronischen Bauteiles sei $E(\lambda)$-verteilt. Man weiß aus Erfahrung, dass die Lebensdauer mit Wahrscheinlichkeit 0,9 mindestens 500 Stunden beträgt. Wie groß ist λ?

Die Lebensdauer des elektronischen Bauteiles bezeichnen wir mit Y. Die Wahrscheinlichkeit, dass Y größer oder gleich 500 ist, ist 0,9, das heißt $P(Y \geq 500) = 0{,}9$. Wegen Satz 17 (c) gilt $P(Y \geq 500) = \int_{500}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{-500\lambda}$, da Y ja $E(\lambda)$-verteilt ist. Aus $e^{-500\lambda} = 0{,}9$ folgt $\lambda = \frac{-\ln 0{,}9}{500} = 0{,}0002$.

Wir berechnen Erwartungswert und Varianz einer $E(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen X. Setzt man die Wahrscheinlichkeitsdichte der Exponentialverteilung in die Formel für den Erwartungswert ein, so erhält man durch partielle Integration
$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-\lambda x}\big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$.
Ebenso erhält man durch zweimalige partielle Integration
$\mathrm{V}(X) = \int_0^{\infty}(x-\frac{1}{\lambda})^2\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = -(x-\frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x}\big|_0^{\infty} - 2(x-\frac{1}{\lambda})\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}$.
Wir haben also $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ und $\mathrm{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ erhalten. Die durchschnittliche Lebensdauer des elektronischen Bauteils aus Beispiel 43 beträgt $\frac{500}{-\ln 0{,}9} = 4745{,}6$ Stunden.

Jetzt kehren wir zurück zum Callcenter. Um die Wartezeit auf den n-ten Anruf zu berechnen, führen wir eine weitere Verteilung ein.

Definition: Seien $r > 0$ und $\lambda > 0$. Eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ und Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

heißt gammaverteilt (Erlangverteilt) mit Parametern r und λ, oder kurz $E(r,\lambda)$-verteilt, wobei $\Gamma(r)$ definiert ist durch $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} y^{r-1}e^{-y}\,\mathrm{d}y$. Es gilt $f(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^+$ und $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ folgt aus der Definition von $\Gamma(r)$. Für $x \in \mathbb{R}_0^-$ setzt man $f(x) = 0$.

Für spezielle Werte von r kann man $\Gamma(r)$ explizit berechnen. Für $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$ und für $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ gilt $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}$.

Die $E(1,\lambda)$-Verteilung ist die $E(\lambda)$-Verteilung. Die $E(\frac{m}{2},\frac{1}{2})$-Verteilung spielt in der Statistik eine wichtige Rolle und heißt dort chi-quadrat-Verteilung.

Satz 23: *Die Anzahl der Anrufe im Zeitintervall $[0,t]$ sei $P(\lambda t)$-verteilt. Sei Z die Wartezeit vom Zeitpunkt 0 bis zum n-ten Anruf. Dann hat Z die $E(n,\lambda)$-Verteilung.*

Beweis: Sei $t > 0$ beliebig und X die Anzahl der Anrufe im Zeitintervall $[0,t]$. Die Wartezeit auf den n-ten Anruf ist genau dann $\leq t$, wenn im Zeitintervall $[0,t]$ mindestens n Anrufe kommen, das heißt $Z \leq t$ tritt genau dann ein, wenn $X \geq n$ eintritt. Daher gilt
$F(t) = P(Z \leq t) = P(X \geq n) = 1 - P(X \leq n-1) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} - \dots - \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}$
Die Wahrscheinlichkeitsdichte f der Zufallsvariable Z erhält man als Ableitung von F. Berechnet man diese mit Hilfe der Produktregel, so kürzen sich alle dabei auftretenden

Summanden weg bis auf einen:

$$F'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \cdots - (n-1)\lambda \tfrac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + \tfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$$

Man erhält $f(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$. Da Z außerdem als Wartezeit keine negativen Werte annehmen kann, ist $\mathbb{R}_0^+$ der Wertebereich von Z und $f(x) = 0$ für $x < 0$. $\square$

7. Normalverteilung

Misst man eine (physikalische) Größe mehrmals, so erhält man Messwerte, die wegen zufälliger Störungen beim Messvorgang leicht voneinander abweichen. Werden Flaschen oder Verpackungen von einer Abfüllanlage gefüllt, so wird man Schwankungen bei den Füllmengen feststellen, die auf die Ungenauigkeit der Abfüllanlage zurückzuführen sind. Ebenso sind die Abmessungen eines Werkstücks nach einem Produktionsprozess Schwankungen unterworfen. Messwerte und Füllmengen unterliegen zufälligen Einflüssen und werden daher als Zufallsvariable aufgefasst. Für solche Zufallsvariablen ist meist die Normalverteilung passend.

Definition: Seien $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}$ und Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

heißt normalverteilt mit Parametern μ und σ oder kurz $N(\mu, \sigma)$-verteilt.

Um Beispiele zur Normalverteilung zu rechnen, benötigen wir einige Vorbereitungen.

Satz 24: *Sei X eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte f. Sei $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ und $Y = \frac{X-a}{b}$. Dann hat Y die Wahrscheinlichkeitsdichte $g(x) = bf(bx + a)$.*

Beweis: Sei $F(t) = P(X \leq t)$ die Verteilungsfunktion von X, sodass $F'(t) = f(t)$ gilt. Es folgt $P(Y \leq t) = P(\frac{X-a}{b} \leq t) = P(X \leq bt+a) = F(bt+a)$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte g von Y ist die Ableitung dieser Funktion, also $g(t) = F'(bt + a)b = bf(bt + a)$. $\square$

Nun können wir eine $N(\mu, \sigma)$-verteilte Zufallsvariable auf eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable zurückführen. Die $N(0, 1)$-Verteilung nennt man auch Standardnormalverteilung.

Satz 25: *Wenn X die $N(\mu, \sigma)$-Verteilung hat, dann hat $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ die $N(0, 1)$-Verteilung.*

Beweis: Die Wahrscheinlichkeitsdichte von X ist $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$. Nach Satz 24 hat Y die Wahrscheinlichkeitsdichte $g(x) = \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\sigma x+\mu-\mu)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Das ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der $N(0, 1)$-Verteilung. $\square$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte der $N(0, 1)$-Verteilung wurde die Bezeichnung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

eingeführt. Im Anhang wird $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ gezeigt, das heißt $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Daraus folgt dann $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x = 1$. Die Verteilungsfunktion der $N(0, 1)$-Verteilung wird mit Φ bezeichnet, das heißt $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ für $t \in \mathbb{R}$.

Satz 26: *Es gilt*
(a) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$
(b) $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$
(c) $\Phi : \mathbb{R} \to (0, 1)$ *ist streng monoton wachsend und invertierbar.*

Beweis: Es gilt (a), da in der Formel für $\varphi(x)$ nur x^2 vorkommt, und (b) rechnet man nach $\Phi(-t) = \int_{-\infty}^{-t} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-t} \varphi(-x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\infty}^{t} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{t}^{\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1 - \Phi(t)$, wobei zuerst (a) verwendet und dann die Integralsubstitution $y = -x$ durchgeführt wurde. Da $\Phi'(t) = \varphi(t) > 0$ für alle t gilt, ist Φ eine streng monoton wachsende Funktion und daher auch injektiv. Weiters berechnet man $\lim_{t\to-\infty} \Phi(t) = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ und $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Daher ist $\Phi : \mathbb{R} \to (0, 1)$ auch surjektiv. Damit ist gezeigt, dass Φ invertierbar ist, und (c) ist bewiesen. □

Tritt in einem Beispiel eine normalverteilte Zufallsvariable auf, so führt man sie mit Satz 25 auf eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable Y zurück. Wahrscheinlichkeiten für diese Zufallsvariable kann man mit Hilfe ihrer Verteilungsfunktion Φ ausdrücken. Wegen Satz 17 gilt $P(Y \le t) = \Phi(t)$, $P(Y \ge t) = 1 - \Phi(t)$ und $P(s \le Y \le t) = \Phi(t) - \Phi(s)$, wobei statt $\le$ auch $<$ und statt $\ge$ auch $>$ stehen darf. Die Werte von $\Phi(t)$ für $t \ge 0$ findet man in einer Tabelle. Die Werte von $\Phi(t)$ für $t < 0$ findet man mit Hilfe der Formel $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

Beispiel 44: Eine Maschine stellt Spanplatten her. Ihre Dicke ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt mit $\mu = 19$ mm und $\sigma = 0{,}05$ mm. Die Platten sollen zwischen 18,95 mm und 19,10 mm stark sein. Wieviel Prozent Ausschuss produziert die Maschine?

Sei X die Dicke einer (zufällig gewählten) Platte. Dann hat X die $N(\mu, \sigma)$-Verteilung. Die Platte ist Ausschuss, wenn $X \le 18{,}95$ oder $X \ge 19{,}10$ gilt. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass sie kein Ausschuss ist, das heißt, dass $18{,}95 < X < 19{,}10$ gilt.

$$\begin{aligned}
P(18{,}95 < X < 19{,}10) &= P\left(\tfrac{18{,}95-\mu}{\sigma} < Y < \tfrac{19{,}10-\mu}{\sigma}\right) && \text{wobei } Y = \tfrac{X-\mu}{\sigma} \\
&= P(-1 < Y < 2) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-1) && \text{da } Y \text{ die } N(0,1)\text{-Verteilung hat} \\
&= \Phi(2) - 1 + \Phi(1) && \text{Satz 26 (b)} \\
&= 0{,}977 - 1 + 0{,}841 = 0{,}818 && \text{Tabelle}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine (zufällig gewählte) Platte Ausschuss ist, beträgt daher $1 - 0{,}818 = 0{,}182$. Die Maschine produziert 18,2% Ausschuss.

Beispiel 45: Auf einer Maschine werden Waschmittelpackungen abgefüllt. Der Inhalt der Packungen ist $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Die Arbeitsgenauigkeit der Abfüllanlage ist bekannt und durch $\sigma = 0{,}05$ kg gegeben. Die durchschnittliche Abfüllmenge μ kann man einstellen.
(a) Die Maschine wird auf $\mu = 3$ kg eingestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die am Etikett angegebene Mindestfüllmenge von 2,9 kg unterschritten wird?
(b) Es wird wieder $\mu = 3$ kg eingestellt. Welche Mindestfüllmenge t ist auf das Etikett zu drucken, wenn höchstens 1% der Packungen diese Menge t unterschreiten dürfen?
(c) Auf welchen Mittelwert μ muss man die Maschine einstellen, wenn die Mindestfüllmenge von 2,9 kg nur von 1% der Packungen unterschritten werden darf?

(a) Sei X der Inhalt einer (zufällig gewählten) Packung. Gesucht ist $P(X < 2{,}9)$.

$$\begin{aligned} P(X < 2{,}9) &= P(Y < \tfrac{2{,}9-3}{0{,}05}) && \text{wobei } Y = \tfrac{X-\mu}{\sigma} = \tfrac{X-3}{0{,}05} \\ &= P(Y < -2) \\ &= \Phi(-2) && \text{da } Y \text{ die } N(0,1)\text{-Verteilung hat} \\ &= 1 - \Phi(2) && \text{Satz 26 (b)} \\ &= 1 - 0{,}977 = 0{,}023 && \text{Tabelle} \end{aligned}$$

Die Mindestfüllmenge wird von 2,3% der Packungen unterschritten.

(b) Gesucht ist t, sodass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Packungsinhalt X kleiner als t ist, höchstens 0,01 beträgt. Es muss also $P(X < t) \le 0{,}01$ gelten. Wir erhalten

$$P(X < t) = P(\tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{t-3}{0{,}05}) = \Phi(\tfrac{t-3}{0{,}05})$$

Wir suchen t, sodass $\Phi(\frac{t-3}{0{,}05}) \le 0{,}01$ gilt. Da Φ streng monoton wachsend ist, ist das äquivalent zu $\frac{t-3}{0{,}05} \le \Phi^{-1}(0{,}01)$. In der Tabelle findet man $\Phi(2{,}33) = 0{,}99$. Wegen Satz 26 (b) folgt $\Phi(-2{,}33) = 0{,}01$, das heißt $\Phi^{-1}(0{,}01) = -2{,}33$. Wir suchen also t, sodass $\frac{t-3}{0{,}05} \le -2{,}33$ gilt. Es folgt $t \le 2{,}884$. Druckt man eine Mindestfüllmenge, die $\le 2{,}884$ ist, auf das Etikett, dann ist die verlangte Forderung erfüllt.

(c) Gesucht ist μ, sodass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Packungsinhalt X kleiner als 2,9 ist, höchstens 0,01 beträgt. Es muss also $P(X < 2{,}9) \le 0{,}01$ gelten. Wir erhalten

$$P(X < 2{,}9) = P(\tfrac{X-\mu}{\sigma} < \tfrac{2{,}9-\mu}{0{,}05}) = \Phi(\tfrac{2{,}9-\mu}{0{,}05})$$

Wir suchen μ, sodass $\Phi(\frac{2{,}9-\mu}{0{,}05}) \le 0{,}01$ gilt. Da Φ streng monoton wachsend ist, ist das äquivalent zu $\frac{2{,}9-\mu}{0{,}05} \le \Phi^{-1}(0{,}01)$. Wie oben findet man $\Phi^{-1}(0{,}01) = -2{,}33$. Wir suchen also μ, sodass $\frac{2{,}9-\mu}{0{,}05} \le -2{,}33$ gilt. Es folgt $\mu \ge 3{,}016$. Stellt man die Maschine auf einen Mittelwert μ ein, der $\ge 3{,}016$ ist, dann ist die verlangte Forderung erfüllt.

Schließlich berechnen wir noch Erwartungswert und Varianz einer $N(\mu,\sigma)$-verteilten Zufallsvariablen X. Durch Substitution der neuen Variablen $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ erhalten wir

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}y = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0$, da wir $\int_0^{\infty} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^0 y\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ aus $\varphi(y) = \varphi(-y)$ erhalten. Weiters gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 1$. Somit folgt $\mathrm{E}(X) = \mu$.

Analog berechnen wir die Varianz der $N(\mu,\sigma)$-verteilten Zufallsvariable X. Durch Substitution der neuen Variablen $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ erhalten wir

$$\mathrm{V}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\,\mathrm{d}y$ mittels partieller Integration. Wegen $\varphi'(y) = -y\varphi(y)$ folgt $\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot y\varphi(y)\,\mathrm{d}y = -y \cdot \varphi(y)\big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0 + 1 = 1$. Somit erhalten wir $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$.

8. Approximation der Binomialverteilung

Die Berechnung des Wahrscheinlichkeitsvektors einer $B(n,p)$-verteilten Zufallsvariable X ist für große Werte von n aufwendig. Noch komplizierter ist es, bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit $P(X \le k)$ für eine feste Zahl $k \ge 0$ und einem gegebenen Parameter p den Parameter n zu bestimmen. Deshalb wird die Binomialverteilung oft durch die Normalverteilung approximiert, diese Approximation ergibt sich aus dem (lokalen) Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace. Im Beweis benötigen wir die sogenannte Stirling-Formel.

Satz 27 (Stirling-Formel) *Für alle $n \ge 1$ gilt*

$$1 < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} < 1 + \frac{1}{11n}.$$

Satz 28 (Lokaler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace) *Für alle $n \ge 1$ sei X_n eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable und sei M_n eine Folge natürlicher Zahlen mit $M_n^3/n^2 \to 0$. Dann gilt für alle Folgen k_n mit $|k_n - np| \le M_n$*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k_n)\sqrt{np(1-p)} = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{k_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

sofern der rechte Limes existiert. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt nur von der Konvergenzgeschwindigkeit des rechten Limes ab. Daher gilt für eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X bei hinreichen großem n die Näherung

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Beweis: Wir führen eine Reihe von Umformungen von Limiten durch, aus der Existenz des letzten Limes im Beweis folgt dann die Existenz aller vorangehenden Limiten und deren Gleichheit. Wir drücken die Faktoriellen $n!$, $k_n!$ und $(n-k_n)!$ mittels der Stirling-Formel aus und erhalten mit $\sigma_n = \sqrt{np(1-p)}$

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k_n)\,\sigma_n = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k_n} p^{k_n}(1-p)^{n-k_n}\sigma_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi k_n}\, k_n^{k_n} e^{-k_n} \cdot \sqrt{2\pi(n-k_n)}\,(n-k_n)^{n-k_n} e^{-n+k_n}} p^{k_n}(1-p)^{n-k_n}\sigma_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi k_n(n-k_n)}}\, \frac{n^n}{k_n^{k_n}(n-k_n)^{n-k_n}} p^{k_n}(1-p)^{n-k_n}\sigma_n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{\sqrt{2\pi n \frac{k_n}{n}(1-\frac{k_n}{n})}} \left(\frac{np}{k_n}\right)^{k_n} \left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)^{n-k_n}.$$

Aus der Bedingung $|k_n - np| \le M_n$ folgt $|k_n/n - p| \le M_n/n$, daher konvergiert $k_n/n \to p$ und $\sqrt{2\pi\frac{k_n}{n}(1-\frac{k_n}{n})} \to \sqrt{2\pi p(1-p)}$ beziehungsweise $\sigma_n/\sqrt{2\pi n\frac{k_n}{n}(1-\frac{k_n}{n})} \to 1/\sqrt{2\pi}$. Weiters folgt

$$\left(\frac{np}{k_n}\right)^{k_n} \left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)^{n-k_n} = \exp\left(k_n \ln\left(\frac{np}{k_n}\right) + (n-k_n)\ln\left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(n \cdot \left(-\frac{k_n}{n}\ln\left(\frac{k_n/n}{p}\right) - \frac{n-k_n}{n}\ln\left(\frac{1-k_n/n}{1-p}\right)\right)\right).$$

Die Taylor-Entwicklung mit Entwicklungsmitte $x_0 = p$ der Funktion

$$\begin{aligned} g : (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \ln(x/p) + (1-x)\ln((1-x)/(1-p)) \end{aligned}$$

lautet $g(x) = \frac{1}{2p(1-p)}(x-p)^2 + R_3(x)$ mit $|R_3(x)| < C|x-p|^3$ in einer Umgebung U von p mit $C \in \mathbb{R}^+$. Wegen $|k_n/n - p| \leq M_n/n$ und $M_n^3/n^2 \to 0$ folgt $n \cdot R_3(k_n/n) \to 0$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{np}{k_n}\right)^{k_n} \left(\frac{n(1-p)}{n-k_n}\right)^{n-k_n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-n \cdot g(k_n/n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-n \cdot \frac{1}{2p(1-p)}(k_n/n-p)^2\right) \cdot \exp\left(-n \cdot R_3(k_n/n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-n \cdot \frac{1}{2p(1-p)}(k_n/n-p)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{(k_n-np)^2}{2np(1-p)}\right). \qquad \square$$

Bemerkung: Die Bedingung $M_n^3/n^2 \to 0$ ist technisch unabdingbar und wird beispielsweise durch die Folge $M_n = [K\sqrt{n}]$ mit einer Konstante $K \in \mathbb{N}$ erfüllt. Für die Folgen $k_n = \min\{[np + M_n], n\}$ oder $k_n = \max\{[np - M_n] + 1, 0\}$ gilt $|k_n - np| \leq M_n$ sowie $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \to \pm\frac{K}{\sqrt{p(1-p)}}$. Durch das schnelle Abfallen der Standardnormalverteilungsdichte φ sind bei entsprechender Wahl von K und für hinreichend großes n alle wesentlichen Anteile des Wahrscheinlichkeitsvektors der $B(n,p)$-Verteilung durch die Konvergenz in Satz 28 abgedeckt.

Die Binomialverteilung ist diskret, während die Normalverteilung kontinuierlich ist. Deshalb führen wir eine Art Wahrscheinlichkeitsdichte für eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X ein. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$g(x) = w(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{für} \quad x \in (i - \tfrac{1}{2}, i + \tfrac{1}{2}] \quad \text{und für} \quad 0 \leq i \leq n$$

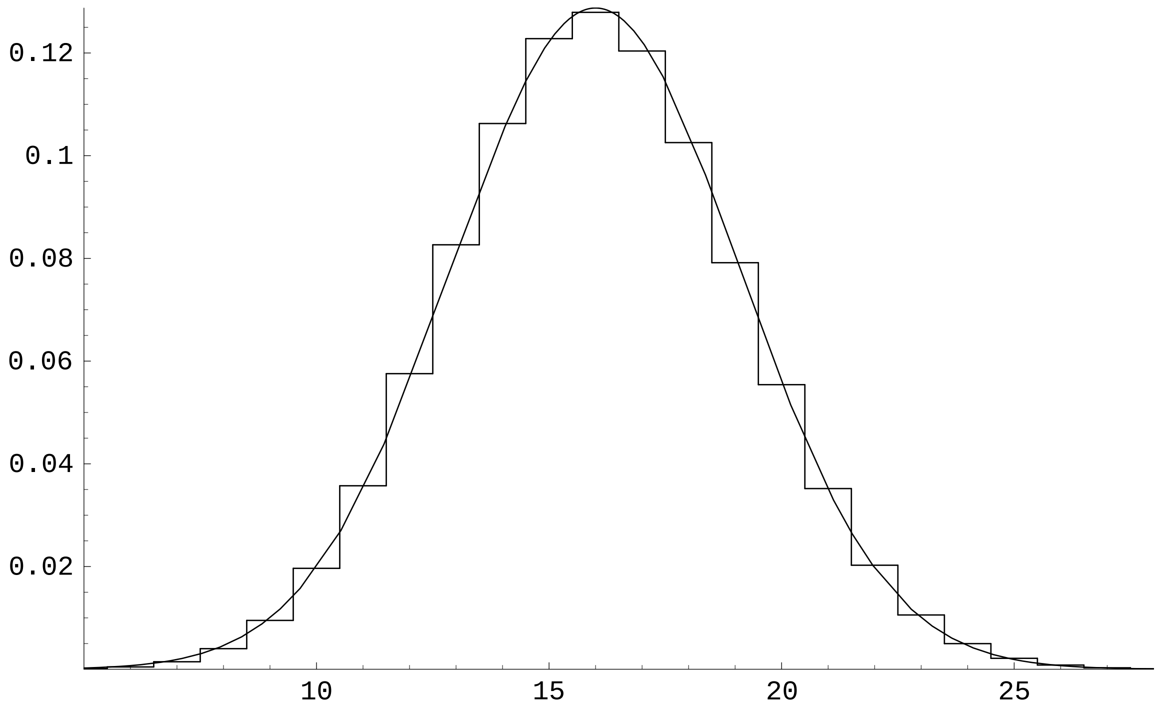
und $g(x) = 0$ für $x \notin (-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$. Durch g ist eine Treppenfunktion definiert, sodass die Fläche des Rechtecks, das über dem Intervall $(i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}]$ und unter g liegt, gleich $w(i)$ ist. Deshalb ist $\sum_{i=0}^k w(i)$ gerade die links von $k + \frac{1}{2}$ liegende Fläche unter der Treppenfunktion g. Für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ gilt daher

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} w(i) = \int_{-\infty}^{k+\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

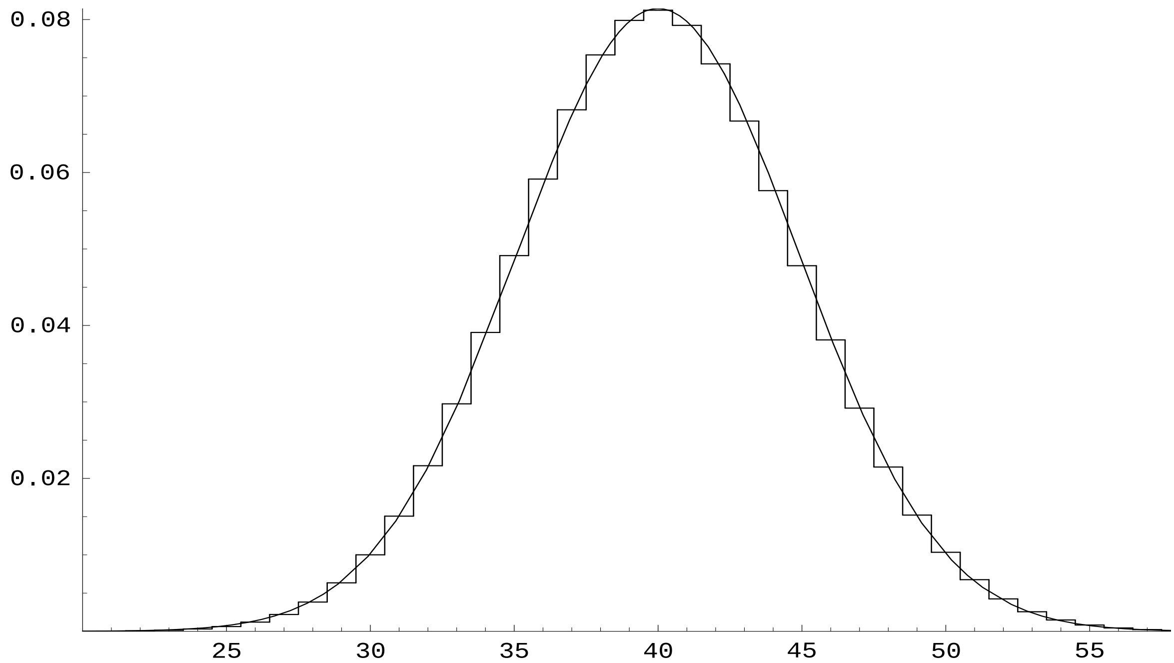
Nach Satz 28 strebt der Abstand zwischen der Treppenfunktion g und der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \varphi\left(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

für die ganzzahligen Werte $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit steigendem n gegen 0. Selbst der relative Fehler bezogen auf das Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte f konvergiert gegen 0, zudem gleichmäßig für $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dabei wählen wir μ und σ der approximierenden Normalverteilung so, dass Erwartungswert und Standardabweichung der Binomialverteilung und der Normalverteilung übereinstimmen, also $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Die folgende Abbildung zeigt g mit $n = 40$ und $p = 0{,}4$ und die dazupassende Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung.



Wenn man n vergrößert, werden die Sprünge der Treppenfunktion kleiner. Die folgende Abbildung zeigt g mit $n = 100$ und $p = 0{,}4$ und die dazupassende Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung.



Als Faustregel, wann n groß genug ist, um eine ausreichende Approximation zu gewährleisten, verwendet man $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \geq 3$.

Man kann daher eine $B(n, p)$-verteilte Zufallsvariable X näherungsweise so behandeln, als ob sie $N(\mu, \sigma)$-verteilt wäre mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Für ganzzahliges k

wurde bereits $P(X \le k) = \int_{-\infty}^{k+\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$ gezeigt. Mit Hilfe dieser Gleichung erhalten wir für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P(X \le k) = \int_{-\infty}^{k+\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{-\infty}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\frac{k+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(\tfrac{k+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma})$$

wobei die neue Integrationsvariable $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ eingeführt wurde. In Beispielen hat man es häufig auch mit Wahrscheinlichkeiten $P(k_1 \le X \le k_2) = P(X \le k_2) - P(X \le k_1 - 1)$ für ganzzahlige k_1 und k_2 zu tun, sodass man die Approximation

$$\begin{aligned} P(k_1 \le X \le k_2) = \int_{k_1-\frac{1}{2}}^{k_2+\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{k_1-\frac{1}{2}}^{k_2+\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{k_1-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}}^{\frac{k_2+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y &= \\ = \Phi(\tfrac{k_2+\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}) - \Phi(\tfrac{k_1-\frac{1}{2}-\mu}{\sigma}) \end{aligned}$$

verwendet. Die Addition von $\frac{1}{2}$ an der oberen Grenze und die Subtraktion von $\frac{1}{2}$ an der unteren Grenze wird auch als Stetigkeitskorrektur bezeichnet und verbessert die Genauigkeit der Approximation.

Beispiel 46: Auf einer Maschine werden Schrauben erzeugt, von denen 1% schadhaft sind. Die Schrauben werden in Packungen zu 1600 Stück verkauft.
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens 9 schadhafte Schrauben in einer Packung findet?
(b) Welche Anzahl von brauchbaren Schrauben in einer Packung kann der Hersteller garantieren, wenn die Garantie von höchstens 2% der Packungen unterschritten werden darf?

(a) Sei X die Anzahl der schadhaften Schrauben in einer (zufällig gewählten) Packung. Dann hat X die $B(n, p)$-Verteilung mit $n = 1600$ und $p = 0{,}01$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X \le 9$ ist.

Um das zu berechnen, verwenden wir die Approximation durch die Normalverteilung. Wir haben $\mu = np = 1600 \cdot 0{,}01 = 16$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1600 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} = 3{,}980$. Wegen $\sigma \ge 3$ ist die Approximation ausreichend gut. Wir erhalten

$$P(X \le 9) \approx \Phi(\tfrac{9+\frac{1}{2}-16}{3{,}980}) = \Phi(-1{,}633) = 1 - \Phi(1{,}633) = 1 - 0{,}949 = 0{,}051$$

wobei $\Phi(1{,}63)$ in einer Tabelle gefunden wurde.

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 9 schadhafte Schrauben in einer Packung sind, beträgt 0,051. Der exakte Wert nach der Binomialverteilung beträgt 0,043.

(b) Sei Y die Anzahl der brauchbaren Schrauben in einer (zufällig gewählten) Packung und k die Anzahl der brauchbaren Schrauben, die der Hersteller in einer Packung garantieren kann. Gesucht ist k, sodass $P(Y < k) \le 0{,}02$ gilt. Die Zufallsvariable Y hat jetzt die $B(n, p)$-Verteilung mit $n = 1600$ und $p = 0{,}99$.

Wir verwenden die Approximation durch die Normalverteilung. Dazu berechnen wir $\mu = np = 1600 \cdot 0{,}99 = 1584$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1600 \cdot 0{,}99 \cdot 0{,}01} = 3{,}98$. Weil $\sigma \ge 3$ gilt, ist die Approximation ausreichend gut.

Wegen $P(Y < k) = P(Y \le k-1) \approx \Phi(\frac{k-1+\frac{1}{2}-1584}{3{,}98}) = \Phi(\frac{k-1584{,}5}{3{,}98})$ ist k so zu bestimmen, dass $\Phi(\frac{k-1584{,}5}{3{,}98}) \le 0{,}02$ gilt. Aus $\Phi(2{,}05) = 0{,}98$ folgt $\Phi(-2{,}05) = 0{,}02$ und $-2{,}05 = \Phi^{-1}(0{,}02)$. Da Φ streng monoton wachsend ist, erhalten wir die äquivalente Ungleichung $\frac{k-1584{,}5}{3{,}98} \le -2{,}05$. Das ergibt $k \le 1576{,}3$.

Der Hersteller kann also 1576 brauchbare Schrauben pro Packung garantieren, natürlich auch jede kleinere Anzahl.

Beispiel 47: Bei einem Fährunternehmen weiß man, dass durchschnittlich 10 % der Personen, die einen Platz für ihren PKW gebucht haben, zur Abfahrt nicht erscheinen. Es gibt 120 PKW–Plätze. Wieviele Buchungen dürfen höchstens vorgenommen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass alle, die zur Abfahrt erscheinen, einen Platz bekommen, mindestens 0,95 betragen soll?

Sei n die Anzahl der vorgenommenen Buchungen und X die Anzahl der Gebuchten, die auch zur Abfahrt erscheinen. Jeder der n Gebuchten erscheint mit Wahrscheinlichkeit 0,9. Daher hat X die $B(n,p)$-Verteilung mit $p = 0{,}9$. Wir müssen n so bestimmen, dass $P(X \le 120) \ge 0{,}95$ gilt.

Wir verwenden die Approximation durch die Normalverteilung. Dazu berechnen wir $\mu = np = 0{,}9 \cdot n$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 0{,}3\sqrt{n}$. Da n jedenfalls ≥ 120 sein muss, ist σ jedenfalls ≥ 3, und wir können die Approximation verwenden.

Wegen $P(X \le 120) = \Phi(\frac{120{,}5-0{,}9\cdot n}{0{,}3\sqrt{n}})$ und $0{,}95 = \Phi(1{,}65)$ ist n so zu bestimmen, dass $\Phi(\frac{120{,}5-0{,}9\cdot n}{0{,}3\sqrt{n}}) \ge \Phi(1{,}65)$ gilt. Wegen der Monotonie von Φ ist das wieder äquivalent zu $\frac{120{,}5-0{,}9\cdot n}{0{,}3\sqrt{n}} \ge 1{,}65$. Durch Umformen ergibt sich

$$n + 0{,}55\sqrt{n} - 133{,}9 \le 0$$

Setzt man $x = \sqrt{n}$ so erhält man die quadratische Ungleichung $x^2 + 0{,}55x - 133{,}9 \le 0$. Die durch die Funktion $x \mapsto x^2 + 0{,}55x - 133{,}9$ dargestellte Parabel ist nach oben offen. Die Ungleichung ist also für alle x zwischen x_1 und x_2 erfüllt, wobei x_1 und x_2 die beiden Nullstellen der Parabel sind. Löst man die quadratische Gleichung $x^2+0{,}55x-133{,}9 = 0$, so erhält man $x_1 = -11{,}85$ und $x_2 = 11{,}3$. Da $x = \sqrt{n}$ aber positiv sein muss, erhalten wir als Lösungsmenge für x das Intervall $[0, 11{,}3]$ und als Lösungsmenge für $n = x^2$ das Intervall $[0, 127{,}7]$.

Damit alle, die zur Abfahrt erscheinen, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 einen Platz erhalten, dürfen höchstens 127 Buchungen vorgenommen werden.

Beispiel 48: Wie oft muss man würfeln, damit mit Wahrscheinlichkeit 0,9 mindestens dreimal 6 unter den gewürfelten Ergebnissen auftritt?

Sei n die Anzahl der Würfe und X die Anzahl, mit der 6 auftritt. Dann hat X die $B(n,p)$-Verteilung mit $p = \frac{1}{6}$. Wir müssen n so bestimmen, dass $P(X \ge 3) \ge 0{,}9$ gilt.

Wir verwenden die Approximation durch die Normalverteilung. Dazu berechnen wir $\mu = np = \frac{n}{6}$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \frac{\sqrt{5n}}{6}$. Es gilt $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) \approx 1 - \Phi(\frac{2{,}5-\mu}{\sigma})$. Wegen $P(X \ge 3) \ge 0{,}9$ erhält man $\Phi(\frac{2{,}5-\mu}{\sigma}) \le 0{,}1$. Nun gilt $\Phi(1{,}28) = 0{,}9$ und somit $\Phi(-1{,}28) = 0{,}1$. Da Φ streng monoton wachsend ist, ergibt sich $\frac{2{,}5-\mu}{\sigma} \le -1{,}28$ oder $\mu - 2{,}5 - 1{,}28\sigma \ge 0$. Setzt man für μ und σ ein, so hat man $n - 1{,}28\sqrt{5}\sqrt{n} - 15 \ge 0$. Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 1{,}28\sqrt{5}\,x - 15 = 0$ sind $x_1 = -2{,}698$ und $x_2 = 5{,}560$. Es folgt $\sqrt{n} \le -2{,}698$ oder $\sqrt{n} \ge 5{,}560$. Da das erste nicht möglich ist, ergibt sich $\sqrt{n} \ge 5{,}560$ oder $n \ge 30{,}91$. Man muss mindestens 31 Mal würfeln, um mit Wahrscheinlichkeit 0,9 mindestens dreimal 6 zu erhalten.

Da für $n = 31$ aber $\sigma < 3$ gilt, sollte man die Probe mit Hilfe der Binomialverteilung machen: $P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - (\frac{5}{6})^{31} - \binom{31}{1}\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{30} - \binom{31}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{29} = 0{,}9094$. Für $n = 30$ würde man 0,8972 erhalten, also weniger als 0,9.

IV. Mehrere Zufallsvariable

In diesem Kapitel werden Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen untersucht. Es geht um gemeinsame Verteilungen von Zufallsvariablen, um Summe und Quotient von zwei Zufallsvariablen und um Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz.

1. Gemeinsame Verteilungen von Zufallsvariablen

Um zwei Zufallsvariable X und Y gleichzeitig untersuchen zu können, geben wir folgende Definitionen und beweisen einige Sätze.

Definition: Seien S und T endliche oder abzählbare Mengen. Ein Vektor $(u(i,j))_{i\in S, j\in T}$ mit nicht negativen Eintragungen und $\sum_{i\in S, j\in T} u(i,j) = 1$ heißt gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen X und Y, wenn $u(i,j) = P(X = i \ \wedge \ Y = j)$ für alle $i \in S$ und $j \in T$ gilt.

Satz 29: *Sei $(u(i,j))_{i\in S, j\in T}$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen X und Y. Für jede Teilmenge B von $S \times T$ gilt $P((X,Y) \in B) = \sum_{(i,j)\in B} u(i,j)$.*

Beweis: Im Beweis von Satz 15 ersetzt man S durch $S \times T$ und interpretiert den Index i als ein Element von $S \times T$. □

Satz 30: *Sei $(u(i,j))_{i\in S, j\in T}$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen X und Y. Für $i \in S$ sei $w_1(i) = \sum_{j\in T} u(i,j)$ und für $j \in T$ sei $w_2(j) = \sum_{i\in S} u(i,j)$. Dann ist $(w_1(i))_{i\in S}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariable X und $(w_2(j))_{j\in T}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariable Y. Man bezeichnet diese beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch als Randverteilungen der zweidimensionalen Zufallsvariable (X,Y).*

Beweis: Sei $i \in S$ beliebig. Sei $B = \{(i,j) : j \in T\}$. Dann gilt $B \subseteq S \times T$. Mit Hilfe von Satz 29 folgt $P(X = i) = P((X,Y) \in B) = \sum_{(k,j)\in B} u(k,j) = \sum_{j\in T} u(i,j)$. Damit ist $P(X = i) = w_1(i)$ für alle $i \in S$ gezeigt, das heißt $(w_1(i))_{i\in S}$ ist Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen X. Der Beweis für die Zufallsvariable Y läuft analog. □

Beispiel 49: Sei X der Ausfall eines Münzenwurfs. Ergibt der Münzenwurf 0, dann ziehen wir aus $1,1,1,2,3,3$. Ergibt der Münzenwurf 1, dann ziehen wir aus $1,2,2,2,2,3$. Sei Y das Ziehungsergebnis. Gesucht ist der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen X und Y.

Sei $S = \{0,1\}$ die Menge aller möglichen Ausfälle des Münzenwurfs und $T = \{1,2,3\}$ die Menge aller möglichen Ziehungsergebnisse. Es gilt dann $P(X = 0 \wedge Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1|X = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$. Somit haben wir $u(0,1) = \frac{1}{4}$. Analog folgt $u(0,2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ und $u(0,3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$. In den Fällen, wo der Münzenwurf 1 ergibt, erhalten wir $u(1,1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, $u(1,2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$ und $u(1,3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Damit ist der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor $(u(i,j))_{i\in S, j\in T}$ von X und Y berechnet.

Es folgt $w_1(0) = u(0,1) + u(0,2) + u(0,3) = \frac{1}{2}$ und $w_1(1) = u(1,1) + u(1,2) + u(1,3) = \frac{1}{2}$. Das ist der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariable X. Ebenso erhalten wir $w_2(1) = u(0,1) + u(1,1) = \frac{1}{3}$, $w_2(2) = u(0,2) + u(1,2) = \frac{5}{12}$ und $w_2(3) = u(0,3) + u(1,3) = \frac{1}{4}$. Das ist der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariable Y, der die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen jeder der drei Zahlen angibt.

Definition: Eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = 1$ heißt gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2, wenn $P(X_1 \le s \ \wedge\ X_2 \le t) = \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{t} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Satz 31: *Sei $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X_1 und X_2. Dann gilt $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B) = \int_B g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}(x_1,x_2)$ für alle Normalbereiche B des $\mathbb{R}^2$, die auch unbeschränkt sein können (Definition im Anhang).*

Beweis: Sei B zuerst ein Rechteck $C = (r_1,s_1] \times (r_2,s_2]$. Aus obiger Definition erhalten wir $\mathrm{P}(X_1 \le s_1 \wedge X_2 \le s_2) - \mathrm{P}(X_1 \le s_1 \wedge X_2 \le r_2) = \int_{-\infty}^{s_1}\int_{-\infty}^{s_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 - \int_{-\infty}^{s_1}\int_{-\infty}^{r_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_{-\infty}^{s_1}\int_{r_2}^{s_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$. Wegen des Additionssatzes gilt $\mathrm{P}(X_1 \le s_1 \wedge X_2 \le s_2) = \mathrm{P}(X_1 \le s_1 \wedge X_2 \le r_2) + \mathrm{P}(X_1 \le s_1 \wedge r_2 < X_2 \le s_2)$. Es folgt

$$\mathrm{P}(X_1 \le s_1 \wedge r_2 < X_2 \le s_2) = \int_{-\infty}^{s_1}\int_{r_2}^{s_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$

Ersetzt man in dieser Gleichung s_1 durch r_1, so hat man auch

$$\mathrm{P}(X_1 \le r_1 \wedge r_2 < X_2 \le s_2) = \int_{-\infty}^{r_1}\int_{r_2}^{s_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$$

Der Additionssatz liefert auch $\mathrm{P}(X_1 \le s_1 \wedge r_2 < X_2 \le s_2) = \mathrm{P}(X_1 \le r_1 \wedge r_2 < X_2 \le s_2) + \mathrm{P}(r_1 < X_1 \le s_1 \wedge r_2 < X_2 \le s_2)$. Mit Hilfe der beiden obigen Gleichungen ergibt sich $\mathrm{P}(r_1 < X_1 \le s_1 \wedge r_2 < X_2 \le s_2) = \int_{-\infty}^{s_1}\int_{r_2}^{s_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 - \int_{-\infty}^{r_1}\int_{r_2}^{s_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1 = \int_{r_1}^{s_1}\int_{r_2}^{s_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1$. Damit haben wir $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in C) = \int_C g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ für das Rechteck $C = (r_1,s_1] \times (r_2,s_2]$ gezeigt, wobei $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$.

Sei jetzt $B = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_j$ eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen solchen Rechtecken. Das Ereignis $(X_1,X_2) \in B$ tritt genau dann ein, wenn eines der Ereignisse $(X_1,X_2) \in C_1$, $(X_1,X_2) \in C_2$, … , $(X_1,X_2) \in C_j$ eintritt. Wegen der Disjunktheit der Rechtecke C_i sind diese Ereignisse unvereinbar. Aus dem Additionssatz erhalten wir dann $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B) = \mathrm{P}((X_1,X_2) \in C_1) + \mathrm{P}((X_1,X_2) \in C_2) + \cdots + \mathrm{P}((X_1,X_2) \in C_j)$. Da $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in C_i) = \int_{C_i} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ für $1 \le i \le j$ bereits oben bewiesen wurde, erhalten wir $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B) = \int_{C_1} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{C_2} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \cdots + \int_{C_j} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$, wobei die letzte Gleichheit wegen der Disjunktheit der Rechtecke C_i folgt.

Sei B jetzt ein beschränkter Normalbereich. Sei weiters $\varepsilon > 0$. Dann existieren Mengen B_1 und B_2, die disjunkte Vereinigungen von endlich vielen Rechtecken wie oben sind, sodass $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ und $\int_{B_2} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{B_1} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \varepsilon$ gilt. Wegen $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ erhalten wir $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B_1) \le \mathrm{P}((X_1,X_2) \in B) \le \mathrm{P}((X_1,X_2) \in B_2)$. Ebenfalls wegen $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$ erhalten wir $\int_{B_1} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \le \int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \le \int_{B_2} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$, da ja $g \ge 0$ gilt. Wir haben $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B_1) = \int_{B_1} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ und $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B_2) = \int_{B_2} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ bereits oben bewiesen. Daher liegen $\mathrm{P}(X \in B)$ und $\int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ in einem Intervall, das Länge ε hat. Damit ist $|\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B) - \int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}| < \varepsilon$ gezeigt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, muss auch $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in B) = \int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ gelten.

Um unbeschränkte Normalbereiche zu behandeln, sei $Q_m = [-m,m] \times [-m,m]$ für $m \ge 1$. Da Q_m beschränkt ist, ist $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in Q_m) = \int_{Q_m} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ gezeigt. Wegen $\int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$ erhalten wir $\lim_{m\to\infty} \int_{Q_m} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein m mit $1 - \int_{Q_m} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \varepsilon$. Wir setzen $U = \mathbb{R}^2 \setminus Q_m$. Dann gilt $\int_U g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1 - \int_{Q_m} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \varepsilon$ und $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in U) = 1 - \mathrm{P}((X_1,X_2) \in Q_m) = 1 - \int_{Q_m} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \varepsilon$.

Sei B jetzt ein unbeschränkter Normalbereich im $\mathbb{R}^2$. Sei $C = B \setminus U = B \cap Q_m$ und $D = B \cap U$. Wegen $C \subseteq Q_m$ ist C ein beschränkter Normalbereich. Wegen $D \subseteq U$ ergibt sich $\mathrm{P}((X_1,X_2) \in D) \le \mathrm{P}((X_1,X_2) \in U) < \varepsilon$. Da B die disjunkte Vereinigung von C und D ist, folgt $\mathrm{P}((X_1, X_2) \in B) = \mathrm{P}((X_1, X_2) \in C) + \mathrm{P}((X_1, X_2) \in D)$ aus dem Additionssatz. Damit erhalten wir dann

$$\mathrm{P}((X_1, X_2) \in C) \leq \mathrm{P}((X_1, X_2) \in B) \leq \mathrm{P}((X_1, X_2) \in C) + \varepsilon$$

Wegen $C \subseteq B = C \cup D$ und $\int_D g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_U g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} < \varepsilon$ gilt auch

$$\int_C g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_C g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \varepsilon$$

Da C beschränkt ist, wurde $\mathrm{P}((X_1, X_2) \in C) = \int_C g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ bereits oben gezeigt. Es folgt $|\mathrm{P}((X_1, X_2) \in B) - \int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}| < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, erhalten wir $\mathrm{P}((X_1, X_2) \in B) = \int_B g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$. □

Satz 32: *Sei $g : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der beiden Zufallsvariablen X und Y. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}y$ und für $y \in \mathbb{R}$ sei $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}x$. Dann ist f_1 eine Wahrscheinlichkeitsdichte von X und f_2 eine Wahrscheinlichkeitsdichte von Y, man bezeichnet diese auch als Randdichten von (X, Y).*

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Sei $B = (-\infty, t] \times \mathbb{R}$. Mit Hilfe von Satz 31 erhalten wir $P(X \leq t) = P((X, Y) \in B) = \int_B g(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. Damit ist $P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(x)\,\mathrm{d}x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gezeigt, das heißt f_1 ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariable X. Der Beweis für die Zufallsvariable Y läuft analog. □

Besonders wichtig ist der Fall von unabhängigen Zufallsvariablen X und Y. Hier lässt sich der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor durch die Wahrscheinlichkeitsvektoren der beiden Zufallsvariablen X und Y ausdrücken. Analoges für Wahrscheinlichkeitsdichten.

Definition: Seien X und Y Zufallsvariable und S und T endliche oder abzählbare Mengen, sodass X Werte in S und Y Werte in T annimmt. Die Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, wenn $P(X = i \ \wedge \ Y = j) = P(X = i)\,P(Y = j)$ für alle $i \in S$ und $j \in T$ gilt. Das ist äquivalent zur Unabhängigkeit der beiden Ereignisse $X = i$ und $Y = j$ für beliebige $i \in S$ und $j \in T$.

Bemerkung: Seien $(w_1(i))_{i \in S}$ und $(w_2(j))_{j \in T}$ die Wahrscheinlichkeitsvektoren der Zufallsvariablen X und Y. Dann sind X und Y genau dann unabhängig, wenn durch $u(i, j) = w_1(i)\,w_2(j)$ für alle $i \in S$ und $j \in T$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen X und Y gegeben ist.

Die entsprechende Definition für kontinuierliche Zufallsvariable benutzt die Ordnung auf den reellen Zahlen.

Definition: Die kontinuierlichen Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, wenn für jedes $s \in \mathbb{R}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ die Ereignisse $X \leq s$ und $Y \leq t$ unabhängig sind, das heißt wenn $P(X \leq s \ \wedge \ Y \leq t) = P(X \leq s)\,P(Y \leq t)$ gilt.

Satz 33: *Die Unabhängigkeit der kontinuierlichen Zufallsvariablen X mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ und Y mit Wahrscheinlichkeitsdichte $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ist äquivalent dazu, dass die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit $h(x, y) = f(x)\,g(y)$ eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X und Y ist.*

Beweis: Die Aussage, dass $P(X \leq s \ \wedge \ Y \leq t) = P(X \leq s)\,P(Y \leq t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt, ist äquivalent zu $P(X \leq s \ \wedge \ Y \leq t) = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{t} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{s} f(x) \int_{-\infty}^{t} g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{t} f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ nach Definition der

Wahrscheinlichkeitsdichte. Das aber ist äquivalent dazu, dass $h(x,y) = f(x)\,g(y)$ eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X und Y ist. □

2. Rechnen mit Zufallsvariablen

In diesem Kapitel soll das Rechnen mit Zufallsvariablen systematisch betrieben werden. Ansatzweise wurde das schon in den letzten Kapiteln getan, insbesondere in Satz 24, wo die Wahrscheinlichkeitsdichte einer linearen Funktion $\frac{X-a}{b}$ der Zufallsvariablen X berechnet wurde. Wir tun das auch für andere Funktionen von Zufallsvariablen. Solche Resultate bilden auch die Grundlage für Beweise in der Statistik.

Wir beginnen mit dem Quadrat einer Zufallsvariablen.

Satz 34: *Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte f. Dann ist X^2 eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ und Wahrscheinlichkeitsdichte $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}))$ für $x \in \mathbb{R}^+$.*

Beweis: Sei F die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X, also eine Stammfunktion von f. Sei weiters G die Verteilungsfunktion von X^2 und g bezeichnet die Wahrscheinlichkeitsdichte von X^2. Da $X^2 \geq 0$ gilt sowie $P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0$, folgt $G(t) = P(X^2 \leq t) = 0$ für $t \leq 0$. Der Wertebereich von X^2 ist $\mathbb{R}^+$. Für $t > 0$ gilt

$$G(t) = P(X^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t})$$

und durch Differenzieren nach t erhalten wir

$$g(t) = G'(t) = f(\sqrt{t})\tfrac{1}{2\sqrt{t}} + f(-\sqrt{t})\tfrac{1}{2\sqrt{t}} = \tfrac{1}{2\sqrt{t}}(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})).$$

□

Dazu rechnen wir ein Beispiel.

Beispiel 50: Die Zufallsvariable X sei $N(0,1)$-verteilt. Welche Verteilung hat X^2?

Die Wahrscheinlichkeitsdichte von X ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Nach Satz 34 hat X^2 den Wertebereich $\mathbb{R}_0^+$ und für $x > 0$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$g(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}(\varphi(\sqrt{x}) + \varphi(-\sqrt{x})) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}\tfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}} = \tfrac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}$$

Das ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der $E(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-Verteilung (chi-quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad).

Wir beweisen auch Formeln für Summe und Quotient von Zufallsvariablen mit einer gemeinsamen Dichte.

Satz 35: *Wenn die beiden Zufallsvariablen X und Y die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ besitzen, dann ist die Zufallsvariable $X+Y$ kontinuierlich mit Wahrscheinlichkeitsdichte $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y,y)\,\mathrm{d}y$ für $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig und sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq t\}$. Aus Satz 31 folgt

$$P(X+Y \leq t) = P((X,Y) \in B) = \int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t-y} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Führt man im inneren Integral die neue Integrationsvariable $z = x+y$ ein, so erhält man $P(X+Y \leq t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} g(z-y,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$. Nach Vertauschung der Integrale schreiben wir statt z wieder x und erhalten $P(X+Y \leq t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. Damit ist $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y,y)\,\mathrm{d}y$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $X+Y$. □

Satz 36: *Wenn die beiden Zufallsvariablen X und Y die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $g : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ haben, dann ist die Zufallsvariable $\frac{X}{Y}$ kontinuierlich mit Wahrscheinlichkeitsdichte $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(xy, y)|y|\,\mathrm{d}y$ für $x \in \mathbb{R}$.*
(Nach Satz 32 hat Y eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Daher gilt $P(Y = 0) = 0$ und man kann annehmen, dass $Y \neq 0$ gilt.)

Beweis: Sei $t \in \mathbb{R}$ und sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} \le t, y \neq 0\}$. Mit Satz 31 folgt $P(\frac{X}{Y} \le t) = P((X, Y) \in B) = \int_B g(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_{-\infty}^{0} \int_{ty}^{\infty} g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{ty} g(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Führt man in den beiden inneren Integralen die neue Integrationsvariable $z = \frac{x}{y}$ ein, so erhält man $P(\frac{X}{Y} \le t) = \int_{-\infty}^{0} \int_{t}^{-\infty} g(zy, y)\,y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{t} g(zy, y)\,y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$. Dabei ist $y < 0$ beim ersten Integral zu beachten. Da $\int_t^{-\infty} g(zy, y)\,y\,\mathrm{d}z = -\int_{-\infty}^{t} g(zy, y)\,y\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{t} g(zy, y)|y|\,\mathrm{d}z$ für $y < 0$ gilt erhalten wir $P(\frac{X}{Y} \le t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} g(zy, y)|y|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$. Wir vertauschen die Integrale und schreiben statt z wieder x. Das ergibt $P(\frac{X}{Y} \le t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} g(xy, y)|y|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, daher ist die Funktion $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(xy, y)|y|\,\mathrm{d}y$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $\frac{X}{Y}$. □

Bemerkung: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichten f und g, dann hat die Zufallsvariable $X + Y$ nach Satz 35 die Wahrscheinlichkeitsdichte $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\, g(y)\,\mathrm{d}y$, da $h(x, y) = f(x)\, g(y)$ nach Satz 33 eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X und Y ist. Wenn X und Y positiven Wertebereich besitzen (d.h. $f(x) = g(x) = 0$ für $x < 0$), dann ist $g(y) = 0$ für $y < 0$ und $f(x - y) = 0$ für $y > x$ und es gilt $(f * g)(x) := \int_0^x f(x - y)\, g(y)\,\mathrm{d}y$. Man bezeichnet die Funktion $f * g$ als die Faltung der Funktionen f und g. Genauso erhält man, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(xy)\, g(y)|y|\,\mathrm{d}y$ die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $\frac{X}{Y}$ ist.

Dazu rechnen wir zwei Anwendungen.

Satz 37: *Die Zufallsvariablen X und Y seien voneinander unabhängig, wobei X die $N(\mu_1, \sigma_1)$-Verteilung und Y die $N(\mu_2, \sigma_2)$-Verteilung besitzt. Dann besitzt die Zufallsvariable $X + Y$ die $N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$-Verteilung.*

Beweis: Sei $f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von X ist dann f_{μ_1,σ_1} und die von Y ist f_{μ_2,σ_2}. Setzt man in die Formel aus obiger Bemerkung ein, so erhält man

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu_1,\sigma_1}(x - y) f_{\mu_2,\sigma_2}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x-y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}y$$

als Wahrscheinlichkeitsdichte von $X + Y$. Wir formen den Exponenten um

$$\frac{(x-y-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} = \frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(y + C)^2$$

wobei $C = \frac{\mu_1\sigma_2^2 - \mu_2\sigma_1^2 - x\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. Es ist zu beachten, dass C zwar von x, jedoch nicht von y abhängt und daher bei der weiter unten folgenden Integration nach y als Konstante zu behandeln ist. Setzt man diesen umgeformten Exponenten ein, so folgt

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(y+C)^2}\,\mathrm{d}y$$

Führt man in diesem Integral die neue Variable $z = \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}(y+C)$ ein, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(y+C)^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\,\mathrm{d}z = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\sqrt{2\pi}$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\mathrm{d}z = 1$ gilt. Damit ergibt sich

$$h(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\,\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} = f_{\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}(x)$$

Das ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der $N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$-Verteilung. □

Der Satz 37 führt uns zu den reproduktiven Verteilungen. Bei diesen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist (eventuell unter gewissen Bedingungen) die Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen X und Y wieder vom gleichen Verteilungstyp:

Verteilungstyp	X	Y	$X+Y$
Binomial-verteilung	$B(n_1, p)$	$B(n_2, p)$	$B(n_1 + n_2, p)$
Poisson-verteilung	$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1 + \lambda_2)$
Normal-verteilung	$N(\mu_1, \sigma_1)$	$N(\mu_2, \sigma_2)$	$N(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$
Gamma-verteilung	$E(r_1, \lambda)$	$E(r_2, \lambda)$	$E(r_1 + r_2, \lambda)$

Beispiel 51: Seien X und Y unabhängig und beide $E(\lambda)$-verteilt. Welche Dichte hat $\frac{X}{Y}$?
Sei $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$. Das ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von X und Y. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\frac{X}{Y}$ ist dann $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(xy)f(y)|y|\,\mathrm{d}y$. Da $f(y) = 0$ für $y < 0$ gilt, erhält man $h(x) = \int_0^{\infty} f(xy)f(y)y\,\mathrm{d}y$. Da $f(xy) = 0$ für $x < 0$ und $y > 0$ gilt, ergibt sich $h(x) = 0$ für $x < 0$.
Es bleibt also $h(x)$ für $x \geq 0$ zu berechnen. In diesem Fall kann man einsetzen und erhält $h(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda xy}\lambda e^{-\lambda y}y\,\mathrm{d}y = \lambda^2\int_0^{\infty} e^{-\lambda(x+1)y}y\,\mathrm{d}y$. Mit Hilfe partieller Integration berechnet man $h(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, daher gilt $F(t) = 0$ für $x < 0$ und $F(t) = \frac{t}{1+t}$ für $t \geq 0$.

Bemerkung: Beim axiomatischen Zugang zur Wahrscheinlichkeit stellt sich die Frage, ob die neu definierten Objekte X^2 und $X+Y$ auch tatsächlich Zufallsvariablen (messbare Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$) sind. Wegen $X^2 \leq t \Leftrightarrow -\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}$ ist $X^2 \leq t$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Ereignis und somit ist X^2 eine Zufallsvariable. Dies gilt auch für andere stetige Funktionen statt der Quadratfunktion.
Für die Summe der Zufallsvariablen $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist folgendes Approximationsargument hilfreich:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) + Y(\omega) < t\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) < t - r \wedge Y(\omega) < r\}$$

Die rechte Menge ist offensichtlich in der linken Menge enthalten. Wenn andererseits

$X(\omega) + Y(\omega) < t$ für ein Element $\omega \in \Omega$ gilt, dann existiert einr rationale Zahl r mit $Y(\omega) < r < t - X(\omega)$. Da rechts eine abzählbare Vereinigung von Ereignissen (und damit wieder ein Ereignis) steht, ist $X + Y$ eine Zufallsvariable.

Das Resultat aus Satz 37 kann man auf eine Summe von n unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen verallgemeinern (wichtig für die Statistik). Dazu müssen wir auch die Definitionen verallgemeinern.

Definition: Man nennt die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig, wenn für alle $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(X_1 \le t_1 \wedge X_2 \le t_2 \wedge \cdots \wedge X_n \le t_n) = P(X_1 \le t_1)\, P(X_2 \le t_2) \ldots P(X_n \le t_n).$$

Definition: Eine integrierbare Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 1$ heißt gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, wenn für alle $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ gilt $P(X_1 \le t_1 \wedge \cdots \wedge X_n \le t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \ldots \int_{-\infty}^{t_n} g(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1$.

Satz 38: *Die kontinuierlichen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit den Wahrscheinlichkeitsdichten $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ sind unabhängig genau dann, wenn die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ mit $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1)\, f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$ eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ ist.*

Beweis: Analog Satz 33. $\square$

Satz 39: *Sind die kontinuierlichen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mit Wahrscheinlichkeitsdichten $f_1, f_2, \ldots, f_n$ unabhängig, dann ist für jedes $1 \le k \le n$ die Zufallsvariable $Y_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ kontinuierlich und $Y_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n$ sind unabhängig.*

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Induktion. Wegen $Y_1 = X_1$ ist der Induktionsanfang erfüllt. Sei nun die Induktionsvoraussetzung für $1 \le k < n$ erfüllt. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeitsdichte von Y_k mit h_k und schließen mit Satz 38, dass

$$g(y, x_{k+1}, \ldots, x_n) = h_k(y) f_{k+1}(x_{k+1}) \ldots f_n(x_n)$$

eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $Y_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n$ ist. Weiters gilt $Y_{k+1} = Y_k + X_{k+1}$. Wir setzen

$$B = \{(y, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k+1} : y + x_{k+1} \le t_{k+1}, x_{k+2} \le t_{k+2}, \ldots, x_n \le t_n\}$$

und verwenden eine höherdimensionale Verallgemeinerung von Satz 31, die genauso bewiesen wird. Mittels Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhalten wir

$$\begin{aligned}
&P(Y_{k+1} \le t_{k+1} \wedge X_{k+2} \le t_{k+2} \wedge \cdots \wedge X_n \le t_n) = P((Y_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n) \in B) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_{k+1}-y} \int_{-\infty}^{t_{k+2}} \ldots \int_{-\infty}^{t_n} h_k(y) f_{k+1}(x_{k+1}) f_{k+2}(x_{k+2}) \ldots f_n(x_n)\,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_{k+2}\,\mathrm{d}x_{k+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{t_{k+2}} \ldots \int_{-\infty}^{t_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_{k+1}-y} h_k(y) f_{k+1}(x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}\,\mathrm{d}y f_{k+2}(x_{k+2}) \ldots f_n(x_n)\,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_{k+2}
\end{aligned}$$

Wir erhalten durch die neue Variable $z = y + x_{k+1}$ und Vertauschung der Integrale

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_{k+1}-y} h_k(y) f_{k+1}(x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_{k+1}} h_k(y) f_{k+1}(z - y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{t_{k+1}} \int_{-\infty}^{\infty} h_k(y) f_{k+1}(z - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Setzt man $(f_{k+1} * h_k)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(y) f_{k+1}(z - y)\,\mathrm{d}y = h_{k+1}(z)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&P(Y_{k+1} \le t_{k+1} \wedge X_{k+2} \le t_{k+2} \wedge \cdots \wedge X_n \le t_n) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{t_{k+1}} \int_{-\infty}^{t_{k+2}} \ldots \int_{-\infty}^{t_n} h_{k+1}(z) f_{k+2}(x_{k+2}) \ldots f_n(x_n)\,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_{k+2}\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Somit ist $\tilde{g}(z, x_{k+2} \dots, x_n) = h_{k+1}(z) f_{k+2}(x_{k+2}) \dots f_n(x_n)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der nach Satz 38 unabhängigen Zufallsvariablen $Y_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$. $\square$

Satz 40: *Sind die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängig und alle $N(\mu, \sigma)$-verteilt, dann hat $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ die $N(n\mu, \sqrt{n}\,\sigma)$-Verteilung.*

Sei nun $X_1, X_2, X_3, \dots$ eine Folge von $N(\mu, \sigma)$-verteilten Zufallsvariablen, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind. Dann besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

die Standardnormalverteilung (Zentraler Grenzwertsatz für normalverteilte Zufallsvariablen).

Beweis: Sei $f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeitsdichte h_k von $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ mit Induktion. Es gilt $h_1(x) = f_{\mu,\sigma}(x)$, das ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von X_1. Angenommen $h_k(x) = f_{k\mu,\sqrt{k}\sigma}(x)$ ist bereits bewiesen. Nach Satz 39 sind auch die Zufallsvariablen $X_1 + \cdots + X_k$ und X_{k+1} unabhängig, daher gilt nun $h_{k+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(x-y) f_{\mu,\sigma}(y)\,\mathrm{d}y$. Aus Satz 37 folgt $h_{k+1}(x) = f_{(k+1)\mu,\sqrt{k+1}\sigma}(x)$. Damit ist $h_n(x) = f_{n\mu,\sqrt{n}\sigma}(x)$ durch Induktion bewiesen und $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ hat die $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$-Verteilung. Die Aussage über Z_n folgt nun unmittelbar aus Satz 25. $\square$

Bemerkungen: Der Zentrale Grenzwertsatz gilt als *Konvergenzsatz* auch ohne die Annahme der Normalverteilung der Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$, sofern diese unabhängigen Zufallsvariablen alle die gleiche Verteilungfunktion F mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 besitzen (d.h. $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ und $\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ für alle $i \in \mathbb{N}$). Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq t) = \Phi(t)$$

Eine derartige Konvergenz bezeichnet man in der Stochastik als *Konvergenz in Verteilung*. Beim Satz 40 ist diese Konvergenz trivialerweise erfüllt.

Wenn nun die Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvaiablen mit gemeinsamer Erfolgswahrscheinlichkeit p sind (d.h. X_i nimmt bei Erfolg des i-ten Bernoulliexperiments den Wert 1 an, bei Misserfolg den Wert 0), dann gilt $\mu = p$ und $\sigma^2 = p(1-p)$ und die Summe $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ist $B(n,p)$-verteilt. Wir erhalten dann den *Zentralen Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace*, das heißt für jede Zahl $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right) = \Phi(t)$$

Dies entspricht dem Grenzwert der Normalverteilungsapproximation der Binomialverteilung (ohne Stetigkeitskorrektur). Dieser Satz kann durch den lokalen Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace (Satz 28) und eine Fehlerabschätzung zwischen Summe und Integral bewiesen werden. Der Beweis des allgemeinen Zentralen Grenzwertsatzes erfordert die Theorie der charakteristischen Funktionen.

3. Erwartungswert und Varianz

In diesem Kapitel leiten wir einige Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz her. Wir geben die Bewiese nur für diskrete Zufallsvariable. Die Formeln gelten auch für kontinuierliche Zufallsvariable, aber die Beweise sind im kontinuierlichen Fall viel schwieriger. Die Grundlage für das Rechnen mit Erwartungswerten bildet der folgende Satz.

Satz 41: *(Erwartungswert einer Funktion von Zufallsvariablen)*
(a) *Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Es sei weiters X eine Zufallsvariable und $Z = \gamma(X)$ (zum Beispiel: wenn $\gamma(x) = x^2$, dann $Z = X^2$). Dann gilt*

$$\mathrm{E}(Z) = \textstyle\sum_{i \in S} \gamma(i) w(i)$$

wobei $(w(i))_{i \in S}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor von X ist.
(b) *Sei $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Seien X und Y Zufallsvariable und $Z = \gamma(X, Y)$ (zum Beispiel: wenn $\gamma(x, y) = x + y$, dann $Z = X + Y$). Dann gilt*

$$\mathrm{E}(Z) = \textstyle\sum_{i \in S} \sum_{j \in T} \gamma(i, j) u(i, j)$$

wobei $(u(i, j))_{i \in S, j \in T}$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor von X und Y ist.
In beiden Fällen setzen wir die absolute Konvergenz der angegebenen Reihe voraus.

Beweis: Wir beweisen (a). Wir berechnen zuerst den Wahrscheinlichkeitsvektor von Z. Sei $U = \gamma(S)$. Da X Werte in S annimmt, nimmt Z Werte in U an. Für $k \in U$ gilt

$$P(Z = k) = P(\gamma(X) = k) = P(X \in \gamma^{-1}(k)) = P(X \in \gamma^{-1}(k) \cap S) = \textstyle\sum_{i \in \gamma^{-1}(k) \cap S} w(i)$$

Also ist durch $v(k) = \sum_{i \in \gamma^{-1}(k) \cap S} w(i)$ mit $k \in U$ der Wahrscheinlichkeitsvektor von Z gegeben. Aus der Definition des Erwartungswertes folgt jetzt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \textstyle\sum_{k \in U} k\, v(k) = \sum_{k \in U} \sum_{i \in \gamma^{-1}(k) \cap S} k\, w(i) \\
&= \textstyle\sum_{k \in U} \sum_{i \in \gamma^{-1}(k) \cap S} \gamma(i)\, w(i) && \text{weil } k = \gamma(i) \text{ aus } i \in \gamma^{-1}(k) \text{ folgt} \\
&= \textstyle\sum_{i \in \gamma^{-1}(U) \cap S} \gamma(i)\, w(i) \\
&= \textstyle\sum_{i \in S} \gamma(i)\, w(i) && \text{weil } \gamma^{-1}(U) \cap S = S
\end{aligned}$$

Die Bedingung für diese Umformungen ist die absolute Konvergenz von $\sum_{i \in S} \gamma(i)\, w(i)$, denn dann kann die Reihe beliebig umgeordnet werden. Damit ist (a) bewiesen.
Der Beweis von (b) verläuft analog. Man ersetzt S durch $S \times T$ und stellt sich den Buchstaben i fettgedruckt als ein Element von $S \times T$ vor. □

Bemerkung: Nun sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ und sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die entsprechende Formel für den Erwartungswert von $Z = \gamma(X)$ lautet

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

Die Bedingung für die Existenz dieses Erwartungswerts ist die Konvergenz des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(x)|\, f(x)\, \mathrm{d}x$.

Jetzt können wir die Eigenschaften des Erwartungswertes herleiten.

Satz 42: *Seien X und Y Zufallsvariable mit Erwartungswert und a und b in $\mathbb{R}$. Es gilt*
(a) $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$
(b) $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$
(c) $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\, \mathrm{E}(Y)$, *wenn X und Y unabhängig sind.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für den Fall diskreter Zufallsvariable durch.

(a) Wir wenden Satz 41 (a) mit $\gamma(x) = ax + b$ an. Ist $(w(i))_{i\in S}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor der Zufallsvariablen X, so haben wir

$$\mathrm{E}(aX + b) = \textstyle\sum_{i\in S}(ai + b)\, w(i) = a \sum_{i\in S} i\, w(i) + b \sum_{i\in S} w(i) = a\mathrm{E}(X) + b$$

da $\sum_{i\in S} i\, w(i) = \mathrm{E}(X)$ und $\sum_{i\in S} w(i) = 1$ gilt.

(b) Sei $(u(i,j))_{i\in S, j\in T}$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor von X und Y. Aus Satz 41 (b) mit $\gamma(x,y) = x+y$ folgt $\mathrm{E}(X+Y) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T}(i+j)\, u(i,j)$. Aus Satz 41 (b) mit $\gamma(x,y) = x$ folgt $\mathrm{E}(X) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} i\, u(i,j)$. Aus Satz 41 (b) mit $\gamma(x,y) = y$ folgt $\mathrm{E}(Y) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} j\, u(i,j)$. Das ergibt $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

(c) Sei $(w_1(i))_{i\in S}$ der Wahrscheinlichkeitsvektor von X und $(w_2(j))_{j\in T}$ der von Y. Da die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, ist durch $u(i,j) = w_1(i)\, w_2(j)$ mit $i \in S$ und $j \in T$ der gemeinsame Wahrscheinlichkeitsvektor von X und Y gegeben. Wir wenden Satz 41 (b) mit $\gamma(x,y) = xy$ an und erhalten

$$\mathrm{E}(XY) = \textstyle\sum_{i\in S}\sum_{j\in T} ij\, u(i,j) = \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} ij\, w_1(i)\, w_2(j) = \sum_{i\in S} i\, w_1(i) \sum_{j\in T} j\, w_2(j)$$

Wegen $\mathrm{E}(X) = \sum_{i\in S} i\, w_1(i)$ und $\mathrm{E}(Y) = \sum_{j\in T} j\, w_2(j)$ ist damit auch (c) gezeigt. □

Die Varianz $V(X)$ einer Zufallsvariablen X kann man ganz allgemein definieren durch $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}((X-m)^2)$ mit $m = \mathrm{E}(X)$. Die in Kapitel III.2 gegebene Definition der Varianz folgt aus Satz 41 mit $\gamma(x) = (x-m)^2$. Aus den in Satz 42 bewiesenen Eigenschaften des Erwartungswertes kann man die Eigenschaften der Varianz herleiten.

Satz 43: *Seien X und Y Zufallsvariable mit Varianz und a und b in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$

(b) $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$

(c) $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$, *wenn X und Y unabhängig sind*

(d) $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\,\mathrm{COV}(X,Y)$, *wobei die Kovarianz definiert ist durch*

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))\big) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Beweis: Wir setzen $m = \mathrm{E}(X)$ und $l = \mathrm{E}(Y)$.

(a) Mit Hilfe von Satz 42 (a) und (b) folgt

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}((X-m)^2) = \mathrm{E}(X^2 - 2mX + m^2) = \mathrm{E}(X^2) - 2m\mathrm{E}(X) + m^2 = \mathrm{E}(X^2) - m^2$$

Damit ist $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ gezeigt.

(b) Aus Satz 42 (a) folgt $\mathrm{E}(aX + b) = am + b$. Damit erhalten wir

$$\mathrm{V}(aX+b) = \mathrm{E}((aX + b - am - b)^2) = \mathrm{E}(a^2(X-m)^2) = a^2\mathrm{E}((X-m)^2) = a^2\mathrm{V}(X)$$

wobei noch einmal Satz 42 (a) verwendet wurde, und (b) ist gezeigt.

(c) Aus Satz 42 (b) folgt $\mathrm{E}(X+Y) = m + l$. Mit Hilfe von (a) erhalten wir

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{E}((X+Y)^2) - (m+l)^2 = \mathrm{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - m^2 - 2ml - l^2$$

Da $\mathrm{E}(X^2 + 2XY + Y^2) = \mathrm{E}(X^2) + 2\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y^2)$ aus Satz 42 (b) und $\mathrm{E}(XY) = ml$ aus Satz 42 (c) folgt, ergibt sich aus obiger Gleichung

$$\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{E}(X^2) - m^2 + \mathrm{E}(Y^2) - l^2 = \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y)$$

wobei nochmals (a) verwendet wurde.

(d) Beim Punkt (c) wurde bereits $\mathrm{V}(X+Y) = \mathrm{E}(X^2) + 2\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}(Y^2) - m^2 - 2ml - l^2 = \mathrm{V}(X) + 2\big(\mathrm{E}(XY) - ml\big) + \mathrm{V}(Y)$ gezeigt. Weiters gilt nach Satz 42 (b) und Satz 42 (a) $\mathrm{E}\big((X-m)(Y-l)\big) = \mathrm{E}(XY) - m\mathrm{E}(Y) - l\mathrm{E}(X) + ml = \mathrm{E}(XY) - ml$. □

Bemerkung: Die Aussagen in Satz 42 (b) und Satz 43 (c) können induktiv auf endliche Summen von Zufallsvariablen ausgedehnt werden.

Zum Abschluss behandeln wir noch das schwache Gesetz der grossen Zahlen für Zufallsvariablen. Aus diesem Gesetz ergibt sich die große Bedeutung des Erwartungswerts und die Anwendung des Gesetzes auf unabhängige Bernoulli-Zufallsvariablen ergibt die theoretische Begründung der Wahrscheinlichkeit als Limes relativer Häufigkeiten.

Satz 44 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen) *Sei $X_1, X_2, X_3, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilungsfunktion F mit Erwartungswert μ (d.h. $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ für alle $i \in \mathbb{N}$), sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Konvergenz*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Bei unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \ldots$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \mathrm{E}(X_i)$ ergibt sich für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

wobei $N_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ die Anzahl der Erfolge unter den ersten n Versuchen ist.

Beweis: Wir führen den Beweis für diskrete Zufallsvariablen unter der Voraussetzung, dass $\mathrm{V}(X_i) = \sigma$ für $i \in \mathbb{N}$ gilt. Der Beweis ohne die Voraussetzung einer Varianz (nur der Erwartungswert wird vorausgesetzt) bedient sich der eher technischen Methode des „Abschneidens“ großer Werte der Zufallsvariablen und wird daher nicht behandelt.

Zuerst zeigen wir die sogenannte Tschebyscheff-Ungleichung. Sei Y eine diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsvektor $(w(i))_{i\in S}$, sodass $\mathrm{E}(Y^2) = \sum_{i\in S} i^2\, w(i)$ existiert. Mit Satz 15 gilt für jede Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ und $B = \{i \in S : |i| \geq \varepsilon\}$ die Ungleichung

$$P(|Y| \geq \varepsilon) = \sum_{i\in B} w(i) \leq \sum_{i\in B} \frac{i^2}{\varepsilon^2} w(i) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i\in B} i^2\, w(i) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i\in S} i^2\, w(i) = \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}(Y^2),$$

denn für $i \in B$ gilt $i^2 \geq \varepsilon^2$. Nun setzen wir

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu = \frac{X_1 - \mu}{n} + \frac{X_2 - \mu}{n} + \cdots + \frac{X_n - \mu}{n}$$

Nach Satz Satz 42 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ induktiv $\mathrm{E}(Y_n) = 0$, nach Satz 43 folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen induktiv

$$\mathrm{E}(Y_n^2) = \mathrm{V}(Y_n) = n\,\mathrm{V}\left(\frac{X_1 - \mu}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{V}(X_1)$$

Daher gilt $P(|Y_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\,\varepsilon^2}\mathrm{V}(X_1)$ und der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung: Das starke Gesetz der grossen Zahlen behandelt diese Problemstellung in einem stärkeren Konvergenzbegriff der axiomatischen Wahrscheinlichkeit. In dieser „fast sicheren Konvergenz“ gelten dann

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} = \mu\right\}\right) = 1$$

beziehungsweise

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{n} = p\right\}\right) = 1$$

V. Statistik

In der Statistik geht es darum, aus gesammelten Daten Schlussfolgerungen zu ziehen. Um eine zu messende Größe möglichst genau zu bestimmen, führt man die Messung mehrmals durch. Um die durchschnittliche Füllmenge von Milchflaschen zu ermitteln, zieht man eine zufällige Stichprobe von n Flaschen und misst deren Inhalte. Um den Anteil der Wähler der Partei A bei der bevorstehenden Wahl vorherzusagen, befragt man n zufällig ausgewählte Wahlberechtigte. Um zu testen, ob ein Würfel fair ist, wirft man den Würfel n Mal und versucht aus den geworfenen Augenzahlen Schlüsse zu ziehen.

Wir werden zwei statistische Verfahren kennenlernen, nämlich Konfidenzintervalle und statistische Tests. Ein Konfidenzintervall ist ein Intervall, das aus den erhobenen Daten berechnet wird und die gesuchte Größe (die durchschnittliche Füllmenge, den Anteil der Wähler der Partei A) mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit enthält. Bei einem statistischen Test geht es darum, eine im voraus aufgestellte Aussage (Hypothese) durch die erhobenen Daten zu entkräften oder zu bestätigen.

1. Parameterschätzer

Bevor wir auf die eigentlichen statistische Verfahren eingehen, beschäftigen wir uns mit dem Schätzen von Parametern aus gesammelten Daten. Die Daten werden aus einer zuvor festgelegten Grundgesamtheit gezogen. Beispiele für Grundgesamtheiten sind die von einer Firma abgefüllten Waschmittelpackungen oder die erwachsenen Einwohner Österreichs. Aus dieser Grundgesamtheit wird eine zufällige Stichprobe vom Umfang n gezogen und ausgewertet. Wir bezeichnen die gefundenen Werte mit $x_1, x_2, \dots, x_n$. Das können zum Beispiel die Füllmengen von n zufällig gewählten Waschmittelpackungen sein oder die Körpergrößen von n zufällig gewählten Personen.

Aus dieser Stichprobe soll der Mittelwert in der Grundgesamtheit geschätzt werden. In den Beispielen sind das die durchschnittliche Füllmenge der Waschmittelpackungen und die durchschnittliche Körpergröße der erwachsenen Österreicher. Als Schätzer für diesen Mittelwert nehmen wir den Wert m, dessen durchschnittliche quadratische Abweichung $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m)^2$ von den Stichprobenwerten $x_1, x_2, \dots, x_n$ minimal wird. Es gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2 - 2m\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j + m^2$$

Das ist eine quadratische Funktion in m, die ihr Minimum für $m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$ annimmt. Üblicherweise nennt man

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j$$

das Stichprobenmittel. Es ist ein Schätzer für den Mittelwert in der Grundgesamtheit. Die durchschnittliche quadratische Abweichung $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m)^2$ der Stichprobenwerte vom Stichprobenmittel nennt man die Stichprobenvarianz. Wir bezeichnen sie mit v. Sie schätzt die Größe der Schwankungen um den Mittelwert. Genauere Aussagen über den Mittelwert in der Grundgesamtheit gewinnt man mit Hilfe von Konfidenzintervallen, die später behandelt werden.

Wir untersuchen zwei zusammenhängende Größen, zum Beispiel Körpergröße und Körpergewicht. Aus den erwachsenen Einwohnern Österreichs wird eine zufällige Stichprobe vom Umfang n gezogen. Die j-te Person habe Körpergröße x_j und Körpergewicht y_j. Das ergibt zwei miteinander verbundene Stichproben $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $y_1, y_2, \dots, y_n$. Seien m_x und m_y die Stichprobenmittel und v_x und v_y die Stichprobenvarianzen. Analog zur Stichprobenvarianz definieren wir die Stichprobencovarianz dieser beiden Stichproben durch

$$c_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m_x)(y_j - m_y).$$

Es gilt dann $v_x = c_{xx}$ und $v_y = c_{yy}$. Wir nehmen an, dass die Körpergrößen in der Stichprobe nicht alle gleich groß sind. Dasselbe nehmen wir für die Körpergewichte an. Dann gilt $v_x > 0$ und $v_y > 0$.

Wir stellen die Frage, ob man eine lineare Beziehung $y = ax + b$ zwischen Körpergröße und Körpergewicht finden kann. Wir schätzen die Parameter a und b aus den Stichproben, sodass die Quadratsumme der Abstände der beobachteten Körpergewichte von den durch die Formel $y = ax + b$ vorhergesagten Körpergewichten minimal werden. Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned} c_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m_x)(y_j - m_y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j m_y - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m_x y_j + m_x m_y \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - m_x m_y - m_x m_y + m_x m_y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - m_x m_y \end{aligned}$$

Es folgt $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = m_x m_y + c_{xy}$. Als Spezialfälle erhalten wir $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = m_x^2 + v_x$ und $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = m_y^2 + v_y$. Mit Hilfe dieser Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - ax_j - b)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j^2 + a^2x_j^2 + b^2 - 2ax_jy_j - 2by_j + 2abx_j) \\ &= m_y^2 + v_y + a^2m_x^2 + a^2v_x + b^2 - 2am_xm_y - 2ac_{xy} - 2bm_y + 2abm_x \\ &= (m_y - am_x - b)^2 + (a\sqrt{v_x} - \tfrac{c_{xy}}{\sqrt{v_x}})^2 + v_y - \tfrac{c_{xy}^2}{v_x} \end{aligned}$$

Daraus erkennt man, dass $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - ax_j - b)^2$ genau dann minimal wird, wenn $a = \frac{c_{xy}}{v_x}$ und $b = am_x - m_y$ gilt. Somit ist $y = ax + b = \frac{c_{xy}}{v_x}(x - m_x) + m_y$ die am besten angepasste Gerade. Sie geht durch den Punkt (m_x, m_y) und hat Anstieg $\frac{c_{xy}}{v_x}$.

Wir definieren den Korrelationskoeffizienten der beiden Stichproben durch $k_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sqrt{v_x v_y}}$. Dieser hat folgende Eigenschaften

Satz 45: *Für den Korrelationskoeffizienten k_{xy} gilt $-1 \le k_{xy} \le 1$. Ist $k_{xy} = 1$, dann liegen die Punkte (x_j, y_j) für $1 \le j \le n$ auf einer Geraden mit Anstieg > 0. Ist $k_{xy} = -1$, dann liegen diese Punkte auf einer Geraden mit Anstieg < 0.*

Beweis: Nach obiger Rechnung ist $v_y - \frac{c_{xy}^2}{v_x} = v_y(1 - k_{xy}^2)$ das Minimum der Quadratsumme $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - ax_j - b)^2$. Es muss ≥ 0 sein. Es folgt $k_{xy}^2 \le 1$, das heißt $-1 \le k_{xy} \le 1$. Gilt $k_{xy}^2 = 1$, dann gilt auch $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - ax_j - b)^2 = 0$, das heißt die Punkte (x_j, y_j) für $1 \le j \le n$ liegen alle auf der Geraden $y = ax + b$ mit Anstieg $a = \frac{c_{xy}}{v_x}$. Ist $k_{xy} = 1$, dann gilt $c_{xy} > 0$ und somit $a > 0$. Ist $k_{xy} = -1$, dann gilt $c_{xy} < 0$ und somit $a < 0$. □

Der Korrelationskoeffizienten k_{xy} ist eine Maßzahl dafür, wie sehr die Punktemenge $\{(x_j, y_j) : 1 \le j \le n\}$ von der am besten angepassten Gerade abweicht. Je näher k_{xy} bei 1 oder -1 liegt, umso besser lässt sich diese Punktemenge durch eine Gerade approximieren. Je näher k_{xy} bei 0 liegt, umso weniger ist das möglich.

Wir haben hier bereits gezogene Stichproben behandelt. In diesem Fall liegen n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vor. Allerdings sind diese Werte Ergebnisse eines Zufallsexperiments, nämlich des zufälligen Ziehens einer Stichprobe. Daher werden wir sie im Folgenden auch als Zufallsvariable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ schreiben. Da es sich um die unabhängige Wiederholung ein und desselben Zufallsvorgangs handelt, setzen wir die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ als unabhängig voraus und gehen von derselben Verteilung aus. Somit stimmen auch die Erwartungswerte und Varianzen überein und es folgt mittels Satz 42 für die Zufallsvariable des Mittelwerts $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$:

$$\mathrm{E}(M) = \frac{1}{n}\big(\mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)\big) = \mathrm{E}(X_1) = \cdots = \mathrm{E}(X_n)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit folgt für die Varianz von M mittels Satz 43:

$$\mathrm{V}(M) = \mathrm{V}\big(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\big) = \frac{1}{n^2}(\mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n)) = \frac{1}{n}\mathrm{V}(X_1) = \cdots = \frac{1}{n}\mathrm{V}(X_n)$$

Während der Erwartungswert des Mittelwerts bei steigender Anzahl n konstant ist, nehmen die Varianz mit $1/n$ und die Standardabweichung mit $1/\sqrt{n}$ ab. Damit werden große Abweichungen von M von seinem Erwartungswert $\mathrm{E}(X_1) = \cdots = \mathrm{E}(X_n)$ mit steigendem Stichprobenumfang n immer unwahrscheinlicher.

Wir berechnen nun noch den Erwartungswert der Zufallsvariablen $\sum_{j=1}^{n}(X_j - M)^2$ mit den Sätzen 36 und 37. Im Verlauf der Rechnung wird die Zufallsvariable $X_j\,M$ in die Summe von $X_j\,(M - \frac{1}{n}X_j) = X_j\,\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{j-1} + X_{j+1} + \cdots + X_n)$ (d.h. ein Produkt von zwei unabhängigen Zufallvariablen) und $\frac{1}{n}X_j^2$ zerlegt:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\big(\sum_{j=1}^{n}(X_j - M)^2\big) = \sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}((X_j - M)^2) = \sum_{j=1}^{n}\big(\mathrm{E}(X_j^2) - \mathrm{E}(2X_jM) + \mathrm{E}(M^2)\big) = \\
&= n\big(\mathrm{V}(X_1) + (\mathrm{E}(X_1))^2\big) - 2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}\big(X_j(M - \frac{1}{n}X_j)\big) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}(X_j^2) + n\,\mathrm{E}(M^2) = \\
&= n\big(\mathrm{V}(X_1) + (\mathrm{E}(X_1))^2 + \mathrm{V}(M) + (\mathrm{E}(M))^2\big) - 2\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}(X_j)\,\mathrm{E}\big(M - \frac{1}{n}X_j\big) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}(X_j^2) \\
&= (n+1)\,\mathrm{V}(X_1) + 2n(\mathrm{E}(X_1))^2 - 2n(\mathrm{E}(X_1))^2\,\frac{n-1}{n} - 2\,\mathrm{V}(X_1) - 2\,(\mathrm{E}(X_1))^2 = \\
&= (n-1)\,\mathrm{V}(X_1)
\end{aligned}$$

Somit besitzt die Zufallsvariable

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - M)^2$$

den Erwartungswert $\mathrm{E}(S) = \mathrm{V}(X_1) = \cdots = \mathrm{V}(X_n)$. Daher verwendet man für die Stichprobenvarianz oft eine korrigierte Version

$$v_x^* = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - m_x)^2$$

mit dem Nenner $n-1$, denn bei dieser handelt es sich um eine sogenannte erwartungstreue Schätzfunktion.

2. Konfidenzintervalle für normalverteilte Messwerte

Misst man eine (physikalische) Größe mehrmals, so werden die Messwerte wegen zufälliger Störungen beim Messvorgang leicht voneinander abweichen. Ebenso sind Abmessungen von Werkstücken aus einer Serienproduktion und Packungsfüllmengen zufälligen Schwankungen unterworfen. Diese zufälligen Schwankungen nimmt man üblicherweise als normalverteilt an, sodass die Messergebnisse $N(\mu, \sigma)$-verteilte Zufallsvariable sind. Dabei ist μ die zu messende unbekannte Größe beziehungsweise der Erwartungswert einer Abmessung oder Füllmenge und σ gibt die Genauigkeit des Messgerätes, der Produktionsmethode oder der Abfüllanlage an. Auf σ kann man in der Regel nicht unmittelbar Einfluß nehmen.

Man führt den Messvorgang n Mal durch, die dabei gemessenen Werte $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bilden eine Stichprobe. Jede dieser n Zufallsvariablen hat nach den oben gemachten Annahmen die $N(\mu, \sigma)$-Verteilung. Da die Messungen unabhängig voneinander durchgeführt werden, sind auch die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig.

Um die unbekannte Größe μ ausreichend genau zu bestimmen, gibt man ein $\gamma \in (0, 1)$ vor (übliche Werte für γ sind 0,95 oder 0,99) und berechnet aus den gemessenen Werten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ein Intervall I, das den unbekannten Parameter μ mit Wahrscheinlichkeit γ enthält. So ein Intervall I nennt man γ-Konfidenzintervall für die Größe μ. Für γ gibt es verschiedene Namen, wie zum Beispiel Sicherheitswahrscheinlichkeit oder Konfidenzniveau. Das Konfidenzintervall ist eine Zufallsvariable und hängt von den gemessenen Werten $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ab, also von zufälligen Einflüssen. Führt man so eine Serie von n Messungen mehrere Male durch und berechnet aus jeder das γ-Konfidenzintervall, dann wird man verschiedene Intervalle erhalten. Auch wird μ nicht immer im Konfidenzintervall enthalten sein. Ist zum Beispiel $\gamma = 0{,}95$, dann wird das Konfidenzintervall den festen Parameter μ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % enthalten, das heißt bei wiederholter Durchführung einer Serie von n Messungen und Bestimmung des Konfidenzintervalls für jede einzelne Serie wird sich μ im Durchschnitt bei jeder zwanzigsten Serie außerhalb des Intervalls befinden. Es ist daher methodisch nicht korrekt, eine einzelne Serie von n Messungen durchzuführen, daraus ein Konfidenzintervall zu ermitteln und zu behaupten: μ liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von γ in dem Konfidenzintervall. Dieses eine Konfidenzintervall enthält den unbekannten, aber festen Parameter μ oder es enthält den Parameter eben nicht.

Um dieses so definierte γ-Konfidenzintervall zu berechnen, benötigen wir folgende Definition.

Definition: Für $\beta \in (0, 1)$ sei z_β die eindeutige Lösung von $\Phi(z_\beta) = 1 - \beta$. Diese Lösung ist eindeutig, da $\Phi : \mathbb{R} \to (0, 1)$ eine invertierbare Abbildung ist (Satz 26 (c)).

Die Werte von z_β findet man in einer Tabelle. Das im folgenden Satz bestimmte Intervall heißt zweiseitiges γ-Konfidenzintervall. Wir nehmen an, dass wir die Genauigkeit des Messgerätes oder Produktionsvorgangs, also σ, kennen.

Satz 46: *Sei $0 < \gamma < 1$ gegeben. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige $N(\mu, \sigma)$-verteilte Messwerte, wobei σ bekannt ist. Sei $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ der Mittelwert der Messwerte (das sogenannte Stichprobenmittel) und $\beta = \frac{1-\gamma}{2}$. Für $I = [M - \frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}}, M + \frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}}]$ gilt dann $P(\mu \in I) = \gamma$, das heißt I ist ein γ-Konfidenzintervall für μ.*

Beweis: Nach Satz 40 hat $\sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ die $N(0, 1)$-Verteilung. Daher gilt

$$P(-z_\beta \leq \sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma} \leq z_\beta) = \Phi(z_\beta) - \Phi(-z_\beta) = \Phi(z_\beta) - (1-\Phi(z_\beta)) = 1-\beta-\beta = \gamma$$

Wir formen dieses Ereignis um

$$-z_\beta \leq \sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma} \leq z_\beta \Leftrightarrow -\frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}} \leq M-\mu \leq \frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow M-\frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq M+\frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \mu \in I$$

Setzt man dieses umgeformte Ereignis oben ein, so erhält man $P(\mu \in I) = \gamma$, das gewünschte Resultat. □

Bemerkung: In den formalen Umformungen im Beweis wurde ein Intervall I für den Parameter μ ermittelt, sodass für alle Parameter $\mu \in I$ das ermittelte Stichprobenmittel M oberhalb des β-Quantils und unterhalb des $1-\beta$-Quantils der betreffenden $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$-Normalverteilung liegt. Das heißt, für einen Parameter im Konfidenzintervall ist die erhaltene Stichprobe nicht zu unwahrscheinlich.

Jetzt ist es leicht Beispiele zu rechnen. Man braucht ja nur in die Formel einsetzen.

Beispiel 52: Eine unbekannte Größe μ wird 25 Mal gemessen. Die Genauigkeit des Messvorgangs wird mit $\sigma = 5$ cm angegeben. Als Mittelwert der Messwerte ergibt sich 3,24 m. Gesucht ist ein 95 %-Konfidenzintervall.

Wir setzen in die Formel ein. Wegen $\gamma = 0{,}95$ folgt $\beta = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}025$. Man findet $z_\beta = 1{,}96$ in einer Tabelle. Jetzt erhalten wir $\frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}05 \cdot 1{,}96}{\sqrt{25}} = 0{,}02$ und daraus ergibt sich $I = [3{,}24 - 0{,}02; 3{,}24 + 0{,}02] = [3{,}22; 3{,}26]$ für das 95 %-Konfidenzintervall.

Beispiel 53: Die Füllgewichte von Waschmittelpackungen einer bestimmten Sorte seien $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Die Genauigkeit der Abfüllmaschine wird mit 0,02 kg angegeben. Man wiegt 10 zufällig gewählte Packungen und erhält die Inhalte $1{,}05; 0{,}99; 1{,}03; 1{,}03; 1{,}01; 1{,}02; 1{,}01; 0{,}97; 1{,}01; 0{,}98$ in kg. Gesucht ist ein 99 %-Konfidenzintervall für den durchschnittlichen Packungsinhalt μ.

Wegen $\gamma = 0{,}99$ folgt $\beta = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}005$. Man findet $z_\beta = 2{,}58$ in einer Tabelle. Weiters berechnen wir $M = \frac{1}{10}(1{,}05 + 0{,}99 + \cdots + 0{,}98) = \frac{10{,}1}{10} = 1{,}01$ und $\frac{\sigma z_\beta}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}02 \cdot 2{,}58}{\sqrt{10}} = 0{,}019$. Daraus ergibt sich dann $I = [1{,}01 - 0{,}019; 1{,}01 + 0{,}019] = [0{,}992; 1{,}029]$ für das 99 %-Konfidenzintervall.

Bevor man ein Konfidenzintervall ermittelt, muss man zwei Entscheidungen treffen. Die eine ist die Wahl der statistischen Sicherheit γ, die angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit das Konfidenzintervall die unbekannte Größe μ enthält. Die andere ist die Wahl des Stichprobenumfangs. Hat man sich für eine statistische Sicherheit γ entschieden, dann ist auch z_β festgelegt und man kann die Länge $|I|$ des Konfidenzintervalls I durch den Stichprobenumfang n steuern. Aus der Formel in Satz 46 folgt $|I| = \frac{2\sigma z_\beta}{\sqrt{n}}$. Vergrößert man den Stichprobenumfang n, dann wird das Konfidenzintervall kleiner.

Beispiel 54: Wieviele Packungen muss man in Beispiel 53 überprüfen, damit die Länge des 99 %-Konfidenzintervalls höchstens 0,01 kg beträgt?

Für $\gamma = 0{,}99$ haben wir $z_\beta = 2{,}58$ gefunden. Es wird verlangt, dass $|I| = \frac{2\sigma z_\beta}{\sqrt{n}} \leq 0{,}01$ gilt. Daraus folgt $\sqrt{n} \geq \frac{2\sigma z_\beta}{0{,}01} = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 2{,}58}{0{,}01} = 10{,}32$ und $n \geq 106{,}5$. Man muss mindestens 107 Packungen überprüfen.

Neben den zweiseitigen Konfidenzintervallen gibt es auch einseitige Konfidenzintervalle, die wir im nächsten Satz behandeln.

Satz 47: *Sei $0 < \gamma < 1$ gegeben. Seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige $N(\mu, \sigma)$-verteilte Messwerte, wobei σ bekannt ist. Sei $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ der Mittelwert der Messwerte. Dann sind die beiden Intervalle $I_1 = (-\infty, M + \frac{\sigma z_{1-\gamma}}{\sqrt{n}}]$ und $I_2 = [M - \frac{\sigma z_{1-\gamma}}{\sqrt{n}}, \infty)$ γ-Konfidenzintervalle für μ.*

Beweis: Weil $\sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma}$ die $N(0,1)$-Verteilung hat, folgt

$$P(-z_{1-\gamma} \le \sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(-z_{1-\gamma}) = \Phi(z_{1-\gamma}) = \gamma$$

Daraus folgt $P(\mu \le M + \frac{\sigma z_{1-\gamma}}{\sqrt{n}}) = \gamma$, also $P(\mu \in I_1) = \gamma$. Somit ist das Intervall I_1 ein γ-Konfidenzintervall für μ.
Analog folgt aus $P(\sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma} \le z_{1-\gamma}) = \Phi(z_{1-\gamma}) = \gamma$, dass $P(\mu \in I_2) = \gamma$ gilt. Somit ist auch I_2 ein γ-Konfidenzintervall für μ. □

Beispiel 55: Aus den in Beispiel 53 erhobenen Packungsinhalten soll das einseitige nach oben offene 99%-Konfidenzintervall I_2 berechnet werden.

Es wurde $\sigma = 0{,}02$ kg angegeben und $M = 1{,}01$ kg berechnet. Für $\gamma = 0{,}99$ findet man $z_{1-\gamma} = 2{,}33$ in einer Tabelle. Es folgt $\frac{\sigma z_{1-\gamma}}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}02 \cdot 2{,}33}{\sqrt{10}} = 0{,}0145$ und daraus $I_2 = [0{,}9955; \infty)$.

Häufig treten auch Situationen auf, in denen der Wert von σ nicht bekannt ist. In diesem Fall ersetzt man σ durch den aus der Stichprobe $X_1, X_2, \dots, X_n$ berechneten Schätzwert

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - M)^2}.$$

Man kann zeigen, dass die Zufallsvariable $\sqrt{n}\frac{M-\mu}{S}$ die sogenannte $T(m)$-Verteilung (auch Student-Verteilung) mit Parameter $m = n-1$ hat. Davon abgesehen geht man so vor wie oben. Sei $\beta = \frac{1-\gamma}{2}$ und $v_{\beta,m}$ genauso definiert wie z_β, wobei jedoch statt der $N(0,1)$-Verteilung die $T(m)$-Verteilung verwendet wird. Man findet $v_{\beta,m}$ in einer Tabelle, mit steigendem $m = n-1$ nähert sich der Wert $v_{\beta,m}$ von oben her dem Wert z_β an. Das Intervall

$$K = \left[M - \frac{S v_{\beta,n-1}}{\sqrt{n}}, M + \frac{S v_{\beta,n-1}}{\sqrt{n}}\right]$$

ist dann ein γ-Konfidenzintervall für μ. Entsprechendes gilt für die einseitigen Konfidenzintervalle, man ersetzt σ durch S und $z_{1-\gamma}$ durch $v_{1-\gamma,n-1}$.

Beispiel 56: In Beispiel 53 sei σ unbekannt. Aus den dort angegebenen Packungsinhalten bestimme man ein 99%-Konfidenzintervall.

Aus $\gamma = 0{,}99$ folgt $\beta = 0{,}005$ und man findet $v_{\beta,9} = 3{,}25$ in einer Tabelle. Der Stichprobenumfang n beträgt 10. In Beispiel 53 wurde $M = 1{,}01$ ermittelt. Weiters ergibt sich

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{9}((1{,}05 - 1{,}01)^2 + (0{,}99 - 1{,}01)^2 + (1{,}03 - 1{,}01)^2 + \dots + (0{,}98 - 1{,}01)^2)} = 0{,}024$$

Jetzt folgt $\frac{S v_{\beta,n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}024 \cdot 3{,}25}{\sqrt{10}} = 0{,}025$ und $K = [0{,}985; 1{,}035]$. Das erhaltene Konfidenzintervall ist nun größer als in Beispiel 53.

3. Konfidenzintervalle für Prozentsätze (relative Häufigkeiten)

Es sollen unbekannte Prozentsätze (relative Häufigkeiten oder Anteile) geschätzt werden, zum Beispiel der unbekannte Anteil der Raucher in der Gesamtbevölkerung, der Prozentsatz der Wähler der Partei A, oder die relative Häufigkeit von defekten Glühlampen in der Tagesproduktion einer Firma.

Wir gehen so vor: Wir legen eine Grundgesamtheit fest (Gesamtbevölkerung, Menge aller Wahlberechtigten, Tagesproduktion der Firma) und interessieren uns für eine Eigenschaft (ist Raucher, wählt Partei A, ist defekt), die in der Grundgesamtheit mit relativer Häufigkeit p auftritt. Wir geben eine Sicherheitswahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) γ vor und ziehen eine zufällige Stichprobe vom Umfang n mit Zurücklegen aus der Grundgesamtheit. Sei X die Anzahl mit der die Eigenschaft in der Stichprobe auftritt (Anzahl der Raucher, Anzahl der Wähler der Partei A, Anzahl der defekten Glühlampen). Aus dieser Anzahl X soll ein Intervall I berechnet werden, das p mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq \gamma$ enthält. Man nennt I ein γ-Konfidenzintervall für die relative Häufigkeit (den Prozentsatz) p. Dabei ist wieder zu beachten, dass I vom Zufall abhängt, nicht aber p, das zwar unbekannt, aber fest ist.

Wenn mit Zurücklegen gezogen wird, dann hat X die $B(n,p)$-Verteilung. Üblicherweise ist der Stichprobenumfang n groß genug, um die Approximation durch die Normalverteilung zu rechtfertigen. Wir nehmen daher an, dass die Zufallsvariable X die Verteilungsfunktion der $N(\mu,\sigma)$-Verteilung hat, wobei $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Auch ist es so, dass in der Praxis natürlich ohne Zurücklegen gezogen wird, also schon in der Annahme der Binomialverteilung für X ein Fehler enthalten ist. Die Stichprobe ist jedoch gegenüber der Grundgesamtheit, aus der gezogen wird, so klein, dass auch dieser Fehler vernachlässigt werden kann.

Um ein γ-Konfidenzintervall zu berechnen, verwenden wir den folgenden Hilfssatz, der leicht zu beweisen ist.

Hilfssatz A: *Die Funktion $s(x) = \sqrt{x(1-x)}$ für $x \in [0,1]$ stellt einen Halbkreis mit Mittelpunkt $(\frac{1}{2}, 0)$ und Radius $\frac{1}{2}$ dar. Insbesondere ist s monoton wachsend auf $[0, \frac{1}{2}]$, hat das Maximum $\frac{1}{2}$ im Punkt $\frac{1}{2}$ und ist monoton fallend auf $[\frac{1}{2}, 1]$.*

Satz 48: *Sei p die unbekannte relative Häufigkeit einer Eigenschaft in der Grundgesamtheit. Sei n der Stichprobenumfang und X die Anzahl mit der die Eigenschaft in der Stichprobe auftritt. Man wählt $\gamma \in (0,1)$. Sei $\beta = \frac{1-\gamma}{2}$ und $I = [\frac{1}{n}X - \frac{z_\beta}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{n}X + \frac{z_\beta}{2\sqrt{n}}]$. Dann gilt $P(p \in I) \geq \gamma$, das heißt I ist ein γ-Konfidenzintervall für p.*

Beweis: Da wir für X die Verteilungsfunktion der $N(\mu,\sigma)$-Verteilung mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ annehmen, hat $Y = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ die Verteilungsfunktion Φ. Daraus folgt

$$P(-z_\beta \leq Y \leq z_\beta) = \Phi(z_\beta) - \Phi(-z_\beta) = \Phi(z_\beta) - (1 - \Phi(z_\beta)) = 1 - \beta - \beta = \gamma$$

Wir formen dieses Ereignis um

$$\begin{aligned} -z_\beta \leq Y \leq z_\beta \ &\Leftrightarrow\ -\frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{n}X - p \leq \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \\ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{n}X - \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \leq p \leq \frac{1}{n}X + \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)} \end{aligned}$$

Sei $\tilde{I} = [\frac{1}{n}X - \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}, \frac{1}{n}X + \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}]$. Wir haben $P(p \in \tilde{I}) = \gamma$ gezeigt. Nun gilt $\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$ für alle $p \in [0,1]$ nach dem Hilfssatz. Ersetzen wir $\sqrt{p(1-p)}$ in $\tilde{I}$

durch $\frac{1}{2}$, so wandert der linke Endpunkt nach links und der rechte Endpunkt nach rechts. Wir erhalten dadurch das Intervall I. Es gilt also $\tilde{I} \subseteq I$. Ist $p \in \tilde{I}$ erfüllt, dann auch $p \in I$. Aus $P(p \in \tilde{I}) = \gamma$ folgt daher $P(p \in I) \geq \gamma$. □

Bemerkung: Im Beweis von Satz 48 sind wir etwas großzügig vorgegangen. Um das im Intervall $\tilde{I}$ vorkommende unbekannte p loszuwerden, haben wir das Maximum der Funktion $s : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ statt $s(p)$ eingesetzt und damit das Konfidenzintervall zum Intervall I vergrößert. Wir vergleichen die Längen $|I|$ und $|\tilde{I}|$ dieser beiden Intervalle. Der Quotient $\frac{|\tilde{I}|}{|I|} = 2\sqrt{p(1-p)}$ gibt an, um wieviel $\tilde{I}$ kleiner als I ist. Ist $0{,}3 \leq p \leq 0{,}7$, dann gilt $1 \geq 2\sqrt{p(1-p)} \geq 0{,}9$, wie aus dem Hilfssatz leicht folgt. Daraus erhält man $|I| \geq |\tilde{I}| \geq 0{,}9|I|$. Ist $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$, dann gilt $1 \geq 2\sqrt{p(1-p)} \geq 0{,}8$, wie wieder aus dem Hilfssatz folgt. Daraus erhält man $|I| \geq |\tilde{I}| \geq 0{,}8|I|$.

Weiß man also, dass das unbekannte p zwischen 0,3 und 0,7 liegt, so ist I ein gutes Konfidenzintervall. Das gilt auch noch, wenn p zwischen 0,2 und 0,8 liegt. Je näher jedoch p bei 0 oder 1 liegt, umso unbrauchbarer wird I, weil es dann viel zu groß ist.

Beispiel 57: In einer Stichprobe von $n = 400$ Wahlberechtigten waren 164 Wähler der Partei A. Gesucht ist ein 95 %-Konfidenzintervall für den Anteil p der A-Wähler unter allen Wahlberechtigten.

Wir berechnen das Intervall I aus Satz 48. Wegen $\gamma = 0{,}95$ folgt $\beta = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}025$. Man findet $z_\beta = 1{,}96$ in einer Tabelle. Jetzt erhalten wir $\frac{z_\beta}{2\sqrt{n}} = \frac{1{,}96}{2\sqrt{400}} = 0{,}049$. Wegen $\frac{1}{n}X = \frac{164}{400} = 0{,}41$ folgt $I = [0{,}361; 0{,}459]$.

Beispiel 58: Wie groß muss man den Stichprobenumfang n wählen, wenn die Länge des 95 %-Konfidenzintervalls I höchstens 0,02 sein soll?

Die Länge von I ist $\frac{z_\beta}{\sqrt{n}}$. Es wird also verlangt, dass $\frac{z_\beta}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ gilt. Für $\gamma = 0{,}95$ wurde $z_\beta = 1{,}96$ in Beispiel 57 ermittelt. Es folgt $\sqrt{n} \geq \frac{1{,}96}{0{,}02} = 98$, das heißt $n \geq 9604$.

Genauso wie das zweiseitige Konfidenzintervall I in Satz 48 berechnet man auch die einseitigen γ-Konfidenzintervalle $I_1 = (-\infty, \frac{1}{n}X + \frac{z_{1-\gamma}}{2\sqrt{n}}]$ und $I_2 = [\frac{1}{n}X - \frac{z_{1-\gamma}}{2\sqrt{n}}, \infty)$. Da p aber eine relative Häufigkeit ist und daher immer im Intervall $[0,1]$ liegt, kann man auch $I_1 = [0, \frac{1}{n}X + \frac{z_{1-\gamma}}{2\sqrt{n}}]$ und $I_2 = [\frac{1}{n}X - \frac{z_{1-\gamma}}{2\sqrt{n}}, 1]$ schreiben.

Beispiel 59: Für das Umfrageergebnis aus Beispiel 57 soll das nach oben offene einseitige 95 %-Konfidenzintervall I_2 berechnet werden.

Für $\gamma = 0{,}95$ finden wir $z_{1-\gamma} = 1{,}65$ in einer Tabelle. Es folgt $\frac{z_{1-\gamma}}{2\sqrt{n}} = \frac{1{,}65}{2\sqrt{400}} = 0{,}041$. Wegen $\frac{1}{n}X = \frac{164}{400} = 0{,}41$ erhält man $I_2 = [0{,}369; 1]$.

Was soll man tun, wenn p in der Nähe von 0 oder von 1 liegt, sodass man das Konfidenzintervall I nicht mehr verwenden will? Eine – etwas unexakte – Möglichkeit besteht darin, dass man das im Beweis von Satz 48 berechnete Intervall $\tilde{I}$ nimmt und dort den unbekannten Parameter p durch die relative Häufigkeit $\frac{X}{n}$, die in der Stichprobe auftritt, ersetzt. Man erhält dadurch das Intervall

$$J = \left[\ \frac{X}{n} - \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}, \frac{X}{n} + \frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})}\ \right]$$

als γ-Konfidenzintervall für p, wobei wieder $\beta = \frac{1-\gamma}{2}$ ist. Diese Formel, auch als „Standardintervall“ bezeichnet, ist hinreichend genau aber nur intuitiv nachvollziehbar.

Beispiel 60: Der Anteil p der defekten Glühlampen in der Tagesproduktion einer Fabrik ist sicher kleiner als 10%. Man zieht eine Stichprobe von 1600 Glühlampen und findet 128 defekte darunter. Gesucht ist ein 99%-Konfidenzintervall für p.

Da p klein ist, berechnen wir J. Wegen $\gamma = 0{,}99$ folgt $\beta = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}005$. Man findet $z_\beta = 2{,}58$ in einer Tabelle. Weiters folgt $\frac{1}{n}X = \frac{128}{1600} = 0{,}08$. Jetzt erhalten wir $\frac{z_\beta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{X}{n}(1-\frac{X}{n})} = \frac{2{,}58}{\sqrt{1600}}\sqrt{0{,}08 \cdot 0{,}92} = 0{,}0175$. Daraus ergibt sich $J = [0{,}0625; 0{,}0975]$.
Für das Intervall I hätte man $I = [0{,}048; 0{,}112]$, also etwas viel schlechteres, erhalten.

Bemerkung: Es gibt auch eine Möglichkeit, auf exakte Weise ein Konfidenzintervall zu bestimmen. Wir gehen von der im Beweis von Satz 48 bewiesenen Gleichung

$$P(-z_\beta \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le z_\beta) = \gamma$$

aus und formen das darin vorkommende Ereignis um

$$\begin{aligned}
-z_\beta \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le z_\beta \;&\Leftrightarrow\; \frac{(X-np)^2}{np(1-p)} \le z_\beta^2 \\
&\Leftrightarrow\; X^2 - 2Xnp + n^2p^2 \le z_\beta^2 np - z_\beta^2 np^2 \\
&\Leftrightarrow\; p^2(n^2 + nz_\beta^2) - 2p(nX + \tfrac{1}{2}nz_\beta^2) + X^2 \le 0 \\
&\Leftrightarrow\; \lambda_1 \le p \le \lambda_2
\end{aligned}$$

wobei λ_1 und λ_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2(n^2 + nz_\beta^2) - 2\lambda(nX + \tfrac{1}{2}nz_\beta^2) + X^2 = 0$$

sind. Setzt man $K = [\lambda_1, \lambda_2]$, dann haben wir $P(p \in K) = \gamma$ bewiesen, das heißt K ist ein γ-Konfidenzintervall für p. Löst man diese quadratische Gleichung, so erhält man

$$K = \left[\, \frac{X + \frac{1}{2}z_\beta^2 - Y}{n + z_\beta^2}, \frac{X + \frac{1}{2}z_\beta^2 + Y}{n + z_\beta^2} \,\right] \quad \text{wobei} \quad Y = z_\beta\sqrt{\frac{X(n-X)}{n} + \frac{1}{4}z_\beta^2}$$

Dieses Konfidenzintervall K, auch „Wilson-Intervall", ist zwar komplizierter als I, aber theoretisch beweisbar und wesentlich genauer, wenn p in der Nähe von 0 oder 1 liegt.

Beispiel 61: Wir berechnen für das Beispiel 60 das Konfidenzintervall K. Es gilt
$Y = z_\beta\sqrt{\frac{X(n-X)}{n} + \frac{1}{4}z_\beta^2} = 2{,}58\sqrt{\frac{128(1600-128)}{1600} + \frac{1}{4}\cdot 2{,}58^2} = 28{,}19$
$X + \frac{1}{2}z_\beta^2 = 128 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}58^2 = 131{,}33$
$n + z_\beta^2 = 1600 + 2{,}58^2 = 1606{,}66$
Setzt man das in die obige Formel für K ein, so erhält man
$K = [\frac{131{,}33-28{,}19}{1606{,}66}, \frac{131{,}33+28{,}19}{1606{,}66}] = [0{,}0642; 0{,}0993]$.

Beispiel 62: Von 900 überprüften Transistoren waren 30 defekt. Gesucht ist ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil p von defekten Transistoren in der Gesamtproduktion.

Wegen $\gamma = 0{,}95$ folgt $\beta = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}025$. Man findet $z_\beta = 1{,}96$ in einer Tabelle. Berechnet man I, so ergibt sich $I = [\frac{30}{900} - \frac{1{,}96}{2\sqrt{900}}, \frac{30}{900} + \frac{1{,}96}{2\sqrt{900}}] = [0{,}0006, 0{,}066]$.

Zum Vergleich bestimmen wir das Konfidenzintervall K. Wir berechnen
$Y = z_\beta\sqrt{\frac{X(n-X)}{n} + \frac{1}{4}z_\beta^2} = 1{,}96\sqrt{\frac{30(900-30)}{900} + \frac{1}{4}\cdot 1{,}96^2} = 10{,}73$
$X + \frac{1}{2}z_\beta^2 = 30 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}96^2 = 30{,}96$ $\qquad n + z_\beta^2 = 900 + 1{,}96^2 = 903{,}84$
Setzt man das in die obige Formel für K ein, so erhält man
$K = [\frac{30{,}96-10{,}73}{903{,}84}, \frac{30{,}96+10{,}73}{903{,}84}] = [0{,}0224, 0{,}0461]$. Das Intervall I ist ca. dreimal so lang.

4. Statistische Tests für Prozentsätze

Statistische Tests verwendet man, um mittels einer Stichprobe eine Aussage über eine Grundgesamtheit nachzuweisen. Bei der Produktion von Glühlampen zum Beispiel kann man einen noch tolerierbaren Ausschussanteil p_0 festlegen. Der Hersteller will dann nachweisen, dass der unbekannte Anteil p an defekten Glühlampen $< p_0$ ist. Ein anderes Beispiel ist das Testen eines Medikaments. Das derzeit am Markt befindliche Medikament gegen eine bestimmte Krankheit hilft bei einem Prozentsatz p_0 der behandelten Patienten. Jetzt soll ein neues Medikament gegen dieselbe Krankheit auf den Markt gebracht werden. In einer klinischen Studie will man nachweisen, dass der noch unbekannte Prozentsatz p der behandelten Patienten, bei denen es hilft, größer als p_0 ist.

Die Vorgangsweise beim statistischen Test ist folgende: Es liegt eine Grundgesamtheit (Gesamtproduktion der Glühlampen, Menge aller Patienten) vor, in der eine Eigenschaft (Glühbirne defekt, Medikament hilft) mit unbekannter relativer Häufigkeit p auftritt. Das Gegenteil der nachzuweisenden Aussage wird als Hypothese H_0 und die nachzuweisende Aussage als Alternative H_1 formuliert. Im Beispiel mit den Glühlampen führt das zum Test

$$H_0 : p \geq p_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : p < p_0$$

Im zweiten Beispiel, wo das neue Medikament geprüft wird, wird

$$H_0 : p \leq p_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : p > p_0$$

getestet. Die Entscheidung für H_0 oder für H_1 wird auf Grund einer zufälligen Stichprobe getroffen, die aus der Grundgesamtheit gezogenen wird. Daher wird diese Entscheidung auch nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, die groß sein soll, richtig ausfallen. Man gibt eine Irrtumswahrscheinlichkeit α vor (typische Werte für α sind 0,05 und 0,01) und legt den Stichprobenumfang n fest. Dann zieht man eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit. Sei X die Anzahl (Häufigkeit), mit der die Eigenschaft in dieser zufälligen Stichprobe auftritt. Auf Grund dieser Anzahl X trifft man die Entscheidung, die Hypothese H_0 zu verwerfen oder sie beizubehalten. Die Entscheidungsregel soll jedoch so sein, dass die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H_0 zu verwerfen, obwohl sie richtig ist, höchstens α beträgt.

Wir suchen eine entsprechende Entscheidungsregel. Die möglichen Werte von X sind die Anzahlen, mit der die Eigenschaft in der Stichprobe vom Umfang n auftritt. Daher hat X den Wertebereich $S = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Wir wählen eine Teilmenge V von S und verwerfen die Hypothese H_0, wenn sich nach dem Ziehen der Stichprobe herausstellt, dass X in V liegt. Man nennt V den Verwerfungsbereich (Ablehnungsbereich) des Tests. Aus den oben durchgeführten Überlegungen ergeben sich folgende Bedingungen:

(1) V enthält die Werte aus S, die am meisten gegen H_0 (und daher für H_1) sprechen

(2) V ist maximal, aber so, dass $P(X \in V) \leq \alpha$ gilt, wenn H_0 richtig ist

Da H_0 verworfen wird, wenn X in V fällt, ist (1) klar. In (2) findet man die oben formulierte Bedingung. Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese H_0 zu verwerfen, das ist $P(X \in V)$, soll $\leq \alpha$ sein, wenn H_0 richtig ist. Unter dieser Bedingung soll jedoch V möglichst groß sein. Das Risiko, H_0 bei Richtigkeit zu verwerfen, kontrolliert man durch die Irrtumswahrscheinlichkeit α. Das Risiko, H_0 bei Unrichtigheit nicht zu verwerfen, macht man dadurch möglichst klein, dass man V maximal wählt.

Wir verwenden die in (1) und (2) formulierten Bedingungen, um den Verwerfungsbereich auszurechnen. Dazu führen wir eine Bezeichnung für die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung ein und beweisen einen Hilfssatz.

Definition: Für $0 \leq k \leq n$ definieren wir $\Psi_{n,p}(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, das heißt $\Psi_{n,p}(k) = P(X \leq k)$ für eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X.

Hilfssatz B: *Für festes n und k gilt $\Psi_{n,p}(k) \geq \Psi_{n,q}(k)$, wenn $p \leq q$ ist.*

Beweis: Wir definieren die Funktion $h(p)$ für $p \in (0,1)$ durch
$h(p) = \Psi_{n,p}(k) = \binom{n}{0}(1-p)^n + \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} + \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Der Satz ist bewiesen, wenn wir $h'(p) \leq 0$ zeigen. Mit Hilfe der Produktregel kann man die Summanden in obiger Summe der Reihe nach differenzieren. Man erhält

$$\begin{aligned} h'(p) = &-\binom{n}{0}n(1-p)^{n-1} + \binom{n}{1}(1-p)^{n-1} - \binom{n}{1}(n-1)p(1-p)^{n-2} \\ &+ \binom{n}{2}2p(1-p)^{n-2} - \binom{n}{2}(n-2)p^2(1-p)^{n-1} + \ldots \\ &\cdots + \binom{n}{k}kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - \binom{n}{k}(n-k)p^k(1-p)^{n-k-1} \end{aligned}$$

Da $\binom{n}{i-1}(n-i+1) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}(n-i+1) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}i = \binom{n}{i}i$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt, kürzen sich in dieser Summe immer zwei aufeinanderfolgende Summanden weg. Es bleibt nur der letzte Summand übrig, also

$$h'(p) = -\binom{n}{k}(n-k)p^k(1-p)^{n-k-1}$$

Da $h'(p) \leq 0$ gilt ist die Funktion h monoton fallend. Somit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Satz 49: *Sei p die unbekannte relative Häufigkeit, mit der eine Eigenschaft in der Grundgesamtheit auftritt. Der Stichprobenumfang sei n, die Irrtumswahrscheinlichkeit sei α und der durchzuführende Test sei $H_0 : p \leq p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$. Bestimmt man das minimale k_0, sodass $\Psi_{n,p_0}(k_0 - 1) \geq 1 - \alpha$ gilt, und wählt $V = \{k_0, k_0+1, \ldots, n\}$, dann erfüllt V die Bedingungen* (1) *und* (2) *für diesen Test, ist also der Verwerfungsbereich.*

Beweis: Die Zufallsvariable X, die die Häufigkeit angibt, mit der die Eigenschaft in der Stichprobe vom Umfang n auftritt, hat nach Satz 19 die $B(n,p)$-Verteilung.

Große Werte von X sprechen am meisten gegen die Hypothese H_0, die ja behauptet, dass die Eigenschaft in der Grundgesamtheit mit relativer Häufigkeit $\leq p_0$ vorkommt. Um (1) zu erfüllen, wählen wir daher $V = \{k_0, k_0+1, \ldots, n\}$ für ein k_0 als Verwerfungsbereich.

Um (2) zu erfüllen, muss V möglichst groß sein, aber $P(X \in V) \leq \alpha$, wenn H_0 gilt. Es gilt $P(X \in V) = P(X \geq k_0) = 1 - P(X \leq k_0 - 1) = 1 - \Psi_{n,p}(k_0 - 1)$, da ja X die $B(n,p)$-Verteilung hat. Daher ist k_0 minimal zu wählen, sodass aber $1 - \Psi_{n,p}(k_0 - 1) \leq \alpha$ für alle $p \leq p_0$ gilt. Aus dem Hilfssatz folgt $1 - \Psi_{n,p}(k_0 - 1) \leq 1 - \Psi_{n,p_0}(k_0 - 1)$ für alle $p \leq p_0$. Also ist (2) äquivalent dazu, k_0 minimal zu wählen, sodass $1 - \Psi_{n,p_0}(k_0 - 1) \leq \alpha$ gilt, das heißt $\Psi_{n,p_0}(k_0 - 1) \geq 1 - \alpha$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Beispiel 63: Für den Test $H_0 : p \leq 0{,}3$ gegen $H_1 : p > 0{,}3$ ist der Verwerfungsbereich bei einem Stichprobenumfang $n = 10$ und verschiedenen Irrtumswahrscheinlichkeiten gesucht.

Der Verwerfungsbereich für diesen Test ist $V = \{k_0, k_0+1, \ldots, 10\}$. Um k_0 zu bestimmen, erstellen wir eine Wertetabelle für die Abbildung $k \mapsto \Psi_{10;0,3}(k)$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Psi_{10;0,3}(k)$	0,028	0,149	0,383	0,650	0,850	0,953	0,989	0,998	1,000	1,000	1,000

Nach Satz 49 ist k_0 minimal zu wählen, sodass $\Psi_{10;0,3}(k_0 - 1) \geq 1 - \alpha$ gilt. Man kann k_0 jetzt leicht aus der Tabelle ablesen. Für $\alpha = 0{,}05$ ist $1 - \alpha = 0{,}95$ und $k_0 - 1 = 5$, also $V = \{6, 7, 8, 9, 10\}$. Für $\alpha = 0{,}02$ ist $1 - \alpha = 0{,}98$ und $k_0 - 1 = 6$, also $V = \{7, 8, 9, 10\}$. Für $\alpha = 0{,}01$ ist $1 - \alpha = 0{,}99$ und $k_0 - 1 = 7$, also $V = \{8, 9, 10\}$.

Satz 50: *Sei p die unbekannte relative Häufigkeit, mit der eine Eigenschaft in der Grundgesamtheit auftritt. Der Stichprobenumfang sei n, die Irrtumswahrscheinlichkeit sei α und der durchzuführende Test sei $H_0 : p \geq p_0$ gegen $H_1 : p < p_0$. Bestimmt man das maximale k_0, sodass $\Psi_{n,p_0}(k_0) \leq \alpha$ gilt, und wählt $V = \{0, 1, \ldots, k_0\}$, dann erfüllt V die Bedingungen (1) und (2) für diesen Test, ist also der Verwerfungsbereich.*

Beweis: Die Zufallsvariable X, die die Häufigkeit angibt, mit der die Eigenschaft in der Stichprobe vom Umfang n auftritt, hat nach Satz 19 die $B(n,p)$-Verteilung.

Kleine Werte von X sprechen am meisten gegen die Hypothese H_0, die ja einen Anteil $\geq p_0$ für die Eigenschaft in der Grundgesamtheit behauptet. Um (1) zu erfüllen, wählen wir $V = \{0, 1, \ldots, k_0\}$ für ein k_0 als Verwerfungsbereich.

Um (2) zu erfüllen, muss V möglichst groß sein, aber $P(X \in V) \leq \alpha$, wenn H_0 gilt. Da X die $B(n,p)$-Verteilung hat, und daher $P(X \in V) = P(X \leq k_0) = \Psi_{n,p}(k_0)$ gilt, bedeutet das, k_0 maximal zu wählen, sodass $\Psi_{n,p}(k_0) \leq \alpha$ für alle $p \geq p_0$ gilt. Aus dem Hilfssatz folgt $\Psi_{n,p}(k_0) \leq \Psi_{n,p_0}(k_0)$ für alle $p \geq p_0$. Daher ist (2) äquivalent dazu, k_0 maximal zu wählen, sodass $\Psi_{n,p_0}(k_0) \leq \alpha$ gilt. Damit ist der Satz ist bewiesen. □

Meistens ist der Stichprobenumfang n so groß, dass es schwer ist, mit der Binomialverteilung zu rechnen. Man verwendet dann wieder die Approximation durch die Normalverteilung. Für ganzzahliges k gilt ja $\Psi_{n,p}(k) \approx \Phi(\frac{k+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}})$ nach Kapitel 8.

Beispiel 64: Gesucht ist der Verwerfungsbereich für $H_0 : p \geq 0{,}5$ gegen $H_1 : p < 0{,}5$ bei einem Stichprobenumfang $n = 400$ und Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$.

Um den Verwerfungsbereich zu bestimmen, müssen wir das maximale k_0 finden, sodass $\Psi_{400;0,5}(k_0) \leq 0{,}01$ erfüllt ist. Wegen $\Psi_{400;0,5}(k_0) \approx \Phi(\frac{k_0+\frac{1}{2}-400\cdot 0,5}{\sqrt{400\cdot 0,5\cdot 0,5}}) = \Phi(\frac{k_0+\frac{1}{2}-200}{10})$ ist diese Ungleichung äquivalent zu $\Phi(\frac{k_0+\frac{1}{2}-200}{10}) \leq 0{,}01 = \Phi(-2{,}33)$. Da Φ streng monoton wachsend ist, folgt $\frac{k_0+\frac{1}{2}-200}{10} \leq -2{,}33$ und daraus $k_0 \leq 176{,}2$. Das maximale k_0, das diese Ungleichung erfüllt, ist 176. Daher ist $V = \{0, 1, 2, \ldots, 176\}$ der Verwerfungsbereich.

Um zu entscheiden, ob die Hypothese verworfen wird, ist es nicht notwendig, den Verwerfungsbereich zu bestimmen.

Satz 51: *Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei α. Nach dem Ziehen einer Stichprobe vom Umfang n stellt man fest, dass die Eigenschaft mit Häufigkeit s in dieser vorkommt.*
(a) *Sei V der Verwerfungsbereich für den Test $H_0 : p \leq p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$. Dann gilt $s \in V \ \Leftrightarrow\ \Psi_{n,p_0}(s-1) \geq 1-\alpha$.*
(b) *Sei V der Verwerfungsbereich für den Test $H_0 : p \geq p_0$ gegen $H_1 : p < p_0$. Dann gilt $s \in V \ \Leftrightarrow\ \Psi_{n,p_0}(s) \leq \alpha$.*

Beweis: Es gilt $\Psi_{n,p_0}(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p_0^i (1-p_0)^{n-i}$. Wenn man k vergrößert, dann wird auch $\Psi_{n,p_0}(k)$ größer. In (a) ist $V = \{k_0, k_0+1, \ldots, n\}$ der Verwerfungsbereich, wobei k_0 minimal gewählt wird mit $\Psi_{n,p_0}(k_0-1) \geq 1-\alpha$. Deshalb gilt $s \in V$, also $s \geq k_0$ genau dann, wenn $\Psi_{n,p_0}(s-1) \geq 1-\alpha$ ist.

Analog erhalten wir (b). Jetzt ist $V = \{0, 1, 2, \ldots, k_0\}$ der Verwerfungsbereich, wobei k_0 maximal gewählt wird mit $\Psi_{n,p_0}(k_0) \leq \alpha$. Da $\Psi_{n,p_0}(k)$ monoton wachsend in k ist, gilt $s \in V$, also $s \leq k_0$ genau dann, wenn $\Psi_{n,p_0}(s) \leq \alpha$ ist. □

Wendet man Satz 51 in Beispielen an, so kann man entweder mit der Binomialverteilung rechnen oder mit der Approximation durch die Normalverteilung. Dazu je ein Beispiel.

Beispiel 65: Bei Glühlampen wird ein Ausschussanteil von 0,015 toleriert. Ein Kunde möchte nachweisen, dass er größer ist. Aus einer Lieferung Glühlampen zieht er eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ und findet $s = 2$ defekte Glühlampen. Wird die Hypothese $H_0 : p \leq 0{,}015$ bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ abgelehnt?

Wir verwenden Satz 51 (a). Es wird genau dann verworfen, wenn $\Psi_{n,p_0}(s-1) \geq 1-\alpha$ ist, also $\Psi_{20;0{,}015}(1) \geq 0{,}95$. Es gilt $\Psi_{20;0{,}015}(1) = \binom{20}{0}0{,}985^{20} + \binom{20}{1}0{,}015 \cdot 0{,}985^{19} = 0{,}964$. Wegen $0{,}964 \geq 0{,}95$ wird die Hypothese H_0 verworfen. Wir können es daher als erwiesen ansehen, dass der Anteil an defekten Glühlampen über der Toleranzgrenze liegt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Irrtum ist dabei $\leq 0{,}05$.

Beispiel 66: Nach der letzten Statistik rauchen 40% der Männer. Nach einer Antiraucherkampagne findet man unter 1000 zufällig gewählten Männern 366 Raucher. Hat sich der Raucheranteil verringert? Man teste mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$.

Es geht darum, einen verringerten Raucheranteil nachzuweisen. Daher nehmen wir das Gegenteil als Hypothese und testen $H_0 : p \geq 0{,}4$ gegen $H_1 : p < 0{,}4$.

Wir verwenden Satz 51 (b). Es wird genau dann verworfen, wenn $\Psi_{n,p_0}(s) \leq \alpha$ ist, also $\Psi_{1000;0{,}4}(366) \leq 0{,}05$. Wir verwenden die Approximation durch die Normalverteilung. Es gilt $\Psi_{1000;0{,}4}(366) \approx \Phi(\frac{366+\frac{1}{2}-1000\cdot 0{,}4}{\sqrt{1000\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}) = \Phi(-2{,}16) = 1 - \Phi(2{,}16) = 0{,}016$. Wegen $0{,}016 \leq 0{,}05$ wird H_0 verworfen. Bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ kann es als erwiesen gelten, dass der Raucheranteil durch die Kampagne kleiner geworden ist.

Neben den bisher behandelten einseitigen Tests gibt es auch einen zweiseitigen Test. Sei p wieder die unbekannte relative Häufigkeit, mit der eine Eigenschaft in der Grundgesamtheit auftritt. Beim zweiseitigen Test wird

$$H_0 : p = p_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : p \neq p_0$$

getestet. Sei n der Stichprobenumfang und α die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit. Sei X die Häufigkeit, mit der die Eigenschaft in der Stichprobe auftritt. Die möglichen Werte von X sind $0, 1, 2, \dots, n$. Wir suchen einen Verwerfungsbereich V, der (1) und (2) erfüllt. Beim zweiseitigen Test sprechen sowohl kleine als auch große Werte von X gegen die Hypothese. Daher wählen wir $V = \{0, 1, \dots, k_0, k_1, k_1+1, \dots, n\}$. Wir wählen k_0 maximal mit $\Psi_{n,p_0}(k_0) \leq \frac{\alpha}{2}$ und k_1 minimal mit $1-\Psi_{n,p_0}(k_1-1) \leq \frac{\alpha}{2}$. Wenn jetzt $H_0 : p = p_0$ richtig ist, dann gilt $P(X \in V) = P(X \leq k_0) + P(X \geq k_1) = \Psi_{n,p_0}(k_0) + 1 - \Psi_{n,p_0}(k_1 - 1) \leq \alpha$. Wir haben also wieder V maximal gewählt, sodass die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese zu verwerfen, obwohl sie richtig ist, höchstens gleich α ist.

Beispiel 67: Wir prüfen einen Würfel. Sei p die unbekannte Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit), mit der 6 auftritt. Wir testen $H_0 : p = \frac{1}{6}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{6}$. Wir würfeln 80 Mal. Gesucht ist der Verwerfungsbereich bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$.

Wir bestimmen k_0 maximal, sodass $\Psi_{n,p_0}(k_0) \leq \frac{\alpha}{2}$ erfüllt ist, und k_1 minimal, sodass $\Psi_{n,p_0}(k_1 - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$ gilt. Mit Hilfe der Approximation durch die Normalverteilung erhalten wir $\Psi_{80,\frac{1}{6}}(k_0) \approx \Phi(\frac{k_0+\frac{1}{2}-80\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{80\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}) = \Phi(\frac{k_0-12{,}83}{3{,}33})$. Wegen $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025 = \Phi(-1{,}96)$ wird $\Psi_{n,p_0}(k_0) \leq \frac{\alpha}{2}$ zu $\frac{k_0-12{,}83}{3{,}33} \leq -1{,}96$, woraus $k_0 \leq 6{,}30$ folgt. Da k_0 maximal sein soll, ergibt sich $k_0 = 6$.

Genauso wird k_1 bestimmt. Es gilt $\Psi_{80,\frac{1}{6}}(k_1 - 1) \approx \Phi(\frac{k_1-\frac{1}{2}-80\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{80\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}) = \Phi(\frac{k_1-13{,}83}{3{,}33})$. Wegen $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975 = \Phi(1{,}96)$ ist das minimale k_1 zu bestimmen, sodass $\frac{k_1-13{,}83}{3{,}33} \geq 1{,}96$ gilt, woraus $k_1 \geq 20{,}36$ folgt. Da k_1 minimal sein soll, ergibt sich $k_1 = 21$. Wir erhalten den Verwerfungsbereich $V = \{0, 1, \ldots, 6, 21, 22, \ldots, 80\}$. Liegt die Anzahl, mit der 6 unter den 80 Würfen auftritt, in V, dann kann man bei Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 schließen, dass der Würfel die Augenzahl 6 nicht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ liefert.

Auch beim zweiseitigen Test kann man entscheiden, ob eine Zahl s in den Verwerfungsbereich V fällt, ohne diesen auszurechnen. Da sich V aus den Verwerfungsbereichen von zwei einseitigen Tests zusammensetzt, erhalten wir mit Hilfe von Satz 51

$$s \in V \quad \Leftrightarrow \quad s \leq k_0 \text{ oder } s \geq k_1 \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_{n,p_0}(s) \leq \tfrac{\alpha}{2} \text{ oder } \Psi_{n,p_0}(s-1) \geq 1 - \tfrac{\alpha}{2}$$

Das verwenden wir im folgenden Beispiel.

Beispiel 68: Bei 900 Münzenwürfen tritt 473 Mal „Kopf"auf. Ist die Münze fair?
Wir testen $H_0 : p = \frac{1}{2}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$. Um zu überprüfen, ob $s = 473$ im Verwerfungsbereich liegt, verwenden wir obige Bedingungen und Approximation durch die Normalverteilung.

$$\Psi_{n,p_0}(s) \approx \Phi\Big(\tfrac{s+\frac{1}{2}-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\Big) = \Phi\Big(\tfrac{473+\frac{1}{2}-900\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{900\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\Big) = \Phi(1{,}57) = 0{,}942$$

$$\Psi_{n,p_0}(s-1) \approx \Phi\Big(\tfrac{s-\frac{1}{2}-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\Big) = \Phi\Big(\tfrac{473-\frac{1}{2}-900\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{900\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\Big) = \Phi(1{,}50) = 0{,}933$$

Es gilt weder $\Psi_{n,p_0}(s) = 0{,}942 \leq \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ noch $\Psi_{n,p_0}(s-1) = 0{,}933 \geq 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$. Daher liegt $s = 473$ nicht im Verwerfungsbereich. Der Nachweis, dass die Münze unfair ist, ist nicht gelungen. Wir können keine Aussage machen.

Zum Abschluss dieses Kapitels beschäftigen wir uns noch mit der Bestimmung des Stichprobenumfangs bei den einseitigen Tests. Durch die Vorgangsweise bei einem Test wird garantiert, dass die Hypothese H_0 bei Richtigkeit nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit verworfen wird. Um auch zu garantieren, dass die Hypothese H_0 bei Unrichtigkeit mit großer Wahrscheinlichkeit verworfen wird, muss man den Stichprobenumfang groß genug machen.

Wir betrachten zuerst den Test $H_0 : p \leq p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$, der den Verwerfungsbereich $V = \{k_0, k_0+1, \ldots, n\}$ hat. Wir geben noch ein $p_1 > p_0$ und ein $\tilde{\alpha}$ vor und verlangen

(i) $\quad P(X \in V) \leq \alpha$ wenn $p \leq p_0$

(ii) $\quad P(X \in V) \geq 1 - \tilde{\alpha}$ wenn $p \geq p_1 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}) \leq \tilde{\alpha}$ wenn $p \geq p_1$

Die Bedingung (i) wird bei jedem Test verlangt. Sie besagt, dass H_0 bei Richtigkeit nur mit Wahrscheinlichkeit $\leq \alpha$ verworfen wird. Es kommt (ii) dazu: Wenn $p \geq p_1$ gilt (diese Hypothese ist nur etwas stärker als H_1), dann folgt mit Wahrscheinlichkeit $\geq 1 - \tilde{\alpha}$ $X \in V$ und die Hypothese H_0 wird verworfen. Dies entspricht einem zweiten Test mit $\tilde{H}_0 : p \geq p_1$ gegen $\tilde{H}_1 : p < p_1$ mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\tilde{\alpha}$ und Verwerfungsbereich $\tilde{V} = \{0, \ldots, k_0 - 1\} = \{0, \ldots, n\} \setminus V$. Wir bestimmen einen (möglichst kleinen) Stichprobenumfang n und k_0 so, dass (i) und (ii) gelten.

Nach dem Hilfssatz ist $P(X \in V) = 1 - \Psi_{n,p}(k_0 - 1)$ monoton wachsend in p. Daher sind (i) und (ii) äquivalent zu $1 - \Psi_{n,p_0}(k_0 - 1) \leq \alpha$ und $1 - \Psi_{n,p_1}(k_0 - 1) \geq 1 - \tilde{\alpha}$, das heißt zu $\Psi_{n,p_0}(k_0 - 1) \geq 1 - \alpha$ und $\Psi_{n,p_1}(k_0 - 1) \leq \tilde{\alpha}$.

Die Verwerfungsbereiche V und $\tilde{V}$ bilden eine Zerlegung von $\{0, \ldots, n\}$, daher gilt für diesen Test: Endet die Durchführung des Tests mit dem Verwerfen der Hypothese H_0, dann schließen wir, dass $p > p_0$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Irrtum ist dann $\leq \alpha$ wegen (i).

Endet die Durchführung des Tests hingegen mit dem Nichtverwerfen der Hypothese H_0, dann wird die Hypothese $\tilde{H}_0$ verworfen und wir schließen $p < p_1$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Irrtum ist dann $\leq \tilde{\alpha}$, da wegen (ii) ja $P(X \notin V) \leq \tilde{\alpha}$ für $p \geq p_1$ gilt. Wir haben also in jedem Fall eine Schlussfolgerung.

Wir betrachten auch noch den Test $H_0 : p \geq p_0$ gegen $H_1 : p < p_0$ mit dem Verwerfungsbereich $V = \{0, 1, \dots k_0\}$. Hier geben wir ein $p_1 < p_0$ und ein $\tilde{\alpha}$ vor und verlangen
(i) $P(X \in V) \leq \alpha$ wenn $p \geq p_0$
(ii) $P(X \in V) \geq 1 - \tilde{\alpha}$ wenn $p \leq p_1$
Die Bedingungen (i) und (ii) sind äquivalent zu $\Psi_{n,p_0}(k_0) \leq \alpha$ und $\Psi_{n,p_1}(k_0) \geq 1 - \tilde{\alpha}$. Wenn nun $X \in V$ eintritt, wird die Hypothese H_0 verworfen und wir schließen $p < p_0$. Wenn $X \notin V$ eintritt und die Hypothese H_0 nicht verworfen wird, dann schließen wir $p > p_1$.

Beispiel 69: Sei $p_0 = 0{,}1$ der Anteil an defekten Glühlampen, der toleriert wird. Es soll $H_0 : p \leq p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$ bei Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ getestet werden. Stichprobenumfang n und Verwerfungsbereich $V = \{k_0, k_0 + 1, \dots, n\}$ sind so zu bestimmen, dass H_0 mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0{,}95$ abgelehnt wird, wenn $p \geq 0{,}15$ gilt.

Es wird verlangt, dass (i) und (ii) erfüllt sind mit $\alpha = \tilde{\alpha} = 0{,}05$, mit $p_0 = 0{,}1$ und mit $p_1 = 0{,}15$. Wegen $\Psi_{n,p}(k_0 - 1) \approx \Phi(\frac{k_0 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}})$ erhalten wir die zu (i) und (ii) äquivalenten Ungleichungen

$$\Phi(\tfrac{k_0 - \frac{1}{2} - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot n}}) \geq 0{,}95 \qquad \text{und} \qquad \Phi(\tfrac{k_0 - \frac{1}{2} - 0{,}15n}{\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}85 \cdot n}}) \leq 0{,}05$$

$$\tfrac{k_0 - \frac{1}{2} - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot n}} \geq 1{,}65 \qquad \text{und} \qquad \tfrac{k_0 - \frac{1}{2} - 0{,}15n}{\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}85 \cdot n}} \leq -1{,}65$$

$$k_0 - \tfrac{1}{2} - 0{,}1n \geq 0{,}495\sqrt{n} \qquad \text{und} \qquad k_0 - \tfrac{1}{2} - 0{,}15n \leq -0{,}59\sqrt{n}$$

$$\tfrac{1}{2} + 0{,}1n + 0{,}495\sqrt{n} \leq k_0 \leq \tfrac{1}{2} + 0{,}15n - 0{,}59\sqrt{n}$$

Wir müssen ein möglichst kleines n und ein k_0 finden, sodass diese Ungleichungen erfüllt sind. Wegen $\frac{1}{2} + 0{,}1n + 0{,}495\sqrt{n} \leq \frac{1}{2} + 0{,}15n - 0{,}59\sqrt{n}$ folgt $1{,}085\sqrt{n} \leq 0{,}05n$ und $n \geq 470{,}89$. Wir rechnen für einige n nach:

n:	470	480	490	500	510	520
$\frac{1}{2} + 0{,}1n + 0{,}495\sqrt{n}$:	58,23	59,34	60,46	61,57	62,68	63,79
$\frac{1}{2} + 0{,}15n - 0{,}59\sqrt{n}$:	58,21	59,57	60,94	62,31	63,67	65,05

Da k_0 zwischen diesen Werten liegen muss, können wir $n = 500$ und $k_0 = 62$, also $V = \{62, 63, \dots, 500\}$ wählen (eine andere Lösung ist $n = 476$ und $k_0 = 59$). Zum Vergleich: Wenn wir für p_1 statt 0,15 den Wert 0,12 wählen, dann ergibt sich die Lösung $n = 2669$ und $k_0 = 293$.

5. Tests für den Erwartungswert einer Normalverteilung

Neben den Tests für Prozentsätze gibt es viele weitere statistische Tests. Wir behandeln hier kurz einen Test für den Erwartungswert μ einer Normalverteilung, der den Tests für Prozentsätze sehr ähnlich ist. Wir können von Beispiel 53 ausgehen. Die Füllgewichte von Waschmittelpackungen einer bestimmten Sorte sind $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Die Genauigkeit σ der Abfüllmaschine ist bekannt. Wir wollen überprüfen, ob das durchschnittliche Füllgewicht μ größer ist als $\mu_0 = 1$ kg. Das führt zum Test

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu > \mu_0$$

Wir ziehen eine Stichprobe $X_1, X_2, \dots, X_n$, das sind die Füllgewichte von n zufällig gewählten Waschmittelpackungen. Diese Zufallsvariablen sind dann unabhängig und alle $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Wir berechnen das Stichprobenmittel $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Die Zufallsvariable M nimmt Werte in $\mathbb{R}$ an. Wir legen eine Teilmenge V von $\mathbb{R}$ fest und verwerfen H_0 immer dann, wenn $M \in V$ gilt. Dieser Verwerfungsbereich V ist so zu bestimmen, dass wieder folgende Bedingungen gelten:

(1) V enthält die reellen Zahlen, die am meisten gegen H_0 (und daher für H_1) sprechen

(2) V ist maximal, aber so, dass $P(M \in V) \leq \alpha$ gilt, wenn H_0 richtig ist

Satz 52: *Der Stichprobenumfang sei n und die Irrtumswahrscheinlichkeit sei α. Für den Test $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ ist der Verwerfungsbereich dann*

$$V = [\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)\,,\, \infty)$$

Der Test $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$ hat den Verwerfungsbereich

$$V = (-\infty\,,\, \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(\alpha)] = (-\infty\,,\, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)]$$

Der zweiseitige Test $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ hat den Verwerfungsbereich

$$V = (-\infty\,,\, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})] \cup [\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\,,\, \infty)$$

Beweis: Es ist zu erwarten, dass M nahe μ liegt, da M das Stichprobenmittel ist und μ der Erwartungswert von M. Daher sprechen große Werte von M gegen H_0. Wegen (1) ist $V = [c, \infty)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ zu wählen.

Wegen (2) ist der Verwerfungsbereich V möglichst groß und somit c möglichst klein zu wählen, sodass $P(M \in V) = P(M \geq c) \leq \alpha$ gilt, wenn H_0 erfüllt ist, das heißt für alle $\mu \leq \mu_0$. Im Beweis von Satz 46 wurde gezeigt, dass $\sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma}$ die $N(0,1)$-Verteilung hat. Es folgt $P(M \geq c) = P(\sqrt{n}\frac{M-\mu}{\sigma} \geq \sqrt{n}\frac{c-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\sqrt{n}\frac{c-\mu}{\sigma})$. Somit gilt $P(M \geq c) \leq \alpha$ für alle $\mu \leq \mu_0$ genau dann, wenn $\Phi(\sqrt{n}\frac{c-\mu}{\sigma}) \geq 1 - \alpha$ für alle $\mu \leq \mu_0$ gilt. Das ist wieder äquivalent zu $\Phi(\sqrt{n}\frac{c-\mu_0}{\sigma}) \geq 1 - \alpha$, da Φ monoton wachsend ist. Unter dieser Bedingung ist c minimal zu wählen. Daher ist c die Lösung der Gleichung $\Phi(\sqrt{n}\frac{c-\mu_0}{\sigma}) = 1 - \alpha$. Löst man diese Gleichung, so ergibt sich $c = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha)$. Damit ist V berechnet.

Der Beweis für den Test $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$ erfolgt analog.

Der Verwerfungsbereich des zweiseitigen Tests $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ist durch große Abstände von M zu μ_0 gekennzeichnet. Wegen $\mu = \mu_0 \;\Leftrightarrow\; \mu \leq \mu_0 \wedge \mu \geq \mu_0$ setzt sich der Verwerfungsbereich von H_0 aus den Verwerfungsbereichen von zwei einseitigen Tests mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\frac{\alpha}{2}$ zusammen. $\square$

Beispiel 70: Die Füllgewichte von Waschmittelpackungen einer bestimmten Sorte seien $N(\mu, \sigma)$-verteilt. Die Genauigkeit der Abfüllmaschine wird mit 0,02 kg angegeben. Es soll $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$ mit $\mu_0 = 1$ kg getestet werden. Der Stichprobenumfang ist 10. Gesucht ist der Verwerfungsbereich V für die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$.

Wir finden $\Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}65$ in einer Tabelle. Es folgt $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}(1-\alpha) = \frac{0{,}02 \cdot 1{,}65}{\sqrt{10}} = 0{,}0104$. Somit ist $V = [1{,}0104, \infty)$ der Verwerfungsbereich. Für die Stichprobe aus Beispiel 53 haben wir $M = 1{,}01$ berechnet. Wegen $M \notin V$ wird die Hypothese H_0 nicht verworfen. Der Nachweis, dass die durchschnittliche Füllmenge mindestens 1 kg ist, ist nicht gelungen. (Man sollte einen größeren Stichprobenumfang wählen.)

VI. Anhang: Vorkenntnisse aus der Analysis

Es werden einige Resultate aus der Analysis zusammengestellt, die in der Stochastik verwendet werden. Dabei wird nur die Analysis in einer Variablen vorausgesetzt.

1. Reihen

In der Analysis wird zu einer Folge $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ von reellen Zahlen die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ als Grenzwert der Partialsummen $\sum_{j=0}^{n} u_j$ für $n \to \infty$ definiert. In der Wahrscheinlichkeitstheorie hat man Summen $\sum_{i \in S} w(i)$, wobei S eine endliche oder abzählbare Menge ist und $w(i) \geq 0$ für alle $i \in S$ gilt. Ist S endlich, dann ist diese Summe eindeutig, da man ja in beliebiger Reihenfolge addieren kann. Für abzählbares S muss man eine Anordnung der Reihenglieder wählen, um die Summe $\sum_{i \in S} w(i)$ als Grenzwert der Partialsummen berechnen zu können. Es stellt sich die Frage, ob man da nicht je nach Anordnung verschiedene Resultate erhalten kann.

Satz A1: *Sei S abzählbar und $w(i) \geq 0$ für alle $i \in S$. Dann hat $\sum_{i \in S} w(i)$ immer denselben Wert W, wie immer man die Reihe anordnet. Es ist jedoch auch $W = \infty$ möglich. Ist $W < \infty$, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge S_ε von S mit $W - \varepsilon < \sum_{i \in S_\varepsilon} w(i) \leq W$.*

Beweis: Sei $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ irgendeine Anordnung der Zahlen $w(i)$ mit $i \in S$. Zahlen, die öfter vorkommen, müssen natürlich auch in der Anordnung mit derselben Häufigkeit auftreten. Sei $A_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ die n-te Partialsumme. Da $a_j \geq 0$ für alle $j \geq 0$ gilt, ist die Folge $(A_n)_{n \geq 0}$ monoton wachsend. Ist sie beschränkt, dann existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} A_n$, den wir mit W bezeichnen. Ist sie unbeschränkt, dann schreiben wir $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ und setzen $W = \infty$. Es gilt auch $A_n \leq W$ für alle $n \geq 0$.
Sei $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ eine andere Anordnung der Zahlen $w(i)$ mit $i \in S$ und $B_n = \sum_{j=0}^{n} b_j$ die n-te Partialsumme. Wie oben existiert $B = \lim_{n\to\infty} B_n$, kann aber auch ∞ sein. Wieder gilt $B_n \leq B$ für alle $n \geq 0$.
Sei $n \geq 0$ beliebig. Da die Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_n$ irgendwo in der Folge $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ vorkommen, existiert eine Zahl m mit $\sum_{j=0}^{n} b_j \leq \sum_{j=0}^{m} a_j$, das heißt $B_n \leq A_m$, woraus $B_n \leq W$ folgt. Da das für alle $n \geq 0$ gilt, erhalten wir auch $\lim_{n\to\infty} B_n \leq W$, das heißt $B \leq W$. Ganz analog beweist man $W \leq B$. Damit ist $B = W$ gezeigt. Wie man die Reihenglieder auch anordnet, man erhält immer W als Grenzwert.
Sei $W < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} A_n = W$ existiert ein n_0 mit $A_{n_0} > W - \varepsilon$. Sei S_ε die Teilmenge von S, sodass $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}$ gerade die Zahlen $w(i)$ mit $i \in S_\varepsilon$ sind. Dann gilt $\sum_{i \in S_\varepsilon} w(i) = \sum_{j=0}^{n_0} a_j > W - \varepsilon$. Wir haben bereits gesehen, dass $A_{n_0} \leq W$ gilt, das heißt $\sum_{i \in S_\varepsilon} w(i) \leq W$. □

Satz A2: *Sei S abzählbar und sei $v(i) \in \mathbb{R}$ für alle $i \in S$. Wenn die Reihe $\sum_{i \in S} |v(i)|$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert (d.h. die Reihe $\sum_{i \in S} v(i)$ ist absolut konvergent), dann konvergiert die Reihe $\sum_{i \in S} v(i)$ für jede Anordnung der Reihenglieder gegen denselben endlichen Grenzwert.*

Beweis: Seien $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ zwei Anordnungen der Zahlen $v(i)$ mit $i \in S$. Wir erhalten $\left|\sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{m} a_j\right| \leq \left|\sum_{j=0}^{n} |a_j| - \sum_{j=0}^{m} |a_j|\right|$ aus der Dreiecksungleichung, aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ folgt nun die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ gegen einen endlichen Grenzwert A. Nach Satz A1 ist auch die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$ konvergent, daher ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ebenfalls konvergent gegen einen endlichen Grenzwert B. Wir wenden den Satz A1 auf $w(i) = |v(i)|$ an und erhalten für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge S_ε von S mit $\sum_{i\in S} |v(i)| - \varepsilon < \sum_{i\in S_\varepsilon} |v(i)| \leq \sum_{i\in S} |v(i)|$. Für jede endliche Teilmenge $\tilde{S}$ mit $S_\varepsilon \subseteq \tilde{S} \subseteq S$ folgt aus der Dreiecksungleichung $|\sum_{i\in\tilde{S}} v(i) - \sum_{i\in S_\varepsilon} v(i)| = |\sum_{i\in\tilde{S}\setminus S_\varepsilon} v(i)| \leq \sum_{i\in\tilde{S}\setminus S_\varepsilon} |v(i)| < \varepsilon$. Wir wählen nun ein $n \in \mathbb{N}$, sodass alle Glieder $v(i)$ mit $i \in S_\varepsilon$ sowohl in $a_0, a_1, \ldots, a_n$ als auch in $b_0, b_1, \ldots, b_n$ auftreten und $|\sum_{j=0}^{n} a_j - A| < \varepsilon$ sowie $|\sum_{j=0}^{n} b_j - B| < \varepsilon$ gelten. Dann folgt

$$|A - B| \leq |A - \sum_{j=0}^{n} a_j| + |\sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{i\in S_\varepsilon} v(i)| + |\sum_{i\in S_\varepsilon} v(i) - \sum_{j=0}^{n} b_j| + |\sum_{j=0}^{n} b_j - B| < 4\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $A = B$. □

2. Uneigentliches Integral

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem beschränkten Intervall integrierbar ist. Wir definieren die uneigentlichen Integrale mit einem unbeschränkten Integrationsintervall durch folgende Limiten, sofern diese existieren:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Das uneigentliche Integral über die gesamten reellen Zahlen definieren wir durch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit einer beliebigen Zahl $c \in \mathbb{R}$. Dieses Definition hängt nicht von der Zahl $c \in \mathbb{R}$ ab, denn bei einer anderen Wahl $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{c} > c$ wird das Integral $\int_c^{\tilde{c}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bei $\int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x$ addiert und bei $\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ subtrahiert um $\int_{-\infty}^{\tilde{c}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\tilde{c}}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ zu erhalten. Wenn zusätzlich $f \geq 0$ gilt, dann bilden die Integrale monoton wachsenden Folgen in n und die Limiten der Integrale existieren immer, können aber ∞ sein.

Die üblichen Rechenregeln für Integrale bleiben dabei erhalten. Ist zum Beispiel $a < u$, dann gilt $\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_u^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Lässt man n gegen ∞ gehen, dann erhält man $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_u^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Sind f und g Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}_0^+$, dann gilt $\int_a^n (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^n g(x)\,\mathrm{d}x$. Lässt man n gegen ∞ gehen, dann erhält man $\int_a^\infty (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$.

Eine andere Art von uneigentlichen Integralen erhält man, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polstelle hat. Hat f eine Polstelle bei b dann definiert man $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hat f eine Polstelle bei a dann definiert man $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Wenn $f \geq 0$ gilt, dann sind $\varepsilon \mapsto \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\varepsilon \mapsto \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ monoton fallende Abbildungen. Daher existieren die Grenzwerte, können aber ∞ sein. Gilt $a < c < b$ und hat f eine Polstelle bei c, dann schreibt man $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ als $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und hat dann die Polstelle wieder in den Endpunkten der Integrationsintervalle.

Die üblichen Rechenregeln für Integrale bleiben dabei erhalten. Hat man zum Beispiel $a < u < b$ und eine Polstelle bei b, dann gilt $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_u^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lässt man ε gegen 0 gehen, dann erhält man $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x + \int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Satz A3: *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt* $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{b-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Beweis: Hat f eine Polstelle bei b, dann ist das Integral uneigentlich. Wir wählen $a < b$. Nach Definition des uneigentlichen Integrals gilt dann $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Wegen $\int_{b-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ erhalten wir $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{b-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Hat f keine Polstelle bei b, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Konstante c mit $f(x) \le c$ für alle $x \in [b - \varepsilon_0, b]$. Für $\varepsilon < \varepsilon_0$ erhalten wir dann $0 \le \int_{b-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon c$. Daraus folgt $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{b-\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. □

3. Volumen

Für Volumsberechnungen führt man üblicherweise ein mehrdimensionales Integral ein. Man muss aber nicht unbedingt diesen Aufwand betreiben, sondern kann auch mit dem eindimensionalen Integral auskommen.

Sei E_x die Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch den Punkt $(x, 0, 0)$, die senkrecht auf die x-Achse steht. Der Körper, dessen Volumen V wir berechnen wollen, liege im $\mathbb{R}^3$ zwischen den Ebenen E_a und E_b. Für $x \in [a, b]$ sei $u(x)$ die Fläche des Schnittes der Ebene E_x mit dem Körper. Wir nehmen an, dass $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion ist.

Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Sei V_j das Volumen des Teils des Körpers, der zwischen den Ebenen $E_{x_{j-1}}$ und E_{x_j} liegt. Es gilt

$$(x_j - x_{j-1}) \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} u(x) \le V_j \le (x_j - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} u(x)$$

Wegen $\sum_{j=1}^n V_j = V$ erhalten wir dann

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} u(x) \le V \le \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} u(x)$$

Links steht die Untersumme und rechts die Obersumme des Integrals $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ zur Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Lässt man die Gitterweite der Zerlegung gegen 0 gehen, dann konvergieren beide Summen gegen dieses Integral. Wir erhalten daher

$$V = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

und haben damit eine Formel für das Volumen des Körpers gefunden.

Kennt man die Schnittflächen $u(x)$ des Körpers, so kann man das Volumen berechnen. Bei einem Drehkörper, der durch die Rotation des Flächenstücks unter der stetigen Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ um die x-Achse entsteht, ist das einfach. Für $x \in [a, b]$ ist die Fläche des Schnittes der Ebene E_x mit dem Drehkörper gleich $u(x) = \pi h(x)^2$. Deshalb ist

$$V = \pi \int_a^b h(x)^2\,\mathrm{d}x$$

die Formel für das Volumen des Drehkörpers.

Hier geht es jedoch darum, das Volumen über einem Gebiet $B \subseteq \mathbb{R}^2$ unter einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ zu berechnen. Wir schreiben $\int_B g(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$ für dieses Volumen analog zum eindimensionalen Integral $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, das die Fläche über dem Intervall $[a, b]$ unter der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ angibt. Es gelten entsprechende Rechenregeln, wie zum Beispiel $\int_{B\cup C} g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) + \int_C g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ für disjunkte Teilmengen B und C des $\mathbb{R}^2$, da sich Volumina über disjunkten Bereichen addieren.

Um mit obiger Methode das Volumen $\int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ über einem Gebiet $B \subseteq \mathbb{R}^2$ unter einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ zu berechnen, müssen wir annehmen, dass B ein sogenannter Normalbereich ist. Man nennt B einen Normalbereich, wenn ein Intervall $[a,b]$ und stetige Funktionen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \le \psi$ existieren, sodass

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

gilt. Die Fläche $u(x)$ des Schnittes der Ebene E_x mit dem Körper über B und unter g lässt sich dann durch das Integral $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y$ berechnen. Wir erhalten also

$$\int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

als Volumen über dem Gebiet B unter der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$.

Wir können bei allen diesen Überlegungen die Rolle der Koordinaten vertauschen. Lässt sich der Bereich B nicht nur als $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ schreiben, sondern auch als $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \varrho(y) \le x \le \chi(y)\}$ für ein Intervall $[c,d]$ und stetige Funktionen $\varrho : [c,d] \to \mathbb{R}$ und $\chi : [c,d] \to \mathbb{R}$ mit $\varrho \le \chi$, dann ergibt sich wie oben $\int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \int_{\varrho(y)}^{\chi(y)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Insbesondere haben wir

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_{\varrho(y)}^{\chi(y)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

erhalten. Ist B das Rechteck $[a,b] \times [c,d]$, dann wird das zu

$$(\ast) \qquad \int_a^b \int_c^d g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Diese Formel ist manchmal nützlich.

Approximation durch Rechteckmengen: Das Integral $\int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ soll durch Integrale über Mengen approximiert werden, die Vereinigung von endlich vielen Rechtecken sind, wobei B ein Normalbereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ ist.

Sei c eine obere Schranke für die Funktion g und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir finden eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ mit folgenden Eigenschaften: Für $1 \le j \le n$ existieren reelle Zahlen p_j und q_j, sodass $p_j < \varphi(x) < q_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j]$ und $\sum_{j=1}^n (q_j - p_j)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2c}$ gilt. Ebenso existieren reelle Zahlen u_j und v_j, sodass $u_j < \psi(x) < v_j$ für alle $x \in (x_{j-1}, x_j]$ und $\sum_{j=1}^n (v_j - u_j)(x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2c}$ gilt.

Wir definieren Rechtecke. Für $1 \le j \le n$ sei $C_j = (x_{j-1}, x_j] \times (q_j, u_j]$, wenn $q_j < u_j$ ist, und $C_j = \emptyset$, wenn $q_j \ge u_j$ ist. Für $2 \le j \le n$ sei $D_j = (x_{j-1}, x_j] \times (p_j, v_j]$ und es sei $D_1 = (a - \delta, x_1] \times (p_1, v_1]$, wobei $\delta > 0$ noch geeignet gewählt wird. Schließlich setzen wir $C = \bigcup_{j=1}^n C_j$ und $D = \bigcup_{j=1}^n D_j$, wobei jede dieser Vereinigungen eine Vereinigung von disjunkten Rechtecken ist.

Es gilt dann $C \subseteq B \subseteq D$. Weiters gilt $\int_C g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ und $\int_D g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \sum_{j=1}^n \int_{D_j} g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_D g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) - \int_C g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \sum_{j=1}^n \int_{D_j \setminus C_j} g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\ &\le c\sum_{j=1}^n (q_j - p_j)(x_j - x_{j-1}) + c\sum_{j=1}^n (v_j - u_j)(x_j - x_{j-1}) + c\delta(v_1 - p_1)\end{aligned}$$

Da $c\sum_{j=1}^{n}(q_j-p_j)(x_j-x_{j-1})+c\sum_{j=1}^{n}(v_j-u_j)(x_j-x_{j-1})<\varepsilon$ gilt, können wir $\delta>0$ so wählen, dass auch $\int_D g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)-\int_C g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)<\varepsilon$ gilt.

Uneigentliches Integral: Wir können auch über ein unbeschränktes Gebiet B integrieren. Für $n\ge 1$ sei Q_n das Quadrat $[-n,n]\times[-n,n]$. Wir definieren dann

$$\int_B g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\lim_{n\to\infty}\int_{B\cap Q_n} g(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Wegen $g\ge 0$ ist die rechte Seite monoton wachsend in n. Daher existiert der Grenzwert. Ist B ein Normalbereich $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$, wobei die Grenzen jetzt auch unendlich sein können, dann ergibt sich für $B\cap Q_n$ der beschränkte Normalbereich $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \max(a,-n)\le x\le\min(b,n),\ \max(\varphi(x),-n)\le y\le\min(\psi(x),n)\}$. Mit dieser Definition des uneigentlichen Integrals gilt die Formel ($*$) auch für unbeschränkte Integrationsintervalle.

4. Berechnung eines Integrals

Wir verwenden obige Resultate, um das Integral $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac12 x^2}\,\mathrm{d}x$ zu berechnen. Man erhält dieses Integral als $\lim_{n\to\infty}I_n$, wenn man I_n für $\int_{-n}^{n}e^{-\frac12 x^2}\,\mathrm{d}x$ schreibt.

Die Rechnung führt über ein zweifaches Integral. Wir schreiben Q_n für das Quadrat $[-n,n]\times[-n,n]$. Durch entsprechende Umformungen erhalten wir dann

$$\begin{aligned}I_n^2&=I_n\int_{-n}^{n}e^{-\frac12 x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-n}^{n}e^{-\frac12 x^2}I_n\,\mathrm{d}x=\int_{-n}^{n}e^{-\frac12 x^2}\int_{-n}^{n}e^{-\frac12 y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n}e^{-\frac12 x^2}e^{-\frac12 y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n}e^{-\frac12(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_{Q_n}e^{-\frac12(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)\end{aligned}$$

Wir haben nur die Rechenregeln für einfache Integrale verwendet und das zweifache Integral, das am Ende herauskommt, als Volumen über dem Quadrat Q_n interpretiert, das unter der Funktion $e^{-\frac12(x^2+y^2)}$ liegt.

Sei K_R der Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius R. Es gilt $K_n\subseteq Q_n\subseteq K_{2n}$, woraus $\int_{K_n}e^{-\frac12(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)\ \le\ \int_{Q_n}e^{-\frac12(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)\ \le\ \int_{K_{2n}}e^{-\frac12(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$ folgt. Damit haben wir eine Abschätzung für I_n^2 gefunden.

Wir berechnen $V=\int_{K_R}e^{-\frac12(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$. Dazu zerlegen wir den Kreis K_R in Kreisringe. Sei $k\ge 1$ und $r_j=j\frac{R}{k}$ für $0\le j\le k$. Sei weiters V_j das Volumen unter der Funktion $e^{-\frac12(x^2+y^2)}$ über dem Kreisring $K_{r_j}\setminus K_{r_{j-1}}$. Es gilt dann $V=\sum_{j=1}^{k}V_j$. Die Funktionswerte auf diesem Kreisring liegen zwischen $e^{-\frac12 r_{j-1}^2}$ und $e^{-\frac12 r_j^2}$. Die Fläche des Kreisrings ist $\pi(r_j^2-r_{j-1}^2)$. Daher gilt

$$e^{-\frac12 r_j^2}\,\pi(r_j^2-r_{j-1}^2)\le V_j\le e^{-\frac12 r_{j-1}^2}\,\pi(r_j^2-r_{j-1}^2)$$

Wegen $r_j^2-r_{j-1}^2=(r_j+r_{j-1})(r_j-r_{j-1})=(2r_j-\frac{R}{k})(r_j-r_{j-1})=(2r_{j-1}+\frac{R}{k})(r_j-r_{j-1})$ und da $e^{-\frac12 r^2}\le 1$ für alle $r\ge 0$ gilt, erhalten wir

$$2\pi e^{-\frac12 r_j^2}\,r_j(r_j-r_{j-1})-\tfrac{\pi R}{k}(r_j-r_{j-1})\le V_j\le 2\pi e^{-\frac12 r_{j-1}^2}\,r_{j-1}(r_j-r_{j-1})+\tfrac{\pi R}{k}(r_j-r_{j-1})$$

Summation über j von 1 bis k ergibt schließlich

$$2\pi\sum_{j=1}^{k}e^{-\frac12 r_j^2}\,r_j(r_j-r_{j-1})-\tfrac{\pi R^2}{k}\le V\le 2\pi\sum_{j=1}^{k}e^{-\frac12 r_{j-1}^2}\,r_{j-1}(r_j-r_{j-1})+\tfrac{\pi R^2}{k}$$

Die beiden Summen sind Riemannsummen, die gegen das Integral $\int_0^R e^{-\frac12 r^2}\,r\,\mathrm{d}r$ konvergieren, wenn k nach ∞ geht. Dadurch und wegen $\lim_{k\to\infty}\frac{\pi R^2}{k}=0$ erhalten wir aus obigen Ungleichungen die Gleichung

$$V = 2\pi \int_0^R e^{-\frac{1}{2}r^2}\, r \,\mathrm{d}r$$

Dieses Integral lässt sich durch die Substitution $t = r^2$ leicht ausrechnen. Man erhält

$$V = \pi \int_0^{R^2} e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}t = -2\pi e^{-\frac{1}{2}t}\Big|_0^{R^2} = 2\pi(1 - e^{-\frac{1}{2}R^2})$$

Damit ist $V = \int_{K_R} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$ berechnet. Setzt man das in die oben gefundene Abschätzung für I_n^2 ein, so erhält man

$$2\pi(1 - e^{-\frac{1}{2}n^2}) \le I_n^2 \le 2\pi(1 - e^{-2n^2}) \quad \text{oder} \quad \sqrt{2\pi}\sqrt{1 - e^{-n^2/2}} \le I_n \le \sqrt{2\pi}\sqrt{1 - e^{-2n^2}}$$

Es folgt $\lim_{n\to\infty} I_n = \sqrt{2\pi}$. Damit haben wir das gewünschte Resultat gefunden. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

Damit ist gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte der Standardnormalverteilung Integral 1 hat.

Wir berechnen das Volumen V unter der Funktion $e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ über dem Kreis K_R noch auf eine andere Art, nämlich als Volumen eines Drehkörpers. Wir schneiden die Funktion $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ bei $-R$ und R ab und lassen sie um die y-Achse rotieren. Das Volumen des Drehkörpers ist dann V.

Die Umkehrfunktion von φ erhalten wir durch Auflösen der Gleichung $e^{-\frac{1}{2}x^2} = y$ nach der Variable x. Das ergibt $\varphi^{-1}(y) = \sqrt{-2\log y}$. Wir schneiden bei R ab und erhalten so die Funktion $h(y) = \min(R, \sqrt{-2\log y})$, die auf dem Intervall $[0,1]$ definiert ist. Durch Rotation um die y-Achse ergibt sich das Volumen V, das heißt $V = \pi\int_0^1 h(y)^2\,\mathrm{d}y$. Wir teilen das Integrationsinterval bei $y_0 = e^{-\frac{1}{2}R^2}$. Es gilt $h(y) = R$ auf dem Intervall $[0, y_0]$ und $h(y) = \sqrt{-2\log y}$ auf dem Intervall $[y_0, 1]$. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
V &= \pi \textstyle\int_0^{y_0} R^2\,\mathrm{d}y + \pi\int_{y_0}^1 -2\log y\,\mathrm{d}y = \pi R^2 y_0 - 2\pi(y\log y - y)\Big|_{y_0}^1 \\
&= \pi R^2 y_0 + 2\pi + 2\pi y_0 \log y_0 - 2\pi y_0 = \pi R^2 y_0 + 2\pi - \pi y_0 R^2 - 2\pi e^{-\frac{1}{2}R^2} \\
&= 2\pi(1 - e^{-\frac{1}{2}R^2})
\end{aligned}$$

Damit haben wir für V denselben Wert wie oben erhalten. Alles andere lässt sich genauso wie oben berechnen.

5. Die Gammafunktion

Die Gammafunktion wird durch $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ für alle $r > 0$ definiert.

Satz A4: *Für $r > 0$ gilt $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$.*

Beweis: Das zeigt man mit partieller Integration:
$\Gamma(r+1) = \int_0^\infty x^r e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^r e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty r x^{r-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 + r\Gamma(r)$. □

Für spezielle Werte von r, zum Beispiel für $r \in \mathbb{N}$, kann man $\Gamma(r)$ explizit berechnen. Es gilt $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$ und für $n \in \{1,2,3,\dots\}$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$. Das folgt mit Induktion. Für $n = 1$ haben wir es gerade berechnet. Ist $\Gamma(n) = (n-1)!$ schon gezeigt, dann folgt $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$ mit Hilfe von Satz A4.

Satz A5: *Es gilt* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Beweis: Wir haben $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$ gezeigt. Da $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ eine gerade Funktion ist, ist das Integral über $[0,\infty)$ halb so groß. Wir haben daher $\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Wir führen die neue Integrationsvariable $y = \frac{1}{2}x^2$ ein. Es gilt $x = \sqrt{2y}$ und $\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2y}}\,\mathrm{d}y$. Wir erhalten $\int_0^{\infty} e^{-y}\frac{1}{\sqrt{2y}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Multipliziert man diese Gleichung mit $\sqrt{2}$, dann steht bereits $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ da. □

Satz A6: *Für* $n \in \{0,1,2,\dots\}$ *gilt* $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}$.

Beweis: Für $n = 0$ ist das Satz A5. Sei $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}$ bereits gezeigt. Aus Satz A4 folgt $\Gamma(n+\frac{3}{2}) = (n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)}\Gamma(n+\frac{1}{2})$. Setzt man für $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ ein, so hat man $\Gamma(n+\frac{3}{2}) = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!2^{2n+2}}\sqrt{\pi}$, die Formel für $n+1$. □

Inhaltsverzeichnis

Tabelle für die $N(0,1)$-Verteilung

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.500	0.30	0.618	0.60	0.726	0.90	0.816	1.20	0.885	1.50	0.933	2.25	0.988
0.02	0.508	0.32	0.626	0.62	0.732	0.92	0.821	1.22	0.889	1.55	0.939	2.30	0.989
0.04	0.516	0.34	0.633	0.64	0.739	0.94	0.826	1.24	0.893	1.60	0.945	2.35	0.991
0.06	0.524	0.36	0.641	0.66	0.745	0.96	0.832	1.26	0.896	1.65	0.951	2.40	0.992
0.08	0.532	0.38	0.648	0.68	0.752	0.98	0.837	1.28	0.900	1.70	0.955	2.45	0.993
0.10	0.540	0.40	0.655	0.70	0.758	1.00	0.841	1.30	0.903	1.75	0.960	2.50	0.994
0.12	0.548	0.42	0.663	0.72	0.764	1.02	0.846	1.32	0.907	1.80	0.964	2.55	0.995
0.14	0.556	0.44	0.670	0.74	0.770	1.04	0.851	1.34	0.910	1.85	0.968	2.60	0.995
0.16	0.564	0.46	0.677	0.76	0.776	1.06	0.855	1.36	0.913	1.90	0.971	2.65	0.996
0.18	0.571	0.48	0.684	0.78	0.782	1.08	0.860	1.38	0.916	1.95	0.974	2.70	0.997
0.20	0.579	0.50	0.692	0.80	0.788	1.10	0.864	1.40	0.919	2.00	0.977	2.75	0.997
0.22	0.587	0.52	0.699	0.82	0.794	1.12	0.869	1.42	0.922	2.05	0.980	2.80	0.997
0.24	0.595	0.54	0.705	0.84	0.800	1.14	0.873	1.44	0.925	2.10	0.982	2.85	0.998
0.26	0.603	0.56	0.712	0.86	0.805	1.16	0.877	1.46	0.928	2.15	0.984	2.90	0.998
0.28	0.610	0.58	0.719	0.88	0.811	1.18	0.881	1.48	0.931	2.20	0.986	2.97	0.999

Tabellen für z_β und $v_{\beta,n}$ (Normalverteilung und T–Verteilung)

$\beta =$	z_β	$v_{\beta,7}$	$v_{\beta,8}$	$v_{\beta,9}$	$v_{\beta,10}$	$v_{\beta,12}$	$v_{\beta,14}$	$v_{\beta,16}$	$v_{\beta,18}$	$v_{\beta,25}$	$v_{\beta,40}$
0.05	1.65	1.895	1.860	1.833	1.812	1.782	1.761	1.746	1.734	1.708	1.684
0.025	1.96	2.365	2.306	2.262	2.228	2.179	2.145	2.120	2.101	2.060	2.021
0.01	2.33	2.998	2.896	2.821	2.764	2.681	2.624	2.584	2.552	2.485	2.423
0.005	2.58	3.499	3.355	3.250	3.169	3.055	2.977	2.921	2.878	2.787	2.704

Tabellen für $u_{\beta,n}$ (χ^2-Verteilung)

$\beta =$	$u_{\beta,1}$	$u_{\beta,2}$	$u_{\beta,3}$	$u_{\beta,4}$	$u_{\beta,5}$	$u_{\beta,6}$	$u_{\beta,8}$	$u_{\beta,9}$	$u_{\beta,10}$	$u_{\beta,16}$	$u_{\beta,20}$
0.05	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.6	15.51	16.92	18.31	26.30	31.41
0.025	5.02	7.38	9.35	11.1	12.83	14.4	17.53	19.02	20.48	28.85	34.17
0.01	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.8	20.1	21.7	23.2	32.0	37.6
0.005	7.88	10.6	12.8	14.9	16.7	18.5	22.0	23.6	25.2	34.3	40.0

Zusammenstellung der wichtigen Verteilungen

Name	Parameter	Abkürzung	Wertebereich	W–Vektor/Dichte	Ew.	Varianz
Binomial-verteilung	$n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$	$B(n,p)$	$\{0,1,\dots,n\}$	$w(j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$	np	$np(1-p)$
geometrische Verteilung	$p \in (0,1)$	$G(p)$	$\{1,2,\dots\}$	$w(j) = (1-p)^{j-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson-verteilung	$\lambda > 0$	$P(\lambda)$	$\{0,1,2,\dots\}$	$w(j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$	λ	λ
Normal-verteilung	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$N(\mu,\sigma)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Exponential-verteilung	$\lambda > 0$	$E(\lambda)$	$\mathbb{R}_0^+$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma-verteilung	$\lambda > 0$, $r > 0$	$E(r,\lambda)$	$\mathbb{R}_0^+$	$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$
T-Verteilung	$n \in \mathbb{N}$	$T(n)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$	0	