Bitte beachten (wurde in meinen damaligen VO klar kommuniziert): Der gesamte Analysis-Zyklus ist stark an die (2005-2008 verfügbaren Ausgaben der) Bücher von Forster angelehnt, mit Zusätzen aus Heuser und Rudin im dritten Semester.

Analysis 3

Günther Hörmann & David Langer

Sommersemester 2008

Inhalt

IX MEHRFACHE INTEGRALE

24. Iterierte Integrale

24.1. Spezialfall: Doppelintegral

Sei $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig, dann ist nach den Resultaten über Parameterintegrale aus 18.19 die Funktion

$$F_1(y) := \int\limits_a^b f(x,y)\,dx, \quad F_1\colon [c,d]\to\mathbb{R}$$

stetig und das iterierte Integral oder auch Doppelintegral

$$\int\limits_c^d F_1(y)\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

existiert. Ebenso ist

$$F_2(x) := \int\limits_c^d f(x,y)\,dy, \quad F_2\colon [a,b]\to\mathbb{R}$$

stetig und das Doppelintegral

$$\int\limits_a^b F_2(x)\,dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx$$

existiert.

Proposition

Sei $f\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx \tag{24.1}$$

Beweis

Sei $\varphi\colon [c,d]\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(y) := \int\limits_a^b \underbrace{\left(\int\limits_c^y f(x,t)\,dt\right)}_{=:g(x,y)}\,dx.$$

Dabei ist $g\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig und für alle $x\in[a,b]$ ist $y\mapsto g(x,y)$ stetig differenzierbar [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Analysis 1].
Nach 18.19 ist daher φ stetig differenzierbar und

$$\varphi'(y) = \int_a^b \frac{d}{dy}\left(\int_c^y f(x,t)\,dt\right)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Daher folgt

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)\,dy = \int_c^d \varphi'(y)\,dy = \varphi(d) - \underbrace{\varphi(c)}_{0} = \varphi(d) = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,t)\,dt\right)\,dx.$$

□

24.2. Korollar

Es sei $f\colon I_1\times I_2\times\cdots\times I_n\to\mathbb{R}$ stetig und $I_j\subseteq\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall (für $j=1,\ldots,n$). Dann gilt für jede Permutation σ von $\{1,\ldots,n\}$

$$\int_{I_{\sigma_1}}\cdots\int_{I_{\sigma_n}} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{\sigma_n}\ldots dx_{\sigma_1} = \int_{I_n}\cdots\int_{I_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \tag{24.2}$$

24.3. Definition

Für $1\le j\le n$ seien $I_j=[a_j,b_j]\subseteq\mathbb{R}$ kompakte Intervalle, $Q:=I_1\times\cdots\times I_n\subseteq\mathbb{R}^n$ der davon erzeugte (achsenparallele) Quader (eine so genannte *Zelle*); dann ist für jede stetige Funktion $f\colon Q\to\mathbb{R}$ das *Integral von f über Q* definiert durch

$$\int_Q f(x)\,dx := \int_{a_n}^{b_n}\left(\cdots\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\right)\cdots\right)\,dx_n \tag{24.3}$$

(n-faches iteriertes Integral).

Zur Notation: Statt $\int_Q f(x_1,\ldots,x_n)\,d(x_1,\ldots,x_n)$ wird oft auch $\int_Q f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$ oder $\int_Q f(x)d^nx$ geschrieben (aber nicht in dieser Vorlesung).

Wir wollen uns nun von der fixierten Grundmenge Q befreien.

24.4. Integral stetiger Funktionen mit kompaktem Träger

Definition

1.) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Der *Träger von* f, bezeichnet mit $\operatorname{supp}(f)$ (engl.: support), ist die (relativ bzgl. U abgeschlossene) Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in U\colon\ f(x) \neq 0\}} \cap U, \tag{24.4}$$

d. h. der Abschluss (relativ bzgl. U) der Menge aller Punkte, in denen f nicht verschwindet.
Bemerkung: $U \setminus \operatorname{supp}(f)$ ist offen (realtiv bzgl. U) und für alle $y \in U \setminus \operatorname{supp}(f)$ gilt $f(y) = 0$.
2.) Wir bezeichnen mit

$$\boxed{\mathcal{C}_c(U) := \{f \in \mathcal{C}(U)\colon\ \operatorname{supp}(f) \text{ ist kompakt}\}}$$

den $\mathbb{R}$-*Vektorraum aller stetigen Funktionen auf* U *mit kompaktem Träger*
(Analog ist für komplexwertige $f \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ der Begriff $\operatorname{supp}(f)$ sinnvoll; wir erhalten so den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{C}_c(U, \mathbb{C})$.)

Definition

Für jedes $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Zelle (d.h. einen kompakten achsenparallelen Quader) $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq Q$; wir definieren

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \int\limits_{Q} f(x)\,dx \tag{24.5}$$

als *Integral von* f. Sein Wert ist unabhängig von der Wahl von Q (was leicht zu sehen ist, weil $f\big|_{\mathbb{R}^n \setminus Q} = 0$.)

24.5. Beispiele

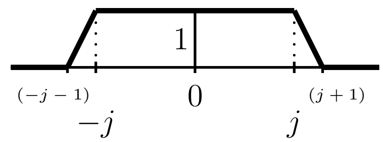
1.) Sei $f\colon [0, \pi]^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \cos(x + y)$, dann ist

$$\int\limits_{[0,\pi]^2} f(x, y)\,d(x, y) = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi \cos(x + y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^\pi \sin(x + y)\Big|_{x=0}^{x=\pi} dy = \int\limits_0^\pi \left(\sin(y + \pi) - \sin(y)\right)\,dy =$$

$$= -\cos(y + \pi)\Big|_0^\pi + \cos y\Big|_0^\pi = -\cos 2\pi + \cos \pi + \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 - 1 - 1 = -4$$

2.) Sei für $j = 1, \dots, n$ die Funktion $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Trapezfunktion mit Graphen



und setze $f(x_1, \dots, x_n) := f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$. Dann ist

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq [-2, 2] \times [-3, 3] \times \cdots \times [-n-1, n+1] =: Q,$$

somit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_{\prod_{j=1}^{n}[-j-1,j+1]} f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)\,d(x_1, \dots, x_n) =$$

[da die Faktoren im Integral nur von je einer Variablen abhängen]

$$= \int\limits_{-2}^{2} f_1(x_1)\,dx_1 \cdot \int\limits_{-3}^{3} f_2(x_2)\,dx_2 \cdots \int\limits_{n+1}^{-n-1} f_n(x_n)\,dx_n =$$

$$= (2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 2 + 1) \cdots (2n + 1) = \prod_{l=1}^{n} (2l + 1).$$

Bemerkung: Allgemeiner, ist für $j = 1, \dots, n$ jeweils $f_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp}(f_j) \subseteq I_j \subseteq \mathbb{R}$ mit einem kompakten Intervall I_j, dann ist $f(x) := f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$ $[=: f_1 \otimes \cdots \otimes f_n(x)]$ in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{I_j} f_j(t_j)\,dt_j$$

24.6. Proposition (Eigenschaften des Integrals auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$)

Es seien $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

1.) **Linearität:**

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f + g)(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

2.) **Monotonie:**

gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $f(x) \leq g(x)$ (kurz: $f \leq g$), dann folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$$

3.) **Translationsinvarianz:**

Sei für $a \in \mathbb{R}^n$: $(\tau_a f)(x) := f(x-a) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, d. h. $\tau_a f$ ist die um a translatierte Funktion, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_a f)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

Beweis

1., 2.) klar aus sukzessiver Anwendung von n eindimensionalen Integrationen

3.) Sei $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $\operatorname{supp}(\tau_a f) \subseteq \prod_{j=1}^{n} [b_j, c_j] =: Q$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\tau_a f)(x)\,dx = \int_{b_n}^{c_n} \cdots \underbrace{\int_{b_1}^{c_1} f(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)\,dx_1}_{\text{Substitution } y_1 = x_1 - a_1} \cdots dx_n =$$

$$= \int_{b_n}^{c_n} \cdots \underbrace{\int_{b_2}^{c_2} \int_{b_1 - a_1}^{c_1 - a_1} f(y_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)\,dy_1 dx_2}_{= \int_{b_1-a_1}^{c_1-a_1} \underbrace{\int_{b_2}^{c_2} f(y_1, x_2 - a_2, \dots)\,dx_2}_{\text{Substitution } y_2 = x_2 - a_2} dy_1} \cdots dx_n =$$

$$= \cdots \text{ ebenso in jeder weiteren Variable } \cdots =$$

$$= \int_{b_1 - a_1}^{c_1 - a_1} \int_{b_2 - a_2}^{c_2 - a_2} \cdots \int_{b_n - a_n}^{c_n - a_n} f(y_1, \dots, y_n)\,dy_n \dots dy_1 = \int_{Q - \{a\}} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

weil $\operatorname{supp}(f) \subseteq Q - \{a\}$ [gemäß $f(y) \neq 0 \Leftrightarrow \tau_a f(y+a) \neq 0$].

$\square$

24.7. Bemerkung

Die Abbildung $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ definiert also ein lineares Funktional $I\colon \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, das zusätzlich monoton ($f \le g \Rightarrow I(f) \le I(g)$) und translationsinvariant ($I(\tau_a f) = I(f)$) ist. Man kann zeigen, dass ein lineares Funktional auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit all diesen Eigenschaften schon bis auf eine positive Konstante durch obiges Integral gegeben sein muss (vgl. [For84, § 1, Satz 3]); d. h., dass das Integral aus (24.5) abstrakt als lineares, monotones und translationsinvariantes Funktional auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ charakterisiert ist (bis auf einen Normierungsfaktor).

24.8. Proposition (Stetigkeit des Integrals)

Es sei $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ (für $k \in \mathbb{N}$) und $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Weiters existiere ein Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{supp}(f_k) \subseteq K$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Falls $f_k \to f$ gleichmäßig für $k \to \infty$, dann folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Beweis

Es gibt kompakte Intervalle $I_j \subseteq \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) mit $K \subseteq \prod_{j=1}^{n} I_j =: Q$.

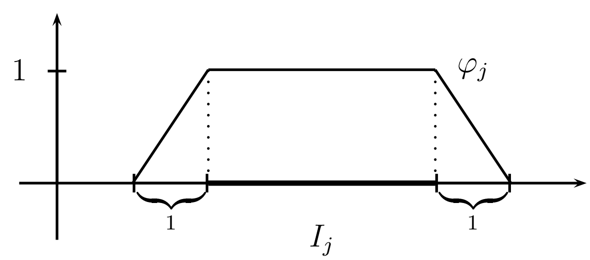
Zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $\varphi_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) $0 \le \varphi_j \le 1$

2.) $\varphi_j\big|_{I_j} \equiv 1$

3.) $\operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq I_j + [-1, 1]$

(Zum Beispiel Trapezfunktionen.)



Definiere $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x_1, \dots, x_n) := \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)$. Dann ist $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \varphi \le 1$ und $\varphi\big|_K \equiv 1$.

Es gilt $\operatorname{supp}(f) \subseteq K$, denn $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ gilt $f(x) = \lim f_k(x) = 0$; somit ist auch $\operatorname{supp}(f_k - f) \subseteq K$.
Weiters gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{=0,\text{ wenn } x \notin K} \le \|f_k - f\|_\infty \cdot \underbrace{\varphi(x)}_{=\begin{cases} 1 & x \in K \\ \ge 0 & x \notin K \end{cases}}$$

und wegen der Monotonie des Integrals folgt

$$-\|f_k - f\|_\infty \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx}_{=:c>0} \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f_k(x) - f(x))\,dx \le \|f_k - f\|_\infty \cdot \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx}_{c}.$$

Zusammenfassend also

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right| \leq c \cdot \|f_k - f\|_\infty \to 0 \quad (k \to \infty),$$

mit anderen Worten $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$.

□

24.9. **Partielle Integration** (ohne Randterme)

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wir erinnern and die Notationen $\mathcal{C}(U) = \{f\colon U \to \mathbb{R}\colon f \text{ stetig}\}$, $\mathcal{C}_c(U) := \{f \in \mathcal{C}(U)\colon \operatorname{supp}(f) \subseteq U \text{ kompakt}\}$ und setzen

$$\mathcal{C}^0(U) := \mathcal{C}(U), \quad \mathcal{C}^0_c(U) := \mathcal{C}_c(U)$$

und für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^k(U) &:= \{f\colon U \to \mathbb{R}\colon f \text{ ist } k\text{-mal stetig (partiell) differenzierbar}\},\\
\mathcal{C}^k_c(U) &:= \mathcal{C}_c(U) \cap \mathcal{C}^k(U),\\
\mathcal{C}^\infty(U) &:= \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k(U), \quad \mathcal{C}^\infty_c(U) := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}^k_c(U).
\end{aligned}$$

(Bem: für $f \in \mathcal{C}^k_c(U)$ gilt $D^\alpha f \in \mathcal{C}_c(U)$, wenn $|\alpha| \leq k$.)
Wir erhalten entsprechende Inklusionsketten von $\mathbb{R}$-Vektorteilräumen

$$\mathcal{C}^\infty_c(U) \subseteq \ldots \mathcal{C}^{k+1}_c(U) \subseteq \mathcal{C}^k_c(U) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{C}_c(U)$$

und ähnlich für $\mathcal{C}^k(U)$ $(k = 1, \ldots, \infty)$; außerdem natürlich $\mathcal{C}^k_c(U) \subseteq \mathcal{C}^k(U)$.
Für $f \in \mathcal{C}_c(U)$ setzen wir

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus U, \end{cases}$$

dann ist $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{f}\big|_U = f$. Es ist $f = \tilde{f}$, falls $U = \mathbb{R}^n$.

Wir definieren das Integral für $f \in \mathcal{C}_c(U)$ nun durch

$$\int\limits_U f(x)\,dx := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx. \tag{24.6}$$

Topologische Bemerkung: Wenn $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ kompakt ist, dann gibt es ein $c > 0$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in U$ mit $d(x, \partial U) := \inf\{|x-y| : y \in \partial U\} < c$ gilt. Dies folgt aus allgemeinen Sachverhalten in metrischen Räumen: sei X ein metrischer Raum, $U \subseteq X$ offen und $K \subseteq U$, dann gilt
(i) K ist kompakt relativ $U \iff K$ ist kompakt (als Teilmenge von X).

[Zum Beweis mittels offener Überdeckungen verwende, dass $W \subseteq U$ genau dann offen relativ U ist, wenn es eine offene Menge $V \subseteq X$ gibt mit $W = V \cap U$.]
(ii) K kompakt $\implies d(K, \partial U) := \inf\{d(x,y) : x \in K, y \in \partial U\} > 0$.

[Wir können Lemma 22.10,1.) aus Analysis 2 anwenden, weil $\partial U \subseteq X$ abgeschlossen ist und K kompakt mit $K \cap \partial U = \emptyset$ (weil ja U offen und $K \subseteq U = U^\circ$).]

Aus der endlichen Abstandseigenschaft des kompakten Trägers vom Rand erhalten wir auch leicht die folgende Aussage:

$$\varphi \in \mathcal{C}_c^k(U) \quad \implies \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n).$$

Proposition

Sei $f \in \mathcal{C}^1(U), \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U), 1 \leq j \leq n$, dann gilt:

1.) $$\int\limits_U D_j\varphi(x)\,dx = 0$$

2.) $$\int\limits_U D_jf(x) \cdot \varphi(x)\,dx = -\int\limits_U f(x) \cdot D_j\varphi(x)\,dx$$

(beachte: $h \in \mathcal{C}_c(U), g \in \mathcal{C}(U) \Rightarrow h \cdot g \in \mathcal{C}_c(U)$)

Beweis. OBdA ist $j = 1$ und $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n)$.
Sei $K := \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq U$; beachte, dass $\mathbb{R}^n \setminus K$ offen ist.

ad 1.): Sei $R > 0$ so, dass $K = \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]^n$ und sei $x' := (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ beliebig; dann ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}} D_1\varphi(x_1, x')\,dx_1 = \varphi(x_1, x')\Big|_{x_1=-R}^{x_1=R} = 0$$

[denn $y \in \partial K \cup (\mathbb{R}^n \setminus K) \;\Rightarrow\; \varphi(y) = \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ y_k \in \mathbb{R}^n\setminus K \\ y_k \to y}} \varphi(y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0$] und somit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_1\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} D_1\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1}_{=0}\,dx_2 \cdots dx_n = 0.$$

ad 2.): Folgt aus 1.), denn $f \cdot \varphi \in \mathcal{C}_c^1(U)$ und $D_jf \cdot \varphi = D_j(f \cdot \varphi) - f \cdot D_j\varphi$;

also ist

$$\int_U D_j f \cdot \varphi = \underbrace{\int_U D_j(f \cdot \varphi)}_{=0 \quad [1.)]} - \int_U f \cdot D_j\varphi = -\int_U f \cdot D_j\varphi.$$

□

Beispiel Für beliebiges $f \in \mathcal{C}^2(U)$, $g \in \mathcal{C}^2_c(U)$ und $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\int_U D_j^2 f \cdot g \underset{[\text{Prop., 2.})]}{=} -\int_U D_j f \cdot D_j g \underset{[\text{Prop., 2.})]}{=} \int_U f \cdot D_j^2 g.$$

Durch Summation über j erhalten wir daraus

$$\int_U (\triangle f) \cdot g = -\int_U \langle \bigtriangledown f \mid \bigtriangledown g \rangle = \int_U f \cdot \triangle g.$$

Mit dem Skalarprodukt von Funktionen $\langle h \mid \psi \rangle_{L^2} := \int_U h\psi$ (für alle $h, \psi \in \mathcal{C}_c(U)$) schreibt sich die obige Relation so: für alle $f, g \in \mathcal{C}^2_c(U)$ gilt

$$\langle \triangle f \mid g \rangle_{L^2} = \langle f \mid \triangle g \rangle_{L^2} ,$$

in diesem Sinne ist $\triangle$ als Operator bzgl. $\langle . \mid . \rangle_{L^2}$ symmetrisch.

25. Transformationsformel

25.1. Zur Substitutionsregel auf $\mathbb{R}$

Es sei $\Phi\colon I \to J$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus offener Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$,
$f \in \mathcal{C}_c(J)$, d. h. $\exists c, d \in J$ mit $\operatorname{supp}(f) \subseteq [c, d] \subseteq J$. Dann ist

$$f \circ \Phi \ \in \mathcal{C}_c(I),$$

weil $\underbrace{\Phi^{-1}}_{\text{stetig}}(\ \underbrace{[c,d]}_{\substack{\text{kompaktes}\\ \text{Intervall}}}\ ) =:\ \underbrace{[a,b]}_{\substack{\text{kompaktes}\\ \text{Intervall}}}\ \subseteq I$ und $f(\Phi(x)) = 0$, falls $x \notin [a, b]$. Zur Berechnung von

$$\int_J f(y)\, dy = \int_c^d f(y)\, dy = (*)$$

unterscheiden wir 2 Fälle:

- $\Phi' > 0$, also Φ streng monoton wachsend: $c = \phi(a), d = \Phi(b)$

$$(*) = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)\, dx = \int_I f(\Phi(x))\, |\Phi'(x)|\, dx$$

- $\Phi' < 0$, also Φ streng monoton fallend: $c = \Phi(b), d = \Phi(a)$

$$(*) = \int_{\Phi(b)}^{\Phi(a)} f(y)\, dy = \int_b^a f(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)\, dx$$

$$= -\int_a^b f(\Phi(x)) \cdot \underbrace{\Phi'(x)}_{=-|\Phi'(x)|}\, dx = \int_I f(\Phi(x))\, |\Phi'(x)|\, dx$$

d.h. zusammenfassend

$$\int_J f(y)\, dy = \int_I f(\Phi(x))|\Phi'(x)|\, dx. \tag{25.1}$$

Allgemeiner:
Seien nun $I, J \subseteq \mathbb{R}$ beliebige offene Teilmengen (statt Intervalle wie oben) und $\Phi\colon I \to J$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Für $f \in \mathcal{C}_c(J)$ setzen wir $K := \operatorname{supp}(f) \subseteq J$ (somit ist K kompakt).

Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $\varepsilon(x) > 0$ so, dass $B_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq J$. Dann ergibt $\big(B_{\varepsilon(x)}(x)\big)_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K und es gibt $x_1, \ldots, x_N \in K$ mit $J \supseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{\varepsilon(x_j)}(x_j) \supseteq K$.

Jedes $J_j := B_{\varepsilon(x_j)}(x_j)$ $(j = 1, \dots, N)$ ist ein offenes Intervall. Es gibt offene disjunkte Intervalle $\tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_m$ mit der Eigenschaft $\bigcup\limits_{j=1}^{N} J_j = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \tilde{J}_k$.

Weil Φ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist, gibt es zu jedem $\tilde{J}_k$ ein offenes Intervall $I_k \subseteq I$ mit $\tilde{J}_k = \Phi(I_k)$. Wir erhalten (beachte, dass $\operatorname{supp}(f \circ \Phi) \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$)

$$\int\limits_J f(y)\,dy = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\tilde{J}_k} f(y)\,dy \underset{[(25.1)]}{=} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{I_k} f(\Phi(x))|\Phi'(x)|\,dx = \int\limits_I f(\Phi(x))|\Phi'(x)|\,dx.$$

Somit haben wir folgende Aussage bewiesen.

Proposition Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offen, $\Phi \colon I \to J$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c(J)$

(25.2)
$$\int\limits_J f(y)\,dy = \int\limits_I f(\Phi(x))|\Phi'(x)|\,dx$$

25.2. Vorbetrachtung zur Substitutionsregel im $\mathbb{R}^n$

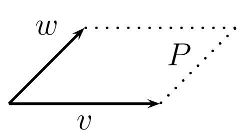
Ziel (Vergleiche Theorem 25.6 weiter unten.)

Verallgemeinerung der Substitutionsregel in $\mathbb{R}$ auf folgende Situation:

$\mathbb{R}^n \supseteq U \xrightarrow{\Phi} V \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $f \in \mathcal{C}_c(V)$

$$\int\limits_V f(y)\,dy = \int\limits_U f(\Phi(x))\,\underbrace{|\det D\Phi(x)|}_{\boxed{\text{Warum det?}}}\,dx$$

Spezialfall $n = 2$:



Fläche $(P) = |\det(v \quad w)|$

Ist $A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear, so gilt: Fläche $(A(P)) = |\det(Av \quad Aw)| = |\det(A \cdot (v \quad w))| = |\det A| \cdot |\det(v\ w)| = |\det A| \cdot$ Fläche (P)

Für allgemeineres n wird $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ interpretiert als *Volumen des Parallelepipeds*

$$P := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \colon 0 \le \lambda_j \le 1 \ (j = 1, \dots, n)\}$$

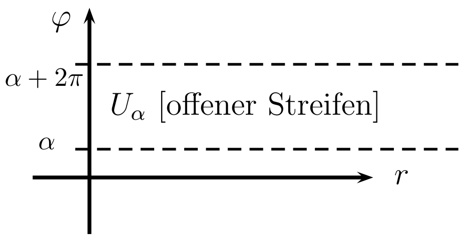
und es ergibt sich $\operatorname{Vol}(A(P)) = |\det A| \cdot \operatorname{Vol}(P)$.

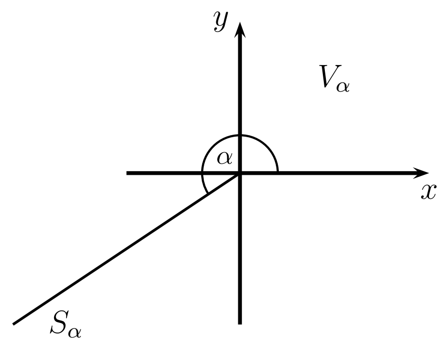
In der Susbtitutionsformel oben ist $D\Phi(x)$ die lineare Approximation von Φ bei x und $|\det D\Phi(x)|$ misst die infinitesimale Änderung des Volumens unter der Transformation Φ.

25.3. Beispiele

1.) Polarkoordinaten: sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $U_\alpha :=]0,\infty[\times]\alpha,\alpha+2\pi[$ und

$$\Phi(r,\varphi) = (r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi),$$
$$\Phi\colon U_\alpha \to V_\alpha := \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\colon r>0\}}_{\text{Halbstrahl mit Winkel } \alpha \text{ zur } x\text{-Achse}=:S_\alpha}$$





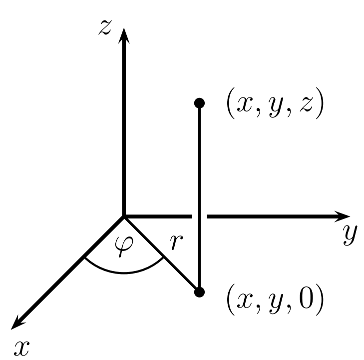
Es ist

$$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi(r,\varphi) = r > 0$$

Die Formel in 25.2 besagt, dass für alle $f \in \mathcal{C}_c(V_\alpha)$ gilt

$$\int_{V_\alpha} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{U_\alpha} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,d(r,\varphi) = \int_0^\infty \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,r\,dr$$

2.) Zylinderkoordinaten: betrachte $\Psi\colon (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$



Ψ ist ein Diffeomorphismus $U_\alpha \times \mathbb{R} \to V_\alpha \times \mathbb{R}$ (Notation U_α, V_α wie oben)

und $D\Psi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\det D\Psi(r,\varphi,z) = r > 0$

Somit ergibt 25.2 für jedes $f \in \mathcal{C}_c(V_\alpha\times\mathbb{R})$ die Formel

$$\int_{V_\alpha\times\mathbb{R}} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_0^\infty \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,dz\,d\varphi\,r\,dr$$

3.) für Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ siehe die Übungsaufgaben (auch jene zu Analysis 2 beim Thema Umkehrsatz)

25.4. Zerlegung von $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen

Sei wie üblich $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir werden nun allgemeine (lokale) Diffeomorphismen offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf folgende einfache Typen zurückführen:

Typ (A): $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $G\colon U \to \mathbb{R}^n$, wobei mit einer $\mathcal{C}^1$ Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ und $m \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned} G(x) &= (x_1, \dots, x_{m-1}, g(x), x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j \neq m} x_j e_j + g(x) e_m = x + (g(x) - x_m) \cdot e_m. \end{aligned}$$

Es ist

$$DG(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1 g(x) & D_2 g(x) & \cdots & \cdots & D_n g(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die m. Zeile ist gerade $Dg(x)$. Wir berechnen $\det DG(x)$ durch Entwicklung nach der m-ten Spalte und erhalten

$$\det DG(x) = D_m g(x) \cdot \det I_{n-1} = D_m g(x).$$

Daher gilt: $\det DG(x) \neq 0 \iff D_m g(x) \neq 0$.

Typ (B): eine Transposition, das ist eine lineare Abbildung $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, die zwei Basisvektoren vertauscht und alle anderen fix lässt, d. h. $\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$Be_l = \begin{cases} e_l & l \neq i \wedge l \neq j \\ e_j & l = i \\ e_i & l = j. \end{cases}$$

Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $B\,|_U$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $U \to B(U)$.

Falls $i = j$, dann ist $B = I_n$.

Lemma

Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, $\Phi(0) = 0$ und $D\Phi(0)$ invertierbar.

Dann gibt es eine Umgebung W von 0 in $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{C}^1$-Abbildungen $G_1, \dots, G_n\colon W \to \mathbb{R}^n$ vom Typ (A), $G_j(0) = 0$ und $DG_j(0)$ invertierbar ($j = 1, \dots, n$) und Transpositionen $B_1, \dots, B_{n-1}$ so, dass für alle $x \in W$ gilt

$$\Phi(x) = B_1 \circ \cdots B_{n-1} \circ G_n \circ \cdots \circ G_1(x) \tag{25.3}$$

Also ist Φ lokal eine Verkettung von Abbildungen des Typs (A) oder (B).

Beweis

Seien $P_0, \ldots, P_n \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ die Projektionen

$$P_0 := 0,\ P_m x := \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \quad (1 \leq m \leq n).$$

Wir setzen $F_0 := F_1 := \Phi$ und zeigen induktiv die folgende *Zwischenbehauptung:*
Für $1 \leq m \leq n$ gibt es offene Mengen $V_m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 \in V_m$ und $U_{m-1} \subseteq V_{m-1}$ mit $0 \in U_{m-1}$, eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $F_m \colon V_m \to \mathbb{R}^n$ mit $F_m(0) = 0$ und $DF_m(0)$ invertierbar, sowie eine Transpoition B_{m-1} und einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $G_{m-1} \colon U_{m-1} \to V_m$ vom Typ (A), so dass auf V_m gilt:

$$(A_m) \qquad P_{m-1} F_m = P_{m-1} \quad \text{und} \quad B_{m-1} F_m = F_{m-1} \circ G_{m-1}^{-1}.$$

<u>$m = 1$:</u> mit $V_0 := V_1 := U_0 := U$ und $B_0 := G_0 := I_n$ ist (A_1) (wegen $F_0 = F_1 = \Phi$) trivial erfüllt; weiters ist $F_1(0) = 0$ und $DF_1(0)$ invertierbar laut Voraussetzung an Φ.
<u>$m \mapsto m+1$:</u> es gelte also bereits (A_m); dann muss $F_m(x) = (x_1, \ldots, x_{m-1}, f_m(x), \ldots, f_n(x))$ gelten, wobei $f_m, \ldots, f_n \colon V_m \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind; somit haben wir

$$DF_m(0) = \begin{pmatrix} I_{m-1} \quad 0 \\ Df_m(0) \\ \vdots \\ Df_n(0) \end{pmatrix}$$

und die m-te Spalte daraus ist $DF_m(0) \cdot e_m = \sum_{i=m}^{n} D_m f_i(0) \cdot e_i$.
Da $DF_m(0)$ invertierbar ist, muss es ein k mit $m \leq k \leq n$ geben, für das $D_m f_k(0) \neq 0$ ist.

Sei B_m die Transposition, die e_m mit e_k vertauscht. Wir definieren

$$G_m(x) := x + (f_k(x) - x_m) \cdot e_m \qquad \forall x \in V_m.$$

Dann ist $G_m \colon V_m \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung vom Typ (A) mit $G_m(0) = 0$ und $DG_m(0)$ ist invertierbar, denn $\det DG_m(0) = D_m f_k(0) \neq 0$.
Nach dem Satz über Umkehrabbildungen (aus Analysis 2) gibt es eine offene Menge $U_m \subseteq V_m$ mit $0 \in U_m$ und eine offene Menge $V_{m+1} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $0 \in V_{m+1}$ so, dass $G_m\big|_{U_m} \colon U_m \to V_{m+1}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist.

Nun definieren wir

$$F_{m+1}(y) := B_m \cdot F_m \circ G_m^{-1}(y) \qquad \forall y \in V_{m+1},$$

sodass die zweite Gleichung in (A_{m+1}) laut Konstruktion erfüllt ist.
Es ist $F_{m+1} \colon V_{m+1} \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung mit $F_{m+1}(0) = B_m \cdot 0 = 0$; weiters ist $DF_{m+1}(0) = B_m \cdot DF_m(0) \cdot D(G_m^{-1})(0)$ als Produkt invertierbarer linearer Abbildungen ebenfalls invertierbar.

Für $x \in U_m$ gilt

$$\begin{aligned} P_m F_{m+1}(G_m(x)) = P_m B_m F_m(x) &= P_m B_m(x_1, \ldots, x_{m-1}, f_m(x), \ldots, f_n(x)) \\ &= (x_1, \ldots, x_{m-1}, f_k(x), 0 \ldots) = P_m G_m(x), \end{aligned}$$

daher also für alle $y \in V_{m+1} = G_m(U_m)$ die Gleichung

$$P_m F_{m+1}(y) = P_m y,$$

womit (A_{m+1}) gezeigt und damit die Zwischenbehauptung bewiesen ist.

Aus (A_m) folgt insbesondere

$$F_m(x) = B_m F_{m+1} \circ G_m(x) \qquad (x \in U_m, m = 1, \ldots, n)$$

und daher sukzessive

$$\Phi = F_1 = B_1 \cdot \underbrace{F_2} \circ G_1 = B_1 \cdot \underbrace{B_2 \cdot F_3 \circ G_2} \circ G_1 = \cdots$$

$$= B_1 \cdots B_{n-1} \cdots F_n \circ G_{n-1} \circ \cdots \circ G_1 \qquad \text{(gültig nahe 0)}\,.$$

Außerdem ist gemäß der ersten Gleichung in (A_n) auch die Abbildung F_n vom Typ (A), weshalb wir schließlich $G_n := F_n$ setzen können.

$\square$

25.5. Glatte Partitionen der Eins

Lemma

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es Funktionen $\chi_p \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (für $p \in \mathbb{Z}^n$) mit folgenden Eigenschaften:

1.) $\forall p \in \mathbb{Z}^n$: $0 \leq \chi_p(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

2.) $\operatorname{supp}(\chi_p) \subseteq W_\varepsilon(\varepsilon p) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ |x_j - \varepsilon p_j| \leq \varepsilon \quad (j = 1, \ldots, n)\}$

3.) $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\sum\limits_{p \in \mathbb{Z}^n} \chi_p(x) = 1$ (auf kompakten Mengen jeweils nur endliche Summe)

Beweis

<u>Schritt 1</u>: Setze

$$g(t) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1, \end{cases}$$

dann ist g unendlich oft differenzierbar [Beweis wie in Analysis 1, 10.12] und nach Konstruktion ist $\operatorname{supp}(g) = [-1, 1]$.

Demnach ist $G(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(t-k)$ für t in einem beschränkten Intervall nur eine endliche Summe, somit also in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Es ist $G(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (weil immer für mindestens ein k gilt $g(t-k) > 0$) sowie $G(t-l) = G(t)$ für $l \in \mathbb{Z}$ (G ist also 1-periodisch).
Wir setzen $h(t) := \dfrac{g(t)}{G(t)}$, dann ist $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le h \le 1$, $\operatorname{supp}(h) = \operatorname{supp}(g) = [-1,1]$ und

$$\forall t \in \mathbb{R}: \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(t-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t)} = 1.$$

<u>Schritt 2</u>:
Für $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ definieren wir

$$\chi_p(x) := h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - p_1\right) \cdots h\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - p_n\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dann ist $\chi_p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \chi_p \le 1$ und

$$\operatorname{supp}(\chi_p) = \prod_{j=1}^n \operatorname{supp} h\left(\frac{\cdot}{\varepsilon} - p_j\right) = \prod_{j=1}^n [\varepsilon(p_j - 1), \varepsilon(p_j+1)] = W_\varepsilon(\varepsilon p).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \chi_p(x) &= \sum_{p_1,\dots,p_n\in\mathbb{Z}} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - p_1\right) \cdots h\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - p_n\right) \\ &= \sum_{p_1,\dots,p_{n-1}} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - p_1\right) \cdots h\left(\frac{x_{n-1}}{\varepsilon} - p_{n-1}\right) \cdot \underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}} h\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - l\right)}_{=1} = \cdots = 1.\end{aligned}$$

□

Korollar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $B \subseteq U$ kompakt. Dann gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ mit $0 \le \varphi \le 1$ und

$$\forall x \in B: \quad \varphi(x) = 1.$$

Wir nennen φ eine *glatte Abschneidefunktion über B innerhalb U.*

Bemerkung: Wir können jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ auch als Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ auffassen, indem wir mit Null fortsetzen (da φ nahe des Randes von U verschwinden muss, ist die Differenzierbarkeit dadurch nicht gefährdet.)

Beweis

Wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass jeder kompakte Würfel mit Seitenlänge (kleiner oder gleich) 2ε, der B trifft, schon ganz in der offenen Menge U enthalten ist (der Rand von B hat einen positiven Minimalabstand zum Rand von U).

Sei $(\chi_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$ die gemäß obigem Lemma zu ε konstruierte Familie von glatten Funktionen. Bezeichne P die (endliche!) Menge der Indizes $p \in \mathbb{Z}^n$, für die $\operatorname{supp}(\chi_p) \cap B \neq \emptyset$ gilt, und setze

$$\varphi(x) := \sum_{p\in P} \chi_p(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dann ist φ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion mit $\operatorname{supp}\varphi = \bigcup_{p\in P} \operatorname{supp}\chi_p$, also kompakt und in U enthalten, sowie $\varphi(x) = 1$ für $x \in B$ nach Konstruktion.

$\square$

Proposition

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $(V_j)_{j=1,\dots,N}$ eine (OBdA) endliche offene Überdeckung von K. Dann gibt es Funktionen $\psi_1, \dots, \psi_N \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) $1 \leq j \leq N\colon 0 \leq \psi_j \leq 1$

2.) $\forall j \in \{1,\dots,N\}\colon \operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq V_j$

3.) $\forall x \in K$ gilt: $\psi_1(x) + \dots + \psi_N(x) = 1$

Wir nennen $(\psi_j)_{j=1,\dots,N}$ eine *der Überdeckung $(V_j)_{j=1,\dots,N}$ untergeordnete glatte Partition der Eins.*

Beweis

Für jedes $x \in K$ gibt es ein $j \in \{1,\dots,N\}$ und $r(x) > 0$ mit $\overline{B_{r(x)}(x)} \subseteq V_j$. Da $(B_{r(x)}(x))_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, können wir $x_1,\dots,x_M$ finden mit $K \subseteq \bigcup_{l=1}^M B_{r(x_l)}(x_l)$. Für $j = 1,\dots,N$ setzen wir $I_j := \{l \in \{1,\dots,M\} : \overline{B_{r(x_l)}(x_l)} \subseteq V_j\}$ und

$$B_j := \bigcup_{l\in I_j} \overline{B_{r(x_l)}(x_l)}.$$

Es ist $B_j \subseteq V_j$ kompakt und $K \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_j$.

Nach obigem Korollar gibt es zu $1 \leq j \leq N$ jeweils ein $\varphi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi_j\big|_{B_j} = 1, \quad \operatorname{supp}\varphi_j \subseteq V_j, \quad 0 \leq \varphi_j \leq 1.$$

Wir setzen $\psi_1 = \varphi_1$ und $\psi_{j+1} := (1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_j)\cdot\varphi_{j+1}$ (für $j = 1,\dots,N-1$). Es ist klar, dass $\psi_1,\dots,\psi_N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar sind; weiters gilt

1.) $0 \leq \psi_1 \leq 1$ und $\quad 0 \leq \psi_{j+1} = \underbrace{(1-\varphi_1)}_{\leq 1}\cdots\underbrace{(1-\varphi_j)}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\varphi_{j+1}}_{\leq 1} \leq 1;$

2.) $\operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq V_j;$

3.) induktiv sieht man zunächst

$$(*) \qquad \psi_1(x) + \ldots + \psi_N(x) = 1 - \prod_{l=1}^{N} \big(1 - \varphi_l(x)\big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

[Es ist nämlich $\psi_1 = \varphi_1 = 1-(1-\varphi_1)$ und aus $\psi_1+\cdots+\psi_j = 1-(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_j)$ folgt $\psi_1+\cdots+\psi_j+\psi_{j+1} = 1-\prod_{l=1}^{j}(1-\varphi_l)+\prod_{l=1}^{j}(1-\varphi_l)\cdot\varphi_{j+1} = 1-\prod_{l=1}^{j}(1-\varphi_l)(1-\varphi_{j+1})$.]

Falls $x \in K$ ist, dann existiert ein $l \in \{1, \ldots, N\}$ mit $x \in B_l$; wegen $\varphi_l\big|_{B_l} = 1$ folgt $1 - \varphi_l(x) = 0$, daher ist die rechte Seite von $(*)$ gleich 1.

□

Anwendung: Sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, $K := \operatorname{supp}(f)$, und (V_j) eine endliche offene Überdeckungen von K. Mit einer glatten Partition $(\psi_j)_{j=1}^N$ der Eins, die (V_j) untergeordnet ist, können wir schreiben:

$$f = \sum_{j=1}^{N} (f \cdot \psi_j),$$

wobei $f \cdot \psi_j \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f \cdot \psi_j) \subseteq V_j$ gilt.
D. h. f kann als Summe von stetigen Funktionen mit „beliebig kleinen Trägern“ dargestellt werden.

25.6. Theorem

Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, dann gilt:
$\forall f \in \mathcal{C}_c(V)$ ist $f \circ \Phi \in \mathcal{C}_c(U)$ und

$$(25.4) \qquad \int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\,dx = \int_V f(y)\,dy$$

Beweis

Sei $K := \operatorname{supp}(f)$, dann ist $\operatorname{supp}(f \circ \Phi) = \Phi^{-1}(K) \subseteq U$ wegen der Stetigkeit von Φ^{-1} kompakt, also ist $f \circ \Phi \in \mathcal{C}_c(U)$.

Schritt 1: Das Theorem gilt für Transpositionen B [25.4, Typ (B)].
Es ist $DB(x) = B$ und $\det B = \pm 1$, daher folgt (25.4) direkt aus Korollar 24.2 (Vertauschung der Integrationsreihenfolge).

Schritt 2: Das Theorem gilt für $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen vom Typ (A) [in 25.4].
Sei $\Phi = G$ von der Form

$$G(x) = (\underbrace{x_1, \ldots, x_{m-1}}_{x'}, g(x), \underbrace{x_{m+1}, \ldots, x_n}_{x''}).$$

Für alle $x \in U$ ist $0 \neq \det DG(x) = D_m g(x', x_m, x'')$. Sei $\operatorname{supp}(f \circ \Phi) \subseteq I' \times [a, b] \times I'' =: Q$ mit geeigneten Zellen $I' \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ und $I'' \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$. Dann ist

$$(*) := \int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\,dx$$

$$= \int_{I'} \int_{I''} \int_a^b f(x', g(x', x_m, x''), x'')\,|D_m g(x', x_m, x'')|\,dx_m\,dx''\,dx'.$$

Für beliebig fixierte x', x'' ist $R_{x',x''}\colon r \mapsto g(x', r, x'')$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus der offenen Teilmengen

$$\mathbb{R} \supseteq U_{x',x''} := \{x_m \in \mathbb{R}\colon (x', x_m, x'') \in U\} \to V_{x',x''} \subseteq \mathbb{R},$$

wobei $V_{x',x''}$ einfach das Bild von $U_{x',x''}$ unter $R_{x',x''}$ bezeichnet.
Das innerste Integral (oben) ist gemäß der eindimensionalen Substitutionsregel [in der Fassung von 25.1] (mittels Substitution $x_m \mapsto g(x', x_m, x'') =: t$, $dt = D_m g(x', x_m, x'')$) gleich

$$\int_{U_{x',x''}} f(x', g(x', x_m, x''), x'')\,|D_m g(x', x_m, x'')|\,dx_m = \int_{V_{x',x''}} f(x', t, x'')\,dt,$$

wodurch wir in diesem Fall auch die erwünschte Formel erhalten, nämlich

$$(*) = \int_{I'} \int_{I''} \int_{V_{x',x''}} f(x', t, x'')\,dt\,dx''\,dx' = \int_V f(y)\,dy.$$

Schritt 3: Sind $U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{H} W$ jeweils $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen offener Mengen im $\mathbb{R}^n$ und das Theorem wahr für F und H, dann gilt das Theorem für $\Phi := H \circ F$.
Es ist

$$\det D\Phi(x) = \det\big(DH(F(x)) \cdot DF(x)\big) = \det DH(F(x)) \cdot \det DF(x)$$

und daher

$$\int_W f(z)\,dz = \int_V f(H(y))\,|\det DH(y)|\,dy$$

$$= \int_U f(H(F(x)))\,|\det DH(F(x))|\,|\det DF(x)|\,dx = \int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\,dx.$$

Schritt 4: Das Theorem gilt, wenn f einen genügend kleinen Träger hat.
Sei nämlich $x_0 \in U$ beliebig und

$$\tilde{\Phi}(x) := \Phi(x + x_0) - \Phi(x_0).$$

Dann ist $\tilde{\Phi}\colon \tilde{U} := U - \{x_0\} \to \tilde{V} := V - \{\Phi(x_0)\}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $\tilde{\Phi}(0) = 0$.
Nach Lemma 25.4 gibt es eine offene Umgebung $\widetilde{W}$ von 0 sowie Transpositionen $B_1, \dots, B_{n-1}$ und Diffeomorphismen $G_1, \dots, G_n$ vom Typ (A) mit

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = B_1 \cdots B_{n-1} \cdot G_n \circ \cdots \circ G_1(\tilde{x}) \qquad \forall \tilde{x} \in \widetilde{W}.$$

Daher gilt mit $W := \widetilde{W} + \{x_0\}$ dann

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = B_1 \cdots B_{n-1} \cdot G_n \circ \cdots \circ G_1(x - x_0) \qquad \forall x \in W.$$

Wenn nun $f \in \mathcal{C}_c(\Phi(W))$ ist, dann folgt (25.4) aus den Schritten 1–3, wobei noch zu beachten ist, dass die zusätzliche Translation um $\Phi(x_0)$ nicht in die Jacobimatrix von Φ eingeht und die Translationsinvarianz des Integrals (auf $\mathbb{R}^n$) zusammen mit passenden Trägereinschlüssen verwendet werden darf.

Schritt 5: Zerlegung des Trägers für beliebiges $f \in \mathcal{C}_c(V)$.
Nach Schritt 4 gilt: Für alle $y \in V$ gibt es eine offene Teilmenge V_y in V so, dass das Theorem für alle stetigen Funktionen $h\colon V \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(h) \subseteq V_y$ gilt.
Sei nun $K := \operatorname{supp}(f) \subseteq V$. Dann ist K kompakt mit offener Überdeckung $(V_y)_{y \in V}$. Sei $(V_{y_j})_{j=1,\ldots,N}$ eine endliche Teilüberdeckung daraus, die K noch überdeckt. Nach 25.5 gibt es eine untergeordnete Partition der Eins $(\psi_j)_{j=1}^N$ und somit ist
$f = \sum\limits_{j=1}^{N} (f \cdot \psi_j)$, wobei $\operatorname{supp}(f \cdot \psi_j) \subseteq V_{y_j}$ $(j = 1, \ldots, N)$.
Da das Theorem nun schon für jeden Summanden bewiesen ist, gilt es also für die ganze Summe und damit für f.

$\square$

26. Ausdehnung auf halbstetige Funktionen

26.1. Lemma (Satz von Dini[1])

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und $f_l : K \to \mathbb{R}$ ($l \in \mathbb{N}$) stetig mit der Eigenschaft, dass

a) $f_0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_l \leq f_{l+1} \leq \cdots$ ((f_l) monoton wachsend)

und

b) $\forall x \in K : \quad \lim\limits_{l\to\infty} f_l(x) = f(x)$ (punktweise Konvergenz),

dann ist (f_l) gleichmäßig konvergent gegen f.

(Eine analoge Aussage gilt für den Fall, dass (f_l) monoton fallend ist.)

Beweis

Wir setzen $g_l := f - f_l$, dann ist g_l stetig auf K,

$$g_l = f - f_l \geq f - f_{l+1} = g_{l+1} \geq 0 \quad \text{und} \quad g_l(x) = f(x) - f_l(x) \to 0 \quad (l \to \infty),$$

d. h. (g_l) ist nicht negativ, monoton fallend und punktweise konvergent gegen 0.
Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt

$$\forall x \in K : \exists N(x) \in \mathbb{N} : \forall l \geq N(x) : \quad 0 \leq g_l(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Funktion $y \mapsto g_{N(x)}(y)$ ist stetig im Punkt $y = x$, daher gibt es ein $\delta(x) > 0$ so, dass für alle $\xi \in K$ mit $\|\xi - x\| < \delta(x)$ gilt

$$\left|g_{N(x)}(\xi) - g_{N(x)}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Familie der Kugeln $\big(B_{\delta(x)}(x)\big)_{x\in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_M \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{M} B_{\delta(x_j)}(x_j).$$

Sei nun $l \geq N := \max(N(x_1), \ldots, N(x_M))$. Zu jedem $\xi \in K$ gibt es ein j mit $\xi \in B_{\delta(x_j)}(x_j)$ und somit

$$\begin{aligned} 0 \leq g_l(\xi) \leq g_{N(x_j)}(\xi) &= g_{N(x_j)}(\xi) - g_{N(x_j)}(x_j) + g_{N(x_j)}(x_j) \\ &\leq |g_{N(x_j)}(\xi) - g_{N(x_j)}(x_j)| + |g_{N(x_j)}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

[1] Ulisse Dini (*14. 11. 1845 Pisa; †28. 10. 1918 Pisa) [u'lisse 'diːni], italienischer Mathematiker und Politiker

Daher ist schließlich für alle $l \geq N$

$$\|f - f_l\|_\infty = \|g_l\|_\infty = \sup_{\xi \in K} |g_l(\xi)| \leq \varepsilon,$$

d. h. für $(l \to \infty)$ konvergiert $f_l \to f$ gleichmäßig.

$\square$

26.2. Korollar

Es sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ und $f_l \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ (für $l \in \mathbb{N}$) mit $f_l \leq f_{l+1}$. Weiters gelte für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass $f(x) = \lim_{l\to\infty} f_l(x)$. Dann ist auch

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

(Eine analoge Aussage gilt für den Fall, dass (f_l) monoton fallend ist.)

Beweis

Für alle x gilt $f_0(x) \leq f_l(x) \leq f(x)$. Falls $f(x) = 0$ und $f_0(x) = 0$ ist, dann muss also auch $f_l(x) = 0$ sein.
Daher gilt: $x \notin \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(f_0) \Rightarrow x \notin \operatorname{supp}(f_l)$, d. h.

$$\operatorname{supp}(f_l) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(f_0) =: K.$$

Auf der kompakten Menge K ist also der Satz von Dini [26.1] anwendbar. Demnach gilt $f_l \to f$ gleichmäßig $(l \to \infty)$ — in diesem Fall sogar auf ganz $\mathbb{R}^n$, weil ja auf $\mathbb{R}^n \setminus K$ sowieso alle f_l gleich Null sind. Aus der Stetigkeit des Integrals [24.8] folgt nun

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_l = \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

$\square$

Grundidee für das Folgende: Verwende Folgen (f_l) aus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften 26.1(a,b) bei Approximation von allgemeineren Integralen; wegen 26.2 ist dies jedenfalls konsistent mit dem bisher definierten Integral auf $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Also sieht unser Programm so aus:
Sei $f_l \in \mathcal{C}_c$, $f_l \leq f_{l+1}$ und $f_l \to f$ punktweise konvergent, dann definieren wir

$$\int f := \lim_{l\to\infty} \int f_l.$$

$\boxed{?}$ Unabhängigkeit der Definition von der approximierenden Folge (f_l)?

26.3. Lemma

Es seien (f_l) und (g_l) (punktweise) monoton wachsende Funktionenfolgen in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \lim_{l\to\infty} f_l(x) = \lim_{l\to\infty} g_l(x) \quad \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

(wegen der Monotonie existieren die Limiten [zumindest als uneigentliche]).
Dann gilt auch

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_l(x)\,dx \quad \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Beweis

Sei $k \in \mathbb{N}$ fix. Wir definieren $h_l(x) := \min(g_l(x), f_k(x))$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Dann ist h_l stetig [weil ja $\min(g_l, f_k) = (g_l + f_k - |g_l + f_k|)/2$ gilt] und hat ebenfalls kompakten Träger, d.h. $h_l \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Weiters ist $h_l(x) \le h_{l+1}(x) \le f_k(x)$, insbesondere also auch (h_l) punktweise monoton wachsend.

Wegen $f_k(x) \le \lim f_l(x) = \lim g_l(x)$ ist $\lim_{l\to\infty} h_l(x) = f_k(x)$ und somit nach Korollar 26.2 auch

$$\int f_k(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int h_l(x)\,dx \underset{[h_l \le g_l]}{\le} \lim_{l\to\infty} \int g_l(x)\,dx.$$

Durch Vertauschung der Rollen von f_l und g_l erhalten wir auch $\displaystyle\int g_k(x)\,dx \le \lim_{l\to\infty} \int f_l(x)\,dx$, somit insgesamt also

$$\lim \int f_l = \lim \int g_l.$$

$\square$

Wir dürfen also feststellen, dass obige Idee zu einem sinnvollen Integralbegriff führt, wenn wir jene Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ betrachten, die als monotone Limiten von Folgen aus $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ auftreten.

26.4. Definition

$$\mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : \ \exists\, (f_l) \text{ in } \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \text{ monoton wachsend mit } f(x) = \lim_{l\to\infty} f_l(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} : \ \exists\, (f_l) \text{ in } \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \text{ monoton fallend mit } f(x) = \lim_{l\to\infty} f_l(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

?	Was für Funktionen sind das?

26.5. Halbstetige Funktionen

Definition:

1.) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$; die Funktion f heißt in x_0 *unterhalbstetig* (*von unten halbstetig*), falls gilt: zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) > c$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(x) > c$ für alle $x \in U$.

2.) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, x_0 \in \mathbb{R}^n$; die Funktion f heißt in x_0 *oberhalbstetig* (*von oben halbstetig*), falls gilt: zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) < c$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(x) < c$ für alle $x \in U$.

Die Funktion f heißt ober- bzw. unterhalbstetig auf $\mathbb{R}^n$, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ober- bzw. unterhalbstetig ist.

Bemerkung:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dann gilt:

1.) f ist unter- und oberhalbstetig in $x_0 \iff f$ ist stetig in x_0

2.) f ist unterhalbstetig in $x_0 \iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$

f ist oberhalbstetig in $x_0 \iff$ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

3.) f unterhalbstetig $\iff -f$ oberhalbstetig

4.) f ist unterhalbstetig auf $\mathbb{R}^n \iff$ für alle $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{x : f(x) > c\}$ offen $\iff$ für alle $c \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\{x : f(x) \leq c\}$ abgeschlossen

(analog für oberhalbstetig mit $\{f(x) < c\}$ offen bzw. $\{f(x) \geq c\}$ abgeschlossen)

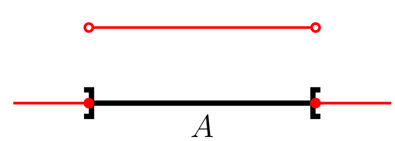
Beispiel

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und bezeichne $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die *charakteristische Funktion* (oder Indikatorfunktion) von A, definiert durch

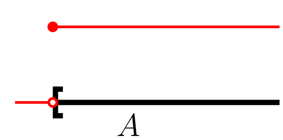
$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Dann gilt:

- $\mathbb{1}_A$ unterhalbstetig $\Leftrightarrow$ A offen



- $\mathbb{1}_A$ oberhalbstetig $\Leftrightarrow$ A abgeschlossen



- $\mathbb{1}_A$ stetig $\Leftrightarrow$ $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{R}^n$

26.6. Theorem

1.) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dann gilt:

Es ist $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) f ist unterhalbstetig

(b) es gibt eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$.

2.) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, dann gilt:

Es ist $f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) f ist oberhalbstetig

(b) es gibt eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass $f(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$.

Beweis

Es genügt, Punkt 1.) zu beweisen (denn es gilt ja: f oberhalbstetig $\Leftrightarrow -f$ unterhalbstetig).

$\Rightarrow$ Es ist $f(x) \geq f_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$; sei nun $K := \operatorname{supp}(f_0)$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ natürlich $f(x) \geq f_0(x) = 0$; also gilt (b).

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $c > 0$ mit $f(x_0) > c$. Wegen $f_l(x_0) \nearrow f(x_0)$ $(l \to \infty)$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f_k(x_0) > c$.

Da f_k stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit der Eigenschaft: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f_k(x) > c$; somit folgt

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : \quad f(x) \geq f_k(x) > c,$$

also ist f unterhalbstetig in x_0.

$\Leftarrow$ Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine Funktion mit den Eigenschaften (a) und (b) gemäs 1.).

- Zunächst gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, dass $f(x) \geq 0$; zu jedem $x \in K$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x, so dass (nach 26.5, Bem. 4) gilt:

$$\forall \xi \in U_x : \quad f(\xi) > \underbrace{\lfloor f(x) \rfloor - 1}_{=: -M_x} \in \mathbb{Z}.$$

K ist kompakt, daher gibt es $x_1, \ldots, x_N$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\xi \in K$

$$f(\xi) \geq \min(0, -M_{x_1}, \ldots, -M_{x_N}) =: -M \qquad (M \in \mathbb{Z} \text{ und } M \geq 0)$$

Insgesamt erhalten wir: $\exists M \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad f(x) \geq -M.$

- Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller offenen Kugeln in $\mathbb{R}^n$ um Punkte mit rationalen Koordinaten und mit rationalem Radius, d.h.

$$\mathcal{B} := \{B_r(q) : r \in \mathbb{Q}, r > 0, q \in \mathbb{Q}^n\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

(mit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ als Bezeichnung für die Potenzmenge von $\mathbb{R}^n$) und

$$\Lambda := \{(B_r(q), c) : B_r(q) \in \mathcal{B}, c \in \mathbb{Q}, c \geq -M \text{ so, dass } \forall x \in B_r(q) : f(x) \geq c\}.$$

Die Menge $\mathcal{B}$ ist abzählbar und somit auch $\Lambda \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{Q}$. Sei $\Lambda = \{\iota_0, \iota_1, \iota_2, \dots\}$, d.h. $\iota_0, \iota_1, \dots$ also eine Abzählung der Elemente von Λ.

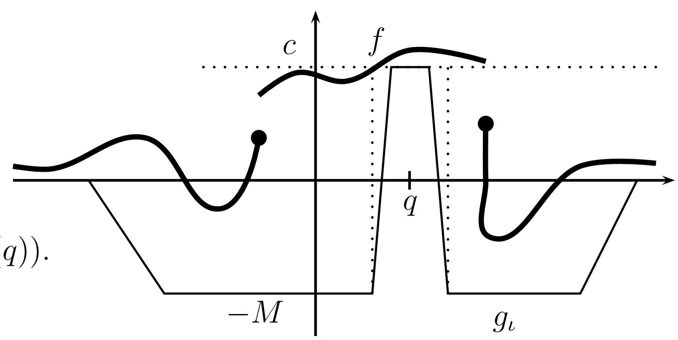
- Für jedes $\iota = (B_r(q), c) \in \Lambda$ wählen wir $g_\iota \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) $g_\iota(x) = c \qquad \forall x \in B_{\frac{r}{2}}(q)$

2.) $g_\iota(x) \leq c \qquad \forall x \in B_r(q)$

3.) $g_\iota(x) = -M \quad \forall x \in K \setminus B_r(q)$

4.) $g_\iota(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup B_r(q))$.



Für alle $\iota \in \Lambda$ ist $f \geq g_\iota$

und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $f(x) = \sup\{g_\iota(x) : \iota \in \Lambda\}$

[zum Beweis betrachte $q \to x$, $r \to 0$, $c \to f(x)$].

Definiere für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k(x) := \max(g_{\iota_0}(x), g_{\iota_1}(x), \dots, g_{\iota_k}(x))$,

dann ist $f_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ [als endliches Maximum solcher Funktionen]

und für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f_k(x) \nearrow f(x)$ $(k \to \infty)$. Daher ist $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$.

□

26.7. Korollar

$$\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$$

Beweis

Die Relationen $\mathcal{C}_c \subseteq \mathcal{H}^\uparrow$ und $\mathcal{C}_c \subseteq \mathcal{H}^\downarrow$ sind klar.
Ist $f \in \mathcal{H}^\uparrow \cap \mathcal{H}^\downarrow$, dann gibt es kompakte Mengen $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften: $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K_1$ ist $f(x) \geq 0$ und $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K_2$ ist $f(x) \leq 0$.
Somit ist also $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus (K_1 \cup K_2)$ dann notwendig $f(x) = 0$, d.h. $\operatorname{supp}(f) \subseteq K_1 \cup K_2$.
Weiters ist f unterhalbstetig und oberhalbstetig, also f auch stetig.

□

26.8. Beispiel

Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist $\mathbb{1}_U \in \mathcal{H}^\uparrow$ und für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ist $\mathbb{1}_K \in \mathcal{H}^\downarrow$.
(Ist A abgeschlossen und nicht beschränkt, so verletzt $\mathbb{1}_A$ die Bedingung 2.)(b) in 26.6.)

26.9. Definition (Integral für $\mathcal{H}^\uparrow \cup \mathcal{H}^\downarrow$)

1.) Sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und (f_l) eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_l \nearrow f$ $(l \to \infty)$, dann definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\,dx \qquad \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

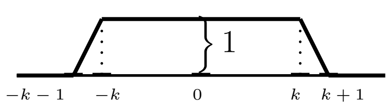
2.) Sei $f \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ und (f_l) eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_l \searrow f$ $(l \to \infty)$, dann definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\,dx \qquad \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

26.10. Bemerkung

1.) Der Wert des Integral ist gemäß Lemma 26.3 wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der approximierenden monotonen Folgen.

2.) Die Werte $+\infty$ und $-\infty$ treten tatsächlich auf: z.B. für $f = 1 \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$ wählen wir zu jedem $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, f_k als Trapezfunktion mit $f_k\big|_{B_k(0)} = 1$ und $f_k\big|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{k+1}(0)} = 0$; dann ist



$$\int_{\mathbb{R}} 1\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} (2k+1) = +\infty$$

3.) Es gilt auch folgende Aussage (Beweis als Übungsaufgabe):

Wenn $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ und $f \geq 0$, dann folgt

$$f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[-k,k]^n} f(x)\,dx$$

26.11. Proposition

Es seien $f, g \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in [0, \infty[$, dann sind $f + g, \lambda \cdot f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

1.) $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ (mit $a + \infty = \infty + a := \infty \ \forall a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$)

2.) $\int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$ (mit $\lambda \cdot \infty := \infty$ für $\lambda > 0$, $0 \cdot \infty := 0$)

3.) Falls $f \leq g$: $\int f(x)\,dx \leq \int g(x)\,dx$

(Analoge Aussagen gelten für $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$)

Beweis

(1.) und (2.) folgen aus Definition 26.9;
für (3.): OBdA gilt $f_l \nearrow f,\ g_l \nearrow g$ mit $f_l \leq g_l$

□

26.12. Theorem (Fubini[2])

Es sei $1 \leq k < n$ und $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$; wir verwenden im folgenden für $x \in \mathbb{R}^n$ die Notation $x = (\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{x'}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{x''}) = (x', x'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Dann gilt

1.) Für alle $x'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist die Funktion $f_{x''} : x' \mapsto f(x', x'')$ in $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$ und somit durch $F(x'') := \int_{\mathbb{R}^k} f(x', x'')\, dx'$ eine Funktion $F : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definiert.

2.) Es ist $F \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^{n-k})$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} F(x'')\, dx'' = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx. \tag{26.1}$$

(Eine analoge Aussage gilt für $\mathcal{H}^\downarrow$.)

Beweis

Sei (f_l) eine Folge in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_l \nearrow f$; für $x'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ sei $f_{l,x''}(x') := f_l(x', x'')$;
$f_{l,x''} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^k)$ [denn $\operatorname{supp}(f_{l,x''}) \subseteq \{x' : (x', x'') \in \operatorname{supp}(f_l)\}$ ist beschränkt] und $f_{l,x''} \nearrow f_{x''}$ $(l \to \infty)$, daher folgt $f_{x''} \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^k)$ und somit 1.).
Es gilt

$$F(x'') = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_{x''}(x')\, dx' = \lim_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_{l,x''}(x')\, dx' = \lim_{l \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f_l(x', x'')\, dx'.$$

Wir setzen $F_l(x'') := \int_{\mathbb{R}^k} f_l(x', x'')\, dx'$, dann gilt:

- $F_l \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^{n-k})$: Stetigkeit folgt aus den Sätzen über Paramterintegrale aus Analysis 2 (wobei diese hier k-mal iterativ angewendet werden);

  ist $x'' \notin P''(\underbrace{(\operatorname{supp}(f_l))}_{\text{kompakt}})$, wobei die Projektion $P'' : (x', x'') \mapsto x''$ stetig ist,

  dann ist $F_l(x'') = \int 0 = 0$; zudem ist P''(komp. Menge) stets kompakt, also ist auch $\operatorname{supp}(F_l)$ kompakt.

[2] Der italienische Mathematiker Guido Fubini (*19. 1. 1879 Venedig; †6.,6. 1943New York) [ˈguiːdo fuˈbiːni] hat als Erster einen derartigen Satz bewiesen, der es ermöglicht, mehrdimensionale Integrale mit Hilfe von eindimensionalen auszurechnen.

- Aus 26.11,3.) folgt $F_l \leq F_{l+1}$; und oben haben wir gesehen, dass $F(x'') = \lim_{l\to\infty} F_l(x'')$, also ist $F \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^{n-k})$; schließlich gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} F(x'')\,dx'' = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} F_l(x'')\,dx''$$

$$= \lim_{l\to\infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f_l(x', x'')\,dx' \right) dx''}_{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\,dx \quad [\text{gemäß } 24.2, 24.4]} = \lim_{l\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

□

26.13. Korollar

Es sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \cdots \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n.$$

(analog für $\mathcal{H}^\downarrow$)

Beweis

Durch sukzessive Anwendung von 26.12 für $k = n-1, n-2, \ldots, 1$.

□

26.14. Korollar

Es sei $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n), 1 \leq k < n$ und die Notation $x = (x', x'')$ in der Bedeutung wie in 26.12. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x', x'')\,dx' \right) dx'' = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} f(x', x'')\,dx'' \right) dx' = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx. \tag{26.2}$$

(analog für $\mathcal{H}^\downarrow$)

Beweis

Folgt durch Vertauschung der Rollen von x' und x'' im Beweis von (26.1).

□

Bemerkung: im Vergleich zu manch anderen Versionen des Satzes von Fubini (vgl. etwa mit [Heu04, Abschnitt 200]) ist die hier angegebene einfach, weil die Funktionen aus $\mathcal{H}^\uparrow$ bzw. $\mathcal{H}^\downarrow$ außerhalb eines Kompaktums ihr Vorzeichen nicht mehr ändern können.

26.15. Bemerkung zum Lebesgue-Integral

Wie in Forster, Analysis 3, §6, ausgeführt, kann man nun formal ähnlich wie in Analysis 1 bei der Definition des Riemann-Integrals vorgehen und Ober- bzw. Unterintegrale einführen, wobei nun statt Treppenfunktionen (auf einem beschränkten Intervall) eben Funktionen aus $\mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ herangezogen werden:

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} f(x)\,dx := \inf\{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx : \varphi \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n), \varphi \geq f\},$$

$$\int_{*\,\mathbb{R}^n} f(x)\,dx := \sup\{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx : \psi \in \mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n), \psi \leq f\}.$$

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \pm\infty$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, falls

$$-\infty < \int_{*\,\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} f(x)\,dx < \infty.$$

Der gemeinsame Wert des Ober- und Unterintegrals ist dann das *Lebesgue-Integral* von f und wird mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ bezeichnet.

Zum Beispiel ist eine Funktion f aus $\mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das Integral im Sinne der Definition 26.9 endlich ist.
Wir werden an dieser Stelle noch nicht mit der Diskussion des Lebesgue-Integrals fortfahren, weil wir vorerst möglichst rasch zu den Integralsätzen (in moderner geometrischer Fassung) vorstoßen wollen. Am Ende der Vorlesung werden wir allerdings eine kurze Einführung in den allgemeinen Aufbau einer Integrationstheorien aus der so genannten Maßtheorie geben und auf diesem alternativen Weg wieder auf das Lebesgue-Integral stoßen.

26.16. Integral für stetige Funktionen auf Kompakta

Vorbemerkung: In der Riemannschen Theorie mehrfacher Integrale muss eine beschränkte Menge B einen Jordan-messbaren Rand haben, um z.B. die Integration der konstanten Funktion 1 (allg. aller stetigen Funktionen) darauf zuzulassen [vgl. [Heu04, Abschnitt 202]]. Bei unserem Integralbegriff mittels halbstetiger Funktionen fällt für stetige Funktionen auf Kompakta diese Einschränkung weg.
Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, wie üblich $\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ und $\mathcal{C}_+(K) := \{f \in \mathcal{C}(K) : f \geq 0\}$ die Teilmenge der nichtnegativen stetigen Funktionen auf K.
Für $f \in \mathcal{C}_+(K)$ sei die Fortsetzung zu einer Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ definiert durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in K \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus K. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass $\tilde{f} \in \mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ gilt: zunächst ist $\tilde{f} = 0$ außerhalb von K; für $c \leq 0$ ist die Menge $\{\tilde{f}(x) \geq c\} = \mathbb{R}^n$ trivialer Weise abgeschlossen und für $c > 0$ ist $\{\tilde{f}(x) \geq c\} = \{x \in K : f(x) \geq c\}$ wegen der Stetigkeit von $f : K \to \mathbb{R}$ abgeschlossen (als Teilmenge von K und wegen der Abgeschlossenheit von K somit auch in $\mathbb{R}^n$), also $\tilde{f}$ auch oberhalbstetig.

Nun definieren wir für $f \in \mathcal{C}_+(K)$

$$\int_K f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx. \tag{26.3}$$

Eigenschaften:

Seien $f, g \in \mathcal{C}_+(K)$, $\lambda \geq 0$, dann gilt

$$\int_K (f+g) = \int_K f + \int_K g \quad \text{und} \quad \int_K (\lambda f) = \lambda \int_K f,$$

sowie

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int_K f \leq \int_K g.$$

Insbesondere gilt

$$\int_K f \leq \|f\|_\infty \int_K 1 \leq \|f\|_\infty \cdot R^n,$$

falls $K \subseteq \left[-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right]^n$ und somit stets $\int_K f < \infty$.

Für $f \in \mathcal{C}(K)$ schreiben wir $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_+(K)$ (z.B. $f_1 := \max(0, f)$, $f_2 := \max(0, -f)$).
Falls $f_1 - f_2 = f = g_1 - g_2$ mit $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_+(K)$, dann ist wegen

$$f_1 + g_2 = f_2 + g_1 \quad \Rightarrow \quad \int_K f_1 + \int_K g_2 = \int_K f_2 + \int_K g_1 \quad \Rightarrow \quad \int_K f_1 - \int_K f_2 = \int_K g_1 - \int_K g_2$$

die folgende Definition unabhängig von der gewählten Zerlegung $f = f_1 - f_2$ mit nichtnegativen stetigen Funtionen f_1, f_2:

Definition

Sei $f \in \mathcal{C}(K)$ und $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_+(K)$. Dann setzen wir

$$\int_K f(x)\,dx := \int_K f_1(x)\,dx - \int_K f_2(x)\,dx. \tag{26.4}$$

26.17. Proposition

1.) Die Zuordnung $f \mapsto \int\limits_K f(x)\,dx$ ergibt ein monotones lineares Funktional $\mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$.

2.) Sei $c := \int_K 1 \geq 0$, dann gilt $\forall f \in \mathcal{C}(K)$

$$\left| \int\limits_K f(x)\,dx \right| \leq c \cdot \|f\|_\infty .$$

(Stetigkeit des Integrals mit Operatornorm $\leq c$ [gilt sogar $= c$].)

Beweis

1.) Die Linearität folgt aus den Eigenschaften in 26.16.

Monotonie: Sei $f_1 - f_2 = f \leq g = g_1 - g_2$ mit $f_j, g_j \in \mathcal{C}_+(K)$ $(j = 1, 2)$. Dann folgt

$$\underbrace{f_1 + g_2 \leq f_2 + g_1}_{\in\, \mathcal{C}_+(K)} \overset{[26.16]}{\Longrightarrow} \int\limits_K f_1 + \int\limits_K g_2 \leq \int\limits_K f_2 + \int\limits_K g_1$$

$$\Rightarrow \int\limits_K f = \int\limits_K f_1 - \int\limits_K f_2 \leq \int\limits_K g_1 - \int\limits_K g_2 = \int\limits_K g.$$

2.) Es ist $\pm f \leq |f| \leq \|f\|_\infty \cdot 1$, daher

$$\left| \int\limits_K f \right| \leq \int\limits_K |f| \leq \int\limits_K \|f\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty \cdot \int\limits_K 1\,dx = c \cdot \|f\|_\infty.$$

□

26.18. Proposition

Es sei f_l eine Folge in $\mathcal{C}(K)$, $f \in \mathcal{C}(K)$ und $f_l \to f$ $(l \to \infty)$ gleichmäßig, dann gilt

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_K f_l(x)\,dx = \int\limits_K f(x)\,dx. \qquad \text{(Stetigkeit des Integrals)}$$

Beweis

$$\left| \int\limits_K f(x)\,dx - \int\limits_K f_l(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_K (f(x) - f_l(x))\,dx \right| \leq [\text{wegen } 26.17, 2.)]$$

$$\leq c \cdot \|f - f_l\|_\infty \to 0 \qquad (l \to \infty).$$

□

26.19. Theorem (Transformationsformel)

Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}$ offen, $\Phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $K \subseteq V$ kompakt. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{C}(K)$:

$$\int_K f(y)\, dy = \int_{\Phi^{-1}(K)} f(\Phi(x))\, |\det D\Phi(x)|\, dx. \tag{26.5}$$

(Φ^{-1} ist stetig, daher ist $\Phi^{-1}(K)$ kompakt.)

Beweis

Es genügt, die Gleichung für $f \in \mathcal{C}_+(K)$ zu zeigen (ist nämlich $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_+(K)$, so folgt sie für f aus der Linearität).
Sei $\tilde{f}$ die Fortsetzung von f durch 0 in $\mathbb{R}^n \setminus K$; dann ist $\tilde{f} \in \mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ [nach 26.16],
daher gibt es eine Folge (f_l) in $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_l(x) \searrow \tilde{f}(x)$ $(l \to \infty)$ punktweise; OBdA gilt auch $\operatorname{supp}(f_l) \subseteq V$ für alle $l \in \mathbb{N}$.
Wir erhalten daher zunächst

$$\int_K f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y)\, dy = \lim_{l\to\infty} \int_V f_l(y)\, dy = \text{[gemäß Theorem 25.6]}$$

$$= \lim_{l\to\infty} \int_U \underbrace{f_l(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|}_{=:\, g_l(x)}\, dx =: \circledast.$$

Es ist $g_l \in \mathcal{C}_c(U)$ und $g_l(x) \searrow \tilde{g}(x) := \tilde{f}(\Phi(x))|\det D\Phi(x)| \quad (x \in U)$.
Hierbei ist $\tilde{g}$ gerade die Fortsetzung von $g(x) := f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)| \quad (x \in \Phi^{-1}(K))$, daher ist

$$\circledast = \int_U \tilde{g}(x)\, dx = \int_{\Phi^{-1}(K)} g(x)\, dx.$$

□

Bemerkung: Der obige Beweis zeigt eigentlich sogar, dass die Transformationsformel auf für Funktionen $f \in \mathcal{H}^{\downarrow} \cup \mathcal{H}^{\uparrow}$ auf jedem Kompaktum in V gilt.

26.20. Polarkoordinaten und Verwandtes

In Beispiel 25.3, 1.) hatten wir

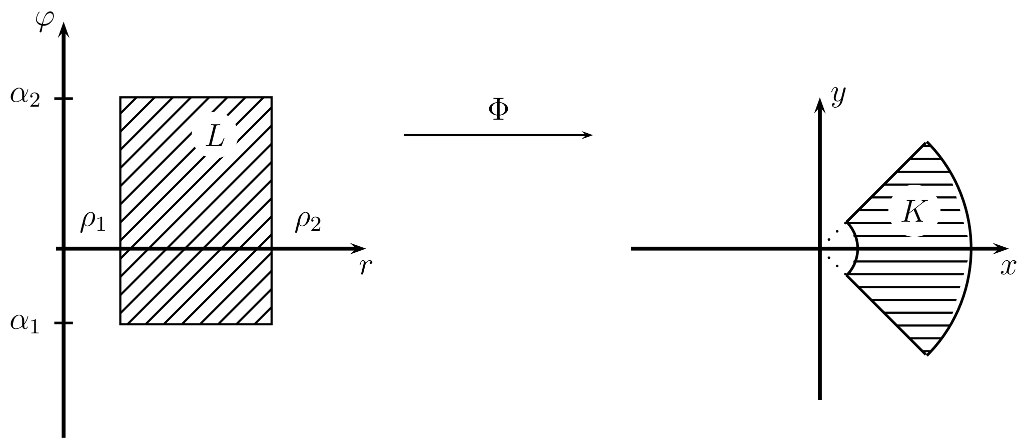
$$U = U_{-\pi} =]0, \infty[\times]-\pi, \pi[, \qquad V = V_{-\pi} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) :\ x \leq 0\}$$

und den Diffeomorphismus $\Phi :\ U \to V$, $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.
Seien $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$, $-\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ und setze

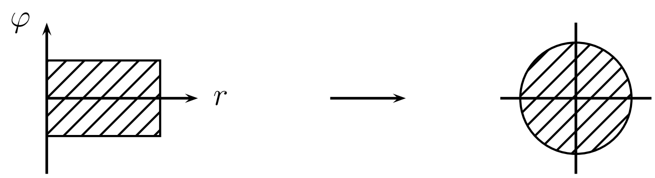
$$L := [\rho_1, \rho_2] \times [\alpha_1, \alpha_2] \subseteq U, \quad K := \Phi(L) \subseteq V.$$

Theorem 26.19 ist hier auf $f \in \mathcal{C}(K)$ anwendbar und ergibt

$$\int_K f(x)\,dy = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d\varphi dr \qquad \left[= \int_L f(r\dots)r\,d(r,\varphi)\right]$$



In den Anwendung benötigen wir aber oft Integrale über ganze Kreisflächen, d. h. $[\alpha_1, \alpha_2] \rightsquigarrow [-\pi, \pi]$ und $[\rho_1, \rho_2] \rightsquigarrow [0, R]$ und $K \rightsquigarrow \overline{B_R(0)} = \{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$



Proposition

Sei $R > 0,\ B := \overline{B_R(0)},\ T := [0, R] \times [-\pi, \pi]$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}(B)$

(26.6) $$\int_B f(x, y)\,d(x, y) = \int_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,d(r, \varphi).$$

Beweis

Vermöge der üblichen Zerlegung $f = f^+ - f^-$ mit nichtnegativen stetigen Funktionen $f^\pm \geq 0$ können wir OBdA annehmen, dass bereits $f \geq 0$ gilt.
Setze $g(r, \varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r$, dann ist $g \in \mathcal{C}(T)$;
seien $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$, $-\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < \pi$ und K, L wie oben definiert.
Es ist

$$\int_K f = \int_B f \cdot \mathbb{1}_K \leq \int_B f \qquad \text{und} \qquad \int_L g = \int_T g \cdot \mathbb{1}_L \leq \int_T g,$$

daher

$$0 \leq \int_B f - \int_K f = \int_B f \cdot (1 - \mathbb{1}_K) \leq \underbrace{\sup_{z \in B} |f(z)|}_{C_B \geq 0} \cdot \int_{B \setminus K} 1$$

und

$$0 \leq \int_T g - \int_L g = \int_T g \cdot (1 - \mathbb{1}_L) \leq \underbrace{\sup_{w \in T} |g(w)|}_{C_T \geq 0} \cdot \int_{T \setminus L} 1.$$

Daraus folgt weiter wegen $\int_K f = \int_L g$ die Ungleichung

$$\left| \int_B f - \int_T g \right| = \left| \int_B f - \int_K f + \int_L g - \int_T g \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_B f - \int_K f \right| + \left| \int_L g - \int_T g \right| \leq C_B \cdot \int_{B \setminus K} 1 + C_T \cdot \int_{T \setminus L} 1.$$

Wenn wir nun $\rho_1 \to 0$, $\rho_2 \to R$, $\alpha_1 \to -\pi$ und $\alpha_2 \to \pi$ streben lassen, so folgt

$$\int_{B \setminus K} 1 \to 0, \quad \int_{T \setminus L} 1 \to 0,$$

was man z.B. durch nichtnegative stetige Abschneidefunktionen sehen kann, die in ε-Nähe zu $B \setminus K$ bzw. $T \setminus L$ gleich 1 und ab 2ε-Entfernung gleich 0 sind.
Somit folgt aus obiger Ungleichung schließlich

$$\int_B f = \int_T g.$$

□

Durch ähnliche Überlegungen sieht man, dass auch Zylinder- und Kugelkoordinaten „bis zum hin Rand“ verwendet werden können, d.h. es gilt:

(26.7)
$$\int_{B \times [0,h]} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{[0,R] \times [-\pi,\pi] \times [0,h]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, d(r,\varphi,z)$$

für Zylinderkoordinaten und $f \in \mathcal{C}\,(B \times [0,h])$ und

(26.8)
$$\int_{\overline{B_R(0)}} f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

$$= \int_{[0,R] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\, \sin\theta\, d(r,\varphi,\theta)$$

für Kugelkoordinaten und $f \in \mathcal{C}\left(\overline{B_R(0)}\right)$.

27. Volumina und Integration über Normalbereiche

27.1. Definition

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, dann heißt

$$\mathrm{Vol}_n(K) := \int\limits_K 1\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(x)\,dx \quad \in [0,\infty[$$

das *n-dimensionale Volumen von K*.

27.2. Lemma

Sei $1 \leq k < n$, $K_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $K_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ kompakt, dann gilt:

$$\mathrm{Vol}_n(K_1 \times K_2) = \mathrm{Vol}_k(K_1) \cdot \mathrm{Vol}_{n-k}(K_2)$$

Beweis

Wir schreiben $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$; dann ist

$$\mathrm{Vol}_n(K_1 \times K_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\mathbb{1}_{K_1 \times K_2}(x', x'')}_{\mathbb{1}_{K_1}(x') \cdot \mathbb{1}_{K_2}(x'')} d(x', x'') \overset{[26.12]}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-k}} \Big(\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_{K_1}(x')\,dx'}_{\text{unabh. von } x''} \Big) \mathbb{1}_{K_2}(x'')\,dx''$$

$$= \int\limits_{K_1} 1\,dx' \cdot \int\limits_{K_2} 1\,dx'' = \mathrm{Vol}_k(K_1) \cdot \mathrm{Vol}_{n-k}(K_2).$$

□

27.3. Beispiele

1.) In $\mathbb{R}^1$: $\mathrm{Vol}_1([a,b]) = \int\limits_{[a,b]} 1\,dx = \int\limits_a^b 1\,dx = b - a.$

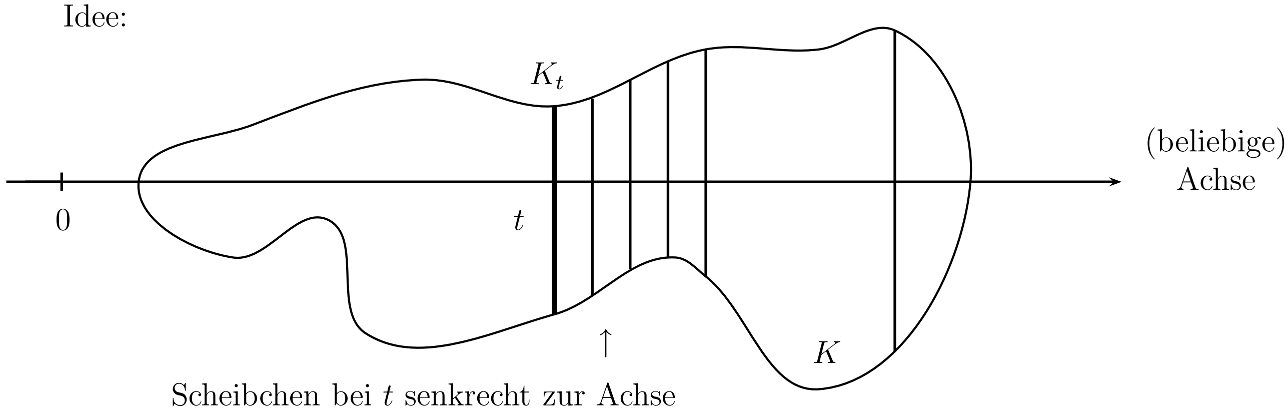
2.) Sei $K = \prod\limits_{j=1}^n [a_j, b_j] \subseteq \mathbb{R}^n$, dann ist

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \prod_{j=1}^n \mathrm{Vol}_1([a_j, b_j]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

3.) Zylinder mit kompakter Basis $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und Höhe $h \geq 0$: $Z := B \times [0,h] \subseteq \mathbb{R}^n$,
$\mathrm{Vol}_n(Z) = \mathrm{Vol}_{n-1}(B) \cdot \mathrm{Vol}_1([0,h]) = h \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(B)$ (Höhe mal Grundfläche)

27.4. Prinzip von Cavalieri[1]

Idee:



Scheibchen bei t senkrecht zur Achse
$\mathrm{Vol}(K) \approx$ Summe über die Flächen von (K_t)

Proposition

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$K_t := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \colon (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}.$$

Dann gilt:

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)\, dt.$$

Beweis

K_t ist abgeschlossen (teste z.B. mit Folgen) und beschränkt, weil enthalten in der kompakten Projektion von K auf die Hyperebene $x_n = 0$; weiters gilt $\mathbb{1}_{K_t}(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{x'}) = \mathbb{1}_K(x', t)$,

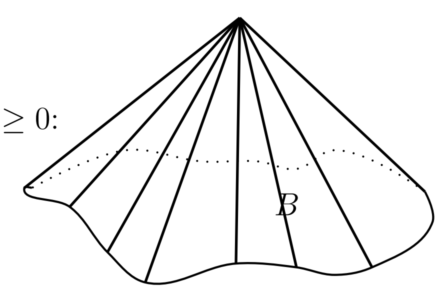
daher ist

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{K_t}(x')\, dx'\, dt = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(K_t)\, dt.$$

$\square$

Beispiel

Kegel mit kompakter Basis $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und Höhe $h \geq 0$:



$K := \{((1-\lambda)x', \lambda h) \colon x' \in B, 0 \leq \lambda \leq 1\}$
$K_t = \emptyset$ für $t < 0$ oder $t > h$;
$0 \leq t \leq h\colon \;\; K_t = \{(1-\lambda)x' \colon x' \in B, \lambda h = t\} =$

[1] Der italienische Mönch Bonaventura Francesco Cavalieri (*1598 Mailand; †1647 Bologna) bonavenˈtuːra franˈtʃesko kavaˈlieːri war als Mathematiker und Astronom tätig und beschäftigte sich hauptsächlich mit der Berechnung von Oberflächen und Volumina. Das von ihm entwickelte Prinzip der Indivisibilien, das hier vorgestellt wird, wurde in einer Vorform bereits 1604 von Kepler verwendet.

$= \left\{ \left(1 - \frac{t}{h}\right) x' \colon x' \in B \right\} = \left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot B$. Daher ist

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_0^h \underbrace{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\left(1 - \frac{t}{h}\right) \cdot B\right)}_{:=v(t)} dt = \int_0^h v(t)\, dt.$$

Für $t = h$ ist $v(h) = \mathrm{Vol}_{n-1}(0 \cdot B) = \mathrm{Vol}_{n-1}(\{0\}) = \mathrm{Vol}_1([0,0])^{n-1} = 0$ und für $0 \leq t < h$ ist

$$v(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{K_t}(x')\, dx' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_B\left(\frac{x'}{(1 - \frac{t}{h})}\right) dx' =$$

[mit dem Diffeomorphismus $\Phi \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\Phi(x') = \frac{x'}{1 - \frac{t}{h}}$, $\det D\Phi(x') = 1/(1 - \frac{t}{h})^{(n-1)}$]

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_B(\Phi(x'))|\det D\Phi(x')|\, dx' \cdot \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_B(y')\, dy' \cdot \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1}.$$

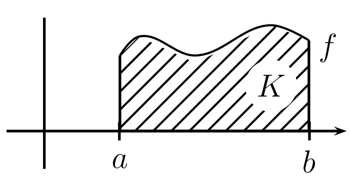
Wegen $\lim_{t \to h} v(t) = 0 = v(h)$ ist v stetig und somit

$$\mathrm{Vol}_n(K) = \int_0^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n-1} dt \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(B) = -\frac{h}{n} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{t}{h}\right)^n \Big|_0^h}_{-1} \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(B) = \frac{h}{n} \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(B).$$

Speziell für $n = 3$ ergibt sich die bekannte Formel "Grundfläche mal Höhe Drittel".

27.5. Beispiele

1.) Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f \geq 0$; $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$



$\mathrm{Vol}_2(K)$ ... Fläche unter dem Graphen von f

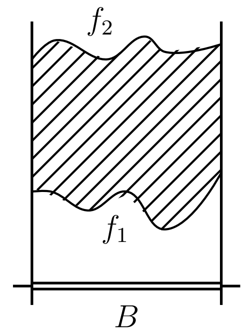
Mit dem Prinzip von Cavalieri und $K_x = [0, f(x)]$ erhalten wir

$$\mathrm{Vol}_2(K) = \int_a^b \mathrm{Vol}_1(K_x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2.) Verallgemeinerung von 1.): Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f_1, f_2\colon B \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f_1(x) \le f_2(x)$ für alle $x \in B$.
Setze $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon x \in B, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$.
Dann ergibt sich

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(K) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{1}_K(x, y)\, d(x, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_K(x, y)\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_B \Big(\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1\, dy\Big) \cdot dx = \int\limits_B (f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$



3.) Volumen der n-dimensionalen Kugel $\overline{B_r^n(0)}$ mit Radius $r > 0$:

Wegen $\mathbb{1}_{\overline{B_r^n(0)}}(x) = \mathbb{1}_{\overline{B_1^n(0)}}\left(\frac{x}{r}\right)$ können wir dies mittels Transformation $\Phi\colon x \mapsto \frac{x}{r}$ mit $\det D\Phi = 1/r^n$ wie folgt auf die Berechung des Volumens der Einheitskugel $K_n := \overline{B_1^n(0)}$ zurückführen

$$\mathrm{Vol}_n(\overline{B_r^n(0)}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_n}\left(\frac{x}{r}\right)\, dx = r^n \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_n}\left(\frac{x}{r}\right) r^{-n}\, dx$$
$$= r^n \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_n}(y)\, dy = r^n \cdot \mathrm{Vol}_n(K_n).$$

Wir gehen nun rekursiv vor: sei $V_n := \mathrm{Vol}_n(K_n)$ $(n \in \mathbb{N},\, n \ge 1)$.

$\underline{n = 1}$: $V_1 = \mathrm{Vol}_1([-1, 1]) = 1 - (-1) = 2$

$\underline{n > 1}$: $K_n = \{(x', t)\colon x' \in K_{n-1}, t \in \mathbb{R} \text{ mit } \|x'\|^2 + t^2 \le 1\}$;
daher ist $(K_n)_t = \emptyset$ für $|t| > 1$
und $(K_n)_t = \left(\overline{B^{n-1}_{\sqrt{1-t^2}}(0)}\right) = \sqrt{1 - t^2} \cdot K_{n-1}$ für $|t| \le 1$;
somit folgt

$$V_n = \int\limits_{-1}^{1} \underbrace{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\sqrt{1 - t^2} \cdot K_{n-1}\right)}_{=(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \mathrm{Vol}_{n-1}(K_{n-1}) \text{ [wie oben]}} dt = V_{n-1} \cdot \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt = c_n \cdot V_{n-1},$$

wobei $c_n := \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt =$. Weil $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng fallend ist, können wir im Integral für c_n die Substitution $t = \cos s$, $dt = -\sin s \cdot ds$, vornehmen und erhalten

$$c_n = \int\limits_0^{\pi} (\sin^2 s)^{\frac{n-1}{2}} \sin s\, ds = \int\limits_0^{\pi} \sin^n s\, ds = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n s\, ds,$$

wobei letzteres Integral mittels partieller Integration rekursiv berechnet werden kann [vgl. VO Analysis 1, 10.4]. Es ergibt sich dann insgesamt die Formel

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

[siehe z.B. [For84, Beispiel (5.7)]].

Als Übungsaufgabe sollten zumindest die folgenden Fälle explizit berechnet werden:

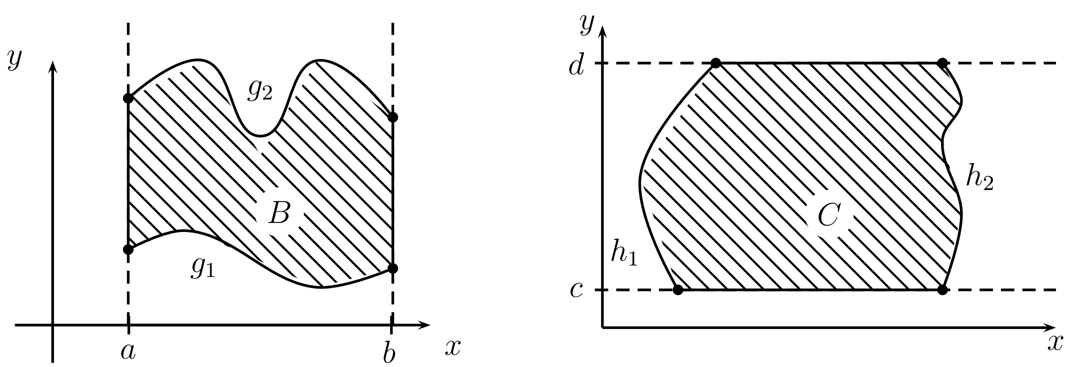
$\underline{n=2}$: mittels (26.8) und Polarkoordinaten oder $c_2 = \int_0^\pi \sin^2 s\, ds = \frac{\pi}{2}$:

$$V_2 = c_2 \cdot V_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$$

$\underline{n=3}$: $V_3 = \frac{4}{3}\pi$

27.6. Normalbereiche

In der Ebene:



Es seien $g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $h_1, h_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig sowie $g_1(x) \le g_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$ und $h_1(y) \le h_2(y) \quad \forall y \in [c,d]$. Dann nennen wir

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

bzw.

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

einen *Normalbereich* bzgl. der x-Achse bzw. bzgl. der y-Achse. Diese Mengen sind stets kompakt.

Proposition

Sei f eine stetige Funktion auf dem Normalbereich B bzw. C, dann gilt

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \tag{27.1}$$

bzw.

$$\int_C f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{27.2}$$

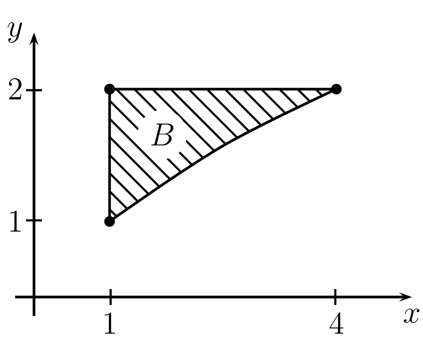
Beweis

Es genügt, (27.1) zu beweisen; sei $B \subseteq [a,b] \times [m,M]$ (z. B. $M = \max(g_2)$, $m = \min(g_1)$) und $\tilde{f}$ die Ausdehnung von f auf $\mathbb{R}^2$ durch Nullsetzen außerhalb B, dann folgt mittels des Satzes von Fubini

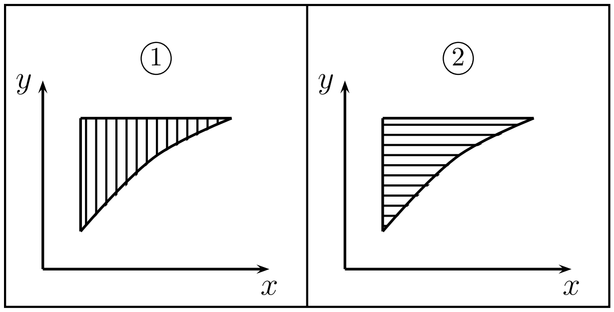
$$\int_B f = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_m^M \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

□

Beispiel: $B = \{(x,y) \colon 1 \le x \le 4, \sqrt{x} \le y \le 2\}$



als Normalbereich bzgl. der x-Achse mit $g_1(x) = \sqrt{x}$ und $g_2(x) = 2$
oder bzgl. der y-Achse mit $h_1(y) = 1$ und $h_2(y) = y^2$;
Hier sind also beide Formeln (27.1–2) anwendbar.

Entsprechend  ergibt sich

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \underbrace{\int_1^4 \int_{\sqrt{x}}^4 f(x,y)\,dy\,dx}_{①} = \underbrace{\int_1^2 \int_1^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy}_{②}.$$

Ähnlich im $\mathbb{R}^{n+1}$ ($n \geq 1$):

z. B. ist ein Normalbereich B bzgl. $(x_1, \ldots, x_n)$-Raum definiert durch $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und stetige Funktionen $g_1, g_2 \colon K \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x) \leq g_2(x)$ für alle $x \in K$, wie folgt:
$B := \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \colon x \in K, g_1(x) \leq z \leq g_2(x)\}$.
Dann gilt für $f \in \mathcal{C}(B)$

$$\int_B f(x,z)\,d(x,z) = \int_K \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,z)\,dz \right) dx$$

Zum Beispiel ist der Zylinder mit Höhe $h \geq 0$

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in \overline{B_1(0)}, 0 \leq z \leq h\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ein Normalbereich bzgl. der xy-Ebene.

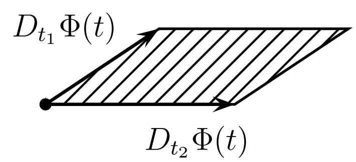
28. Oberflächenintegrale

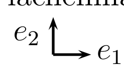
28.1. Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$

Es sei $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \underset{\text{offen}}{\supseteq} T \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, d. h. Φ ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung und $\{D_{t_1}\Phi(t), D_{t_2}\Phi(t)\}$ ist linear unabhängig $\forall t \in T$. Somit ist $\tilde{F} := \Phi(T)$ eine 2-Fläche im $\mathbb{R}^3$. Insbesondere liefert Φ bei Einschränkung auf genügend kleine offene Umgebungen jedes Punktes $t \in T$ eine Parametrisierung einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ [vgl. VO Analysis 2, 23.1 und 23.2] und $\{D_{t_1}\Phi(t), D_{t_2}\Phi(t)\}$ ist eine Basis der Tangentialebene im Punkt $a := \Phi(t)$.
Beobachtung:

- $N_\Phi(t) := D_{t_1}\Phi(t) \times D_{t_2}\Phi(t)$ (Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$) steht senkrecht auf diese Tangentialebene in $a = \Phi(t)$

- $\|N_\Phi(t)\|$ ist die Fläche des Parallelogramms



Wir erhalten solcherart ein infinitesimales Flächenmaß auf $\tilde{F} = \Phi(T)$, bezogen jeweils auf die Verzerrung des Einheitsquadrates  in T.

Sei $K \subseteq T$ kompakt, dann ist auch $F := \Phi(K) \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt. Für $f\colon \Phi(K) \to \mathbb{R}$ stetig heißt

$$\int\limits_{\Phi(K)} f\,dS := \int\limits_K f(\Phi(t))\,\|N_\Phi(t)\|\,dt \tag{28.1}$$

das *Oberflächenintegral* von f über $F = \Phi(K)$.

Lemma

Seien $\Phi\colon T \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi\colon R \to \mathbb{R}^3$ jeweils 2-Flächen und $\Gamma\colon R \to T$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus mit $\Psi = \Phi \circ \Gamma$. Sei $L \subseteq R$ kompakt, dann gilt für jedes $f \in \mathcal{C}(\Psi(L))$

$$\int\limits_{\Psi(L)} f\,dS = \int\limits_{(\Phi\circ\Gamma)(L)} f\,dS.$$

Daher ist $\int\limits_F f\,dS$ mit $F = (\Phi \circ \Gamma)(L) = \Psi(L)$ wohldefiniert.

Beweis

$$\int\limits_{\Psi(L)} f\,dS = \int\limits_{\Gamma(L)} f(\Phi(t))\,\|\underbrace{D_{t_1}\Phi(t)\times D_{t_2}\Phi(t)}_{N_\Phi(t)}\|\,dt = [26.19, \text{Transformationsformel für }\Gamma]$$

$$= \int\limits_{L} f(\Psi(r))\cdot\|D_{t_1}\Phi(\Gamma(r))\times D_{t_2}\Phi(\Gamma(r))\|\,|\det D\Gamma(r)|\,dr.$$

Nach der Kettenregel ist $D\Phi(\Gamma(r)) = D\Psi(r)\cdot D\Gamma(r)^{-1}$, daher $D_{t_1}\Phi(\Gamma(r)) = \big(D\Psi_{(r)}\cdot D\Gamma(r)^{-1}\big)_1$ und $D_{t_2}\Phi(\Gamma(r)) = \big(D\Psi_{(r)}\cdot D\Gamma(r)^{-1}\big)_2$ (wobei $\big(\dots\big)_j$ die j-te Spalte bezeichne).
Wir verwenden nun folgende Eigenschaft des Kreuzproduktes von Vektoren: seien $a, b\in\mathbb{R}^3$ und $A := (a\ b)$ (als 3×2-Matrix) sowie C eine beliebige 2×2-Matrix; weiters seien c und d die Spaltenvektoren in $A\cdot C = (c\ d)$; dann gilt

$$c\times d = (a\times b)\cdot\det C$$

(Beweis z.B. durch direktes Nachrechnen). Wenden wir dies auf $a = D_{r_1}\Psi(r)$, $b = D_{r_2}\Psi(r)$ und $C = D\Gamma(r)^{-1}$ an, so erhalten wir

$$D_{t_1}\Phi(\Gamma(r))\times D_{t_2}\Phi(\Gamma(r)) = D_{r_1}\Psi(r)\times D_{r_2}\Psi(r)\cdot\frac{1}{\det D\Gamma(r)}$$

und somit insgesamt wegen $\Psi = \Phi\circ\Gamma$

$$\int\limits_{\Psi(L)} f\,dS = \int\limits_{L} f(\Psi(r))\,\|\underbrace{D_{r_1}\Psi(r)\times D_{r_2}\Psi(r)}_{N_\Psi(r)}\|\,dr = \int\limits_{(\Phi\circ\Gamma)(L)} f\,dS.$$

$\square$

Speziell ergibt sich somit für $f = 1$ folgende **Definition**: Sei $\Phi\colon T\to\mathbb{R}^3$ eine 2-Fläche und $K\subseteq T$ kompakt, dann heißt

$$\text{(28.2)}\qquad \mathrm{Fl}(\Phi(K)) := \int\limits_{\Phi(K)} d\,S = \int\limits_{K}\|N_\Phi(t)\|\,dt$$

der *Flächeninhalt* von $\Phi(K)$. (Bemerkung: z.B. bei periodischen Parametrisierungen wird in dieser Definition der Inhalt entsprechend mehrfach gezählt.)

Beispiele

1.) Sei $\Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ und $K = [0, 2\pi]\times[0,\pi]$. Wir erhalten $\Phi(K) = S^2 = \{x\in\mathbb{R}^3\colon \|x\| = 1\}$ und Tangentialvektoren

$$D_\varphi\Phi = \sin\theta\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}}_{=:v},\quad D_\theta\Phi = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix},$$

wobei die Vektoren v und $D_\theta\Phi$ senkrecht aufeinander und normiert sind. Daher ist

$$\|N_\Phi(\varphi,\theta)\| = \sin\theta \geq 0 \text{ für } 0 \leq \theta \leq \pi$$

und

$$\mathrm{Fl}(S^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta d\varphi = 2\pi \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^\pi = 4\pi.$$

2.) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion und $K \subseteq U$ kompakt. Wir erhalten eine Parametrisierung des Graphen F von g über K durch $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(x,y) := (x,y,g(x,y))$. Wegen

$$D_x\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D_1 g \end{pmatrix}, D_y\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D_2 g \end{pmatrix} \text{ ist } N_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} g(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\mathrm{Fl}(F) = \int_K \|N_\Phi(x,y)\| \, d(x,y) = \int_K \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(x,y)\|^2} \, d(x,y).$$

Bemerkung

Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt (bekanntlich oder durch Nachrechnen)

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v \mid w\rangle^2 = \det\begin{pmatrix} \|v\|^2 & \langle v \mid w\rangle \\ \langle v \mid w\rangle & \|w\|^2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \langle v \mid v\rangle & \langle v \mid w\rangle \\ \langle w \mid v\rangle & \langle w \mid w\rangle \end{pmatrix},$$

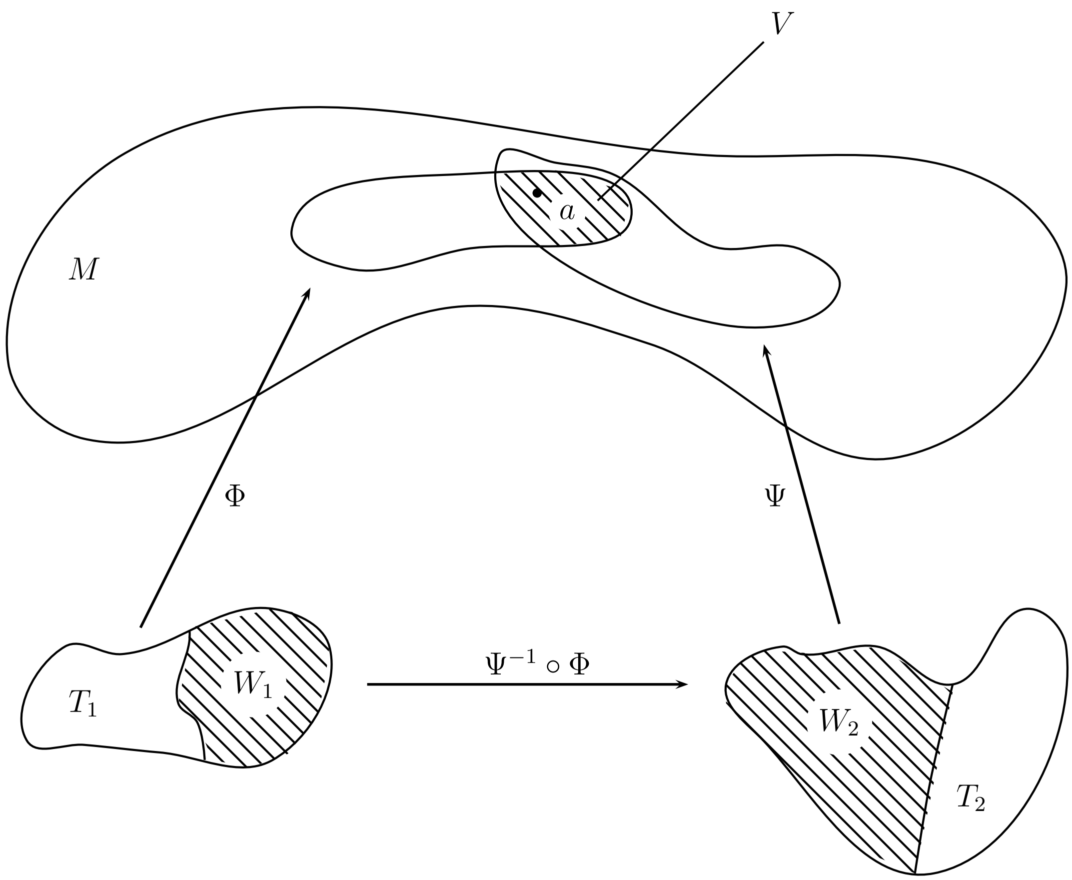
woraus sich für $v = D_{t_1}\Phi, w = D_{t_2}\Phi$ folgendes ergibt:

$$\|N_\Phi(t)\|^2 = \det\begin{pmatrix} \langle D_{t_1}\Phi \mid D_{t_1}\Phi\rangle & \langle D_{t_1}\Phi \mid D_{t_2}\Phi\rangle \\ \langle D_{t_2}\Phi \mid D_{t_1}\Phi\rangle & \langle D_{t_2}\Phi \mid D_{t_2}\Phi\rangle \end{pmatrix}. \tag{28.3}$$

Diese Formel (bzw. deren rechte Seite) kann auf k-Flächen verallgemeinert werden und so als Definition für das Flächenmaß dienen (siehe Definition 28.3 und nachfolgende Konstruktionen).

28.2. Proposition

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $a \in M$ und $\Phi\colon T_1 \to M$, $\Psi\colon T_2 \to M$ zwei lokale Parametrisierungen von M nahe a.
Wir setzen $V := \Phi(T_1) \cap \Psi(T_2)$ (dies ist nicht leer, weil z.B. $a \in V$) und $W_1 := \Phi^{-1}(V)$, $W_2 := \Psi^{-1}(V)$, dann gilt: W_1, W_2 sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$ und $\Psi^{-1} \circ \Phi\colon W_1 \to W_2$ ist ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.



Topologische Vorbemerkung und Wiederholung:

Es bezeichne d die euklidische Metrik in $\mathbb{R}^n$. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird durch $(M, d\big|_{M\times M})$ zum metrischen Raum; daher gibt es für Teilmengen, Punkte und Folgen in M jeweils Begriffe wie „offen", „Rand" oder „Konvergenz" in zwei Bedeutungen, nämlich bzgl. d und $d' := d\big|_{M\times M}$.

Zum Beispiel gilt: $V \subseteq M$ ist offen bzgl. d' (d.h. offen relativ M) genau dann, wenn es eine (bzgl. d) offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $V = M \cap U$ ist.
(Zum Beweis beachte, dass die Mengen $B_\varepsilon(x) \cap M$ (für $x \in M$, $\varepsilon > 0$) genau die ε-Kugeln $B'_\varepsilon(x)$ bzgl. d' in M ergeben.)

Beweis. Aus der Definition des Begriffes Untermannigfaltigkeit erhalten wir: Es gibt offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $a \in U_1 \cap U_2$ und so, dass $\Phi(T_1) = M \cap U_1$, $\Psi(T_2) = M \cap U_2$ gilt und $\Phi\colon T_1 \to M \cap U_1$, $\Psi\colon T_2 \to M \cap U_2$ jeweils Homöomorphismen sind (bzgl. $d' = d_{\mathbb{R}^n}\big|_{M\times M}$ im Zielbereich).
Daher ist $V = \underbrace{(M \cap U_1)}_{\text{offen in } M} \cap \underbrace{(M \cap U_2)}_{\text{offen in } M}$ offen in (M, d') und wegen der Stetigkeit von Φ^{-1} und Ψ^{-1} ist $W_1 = \Phi^{-1}(V)$ bzw. $W_2 = \Psi^{-1}(V)$ offen in T_1 bzw. T_2.
Die Abbildung $\tau := (\Psi^{-1} \circ \Phi)\,|_{W_1}\colon W_1 \to W_2$ ist bijektiv. Es bleibt noch zu zeigen, dass τ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist.

Sei $y_1 \in W_1$ beliebig und setze $b := \Phi(y_1) \in M$ sowie $y_2 := \tau(y_1) \in W_2$. Gemäß Theorem 23.4.4.) aus Analysis 2 ist M lokal diffeomorph zu einem k-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, d.h.: es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von b, eine offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus

$$F\colon U \to U' \quad \text{mit} \quad F(M \cap U) = E_k \cap U',$$

wobei $E_k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. OBdA ist $M \cap U \subseteq V$ (nötigenfalls verkleinern wir U und U').
Sei $W_1' := \Phi^{-1}(M \cap U)$ und $W_2' := \Psi^{-1}(M \cap U)$. Für alle $t \in W_1'$ und $s \in W_2'$ gilt wegen $F(M \cap U) = E_k \cap U'$ nun

$$F \circ \Phi(t) = (g_1(t), \ldots, g_k(t), 0, \ldots, 0), \quad F \circ \Psi(s) = (h_1(s), \ldots, h_k(s), 0, \ldots, 0)$$

mit geeigneten $\mathcal{C}^1$-Funktionen g_j und h_j $(j = 1 \ldots, k)$. Die Matrix $DF(x)$ ist invertierbar für jedes $x \in U$ und $D\Phi(t)$ (für $t \in T_1$) und $D\Psi(s)$ (für $s \in T_2$) haben jeweils Rang k, daher haben $D(g_1, \ldots, g_k)(t)$ (für $t \in W_1'$) und $D(h_1, \ldots, h_k)$ (für $s \in W_2'$) ebenfalls den Rang k. Es bezeichne p die Projektion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, dann sind die Abbildungen

$$g := (g_1, \ldots, g_k)\colon W_1' \to p(E_k \cap U') \text{ und } h := (h_1, \ldots, h_k)\colon W_2' \to p(E_k \cap U'),$$

sowohl lokale $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen als auch nach Konstruktion bijektiv, somit also $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen. Nun gilt für alle $t \in W_1'$

$$\tau(t) = \Psi^{-1} \circ \Phi(t) = \Psi^{-1} \circ F^{-1} \circ F \circ \Phi(t) = (F \circ \Psi)^{-1} \circ (F \circ \Phi)(t) = h^{-1} \circ g(t),$$

daher also auch τ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $W_1' \to W_2'$. Da $y_1 \in W_1$ beliebig war, folgt weiter, dass τ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $W_1 \to W_2$ ist. □

28.3. Definition

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\Phi\colon T \to M$ eine lokale Parametrisierung, dann heißt $G\colon T \to M(k, \mathbb{R})$, wobei $G = (g_{ij})_{1 \le i,j \le k}$ und $g_{ij}\colon T \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$g_{ij}(t) := \left\langle D_{t_i}\Phi(t) \mid D_{t_j}\Phi(t) \right\rangle \qquad \text{(symmetrisch!)}, \tag{28.4}$$

die *Gramsche Matrix* (oder *Metrik-Tensor*) von M bzgl. der Koordinaten $t = (t_1, \ldots, t_k)$ und

$$g(t) := \det G(t), \quad g\colon T \to \mathbb{R} \tag{28.5}$$

heißt *Gramsche Determinante.*
Der Spezialfall $k = 2$ und $n = 3$ weiter oben lautet ja gerade $g(t) = \|N_\Phi(t)\|^2$, d. h. $\sqrt{g(t)}$ entspricht dem infinitesimalen Flächenelement für das oben definierte Flächenintegral.

28.4. Lemma

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\Phi\colon T \to V \subseteq M$ bzw. $\Psi\colon R \to V' \subseteq M$ lokale Parametrisierungen mit $V \cap V' \neq \emptyset$. Bezeichne G bzw. $\tilde{G}$ die Gramsche Matrix zu Φ bzw. Ψ. Dann gilt:

1.) $\tilde{g}(\xi) = \left(\det D\left(\Phi^{-1} \circ \Psi\right)(\xi)\right)^2 \cdot g\left((\Phi^{-1} \circ \Psi)(\xi)\right)$ (für alle $\xi \in \Psi(V \cap V')$).

2.) $G(t)$ ist für alle $t \in T$ positiv definit.

3.) $g(t) > 0 \quad \forall t \in T$.

Beweis

1.) Es ist $\Psi = \Phi \circ (\Phi^{-1} \circ \Psi)$; gemäß Proposition 28.2 ist $\Gamma := \Phi^{-1} \circ \Psi$ ein Diffeomorphismus.

Nach der Kettenregel gilt $D\Psi(r) = D(\Phi \circ \Gamma)(r) = D\Phi(\Gamma(r)) \cdot D\Gamma(r)$, was sich in Spaltenvektoren so ausdrückt:

$$D_l\Psi(r) = D\Phi(\Gamma(r)) \cdot D_l\Gamma(r) \quad (l = 1, \dots, k).$$

Somit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{lm}(r) &= \langle D_l\Psi(r) \mid D_m\Psi(r)\rangle = \langle D\Phi(\Gamma(x)) \cdot D_l\Gamma(r) \mid D\Phi(\Gamma(r)) \cdot D_m\Gamma(r)\rangle \\
&= \langle \sum_i (D\Phi_i \cdot D_l\Gamma)\, e_i \mid \sum_j (D\Phi_j \cdot D_m\Gamma)\, e_j\rangle = \sum_i (D\Phi_i \cdot D_l\Gamma) \cdot (D\Phi_i \cdot D_m\Gamma) \\
&= \sum_i \sum_{\alpha,\beta} D_{t_\alpha}\Phi_i \cdot D_{r_l}\Gamma_\alpha \cdot D_{t_\beta}\Phi_i \cdot D_{r_m}\Gamma_\beta \\
&= \sum_{\alpha,\beta} D_{r_l}\Gamma_\alpha \cdot D_{r_m}\Gamma_\beta \cdot \underbrace{\sum_i D_{t_\alpha}\Phi_i \cdot D_{t_\beta}\Phi_i}_{=\left\langle D_{t_\alpha}\Phi \mid D_{t_\beta}\Phi\right\rangle = g_{\alpha\beta}} = \left(D\Gamma(r)^t \cdot G(\Gamma(r)) \cdot D\Gamma(r)\right)_{lm}
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\det \tilde{G} = \det(D\Gamma^t) \cdot \det(G \circ \Gamma) \cdot \det(D\Gamma) = (\det(D\Gamma))^2 \cdot \det(G \circ \Gamma).$$

2.) Sei $z \in \mathbb{R}^k$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle G(t)z \mid z\rangle &= \left\langle \sum_l \big(\sum_j g_{lj}(t) z_j\big) e_l \mid \sum_m z_m e_m \right\rangle \\
&= \sum_l \big(\sum_j \left\langle D_{t_l}\Phi \mid D_{t_j}\Phi\right\rangle z_j\big) \cdot z_l = \sum_l \left\langle D_{t_l}\Phi \mid \sum_j D_{t_j}\Phi \cdot z_j \right\rangle z_l \\
&= \left\langle \sum_l D_{t_l}\Phi \cdot z_l \mid \sum_j D_{t_j\Phi} \cdot z_j \right\rangle = \Big\| \sum_j z_j \cdot D_{t_j}\Phi \Big\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

und $\langle G(t)z \mid z\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \sum_j z_j D_{t_j}\Phi = 0 \overset{D_{t_j}\Phi \text{ lin. u.}}{\Longrightarrow} z_j = 0 \; (j = 1, \dots, k) \;\Rightarrow\; z = 0.$

3.) Ist $G(t)$ positiv definit, so sind alle Eigenwerte positiv und daher auch das Produkt der Eigenwerte $= \det G(t) > 0$.

□

28.5. Integral über Untermannigfaltigkeiten

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f \in \mathcal{C}_c(M)$. (D.h. $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist stetig bzgl. der Einschränkung der euklidischen Metrik auf M und verschwindet außerhalb einer kompakten Menge $K \subseteq M$.)

Schritt 1: Angenommen $\operatorname{supp}(f) \subseteq \Phi(T)$, wobei $\Phi\colon T \to M$ eine lokale Parametrisierung ist.
Sei $g\colon T \to \mathbb{R}$ die Gramsche Determinante; wegen 28.4, 3.) ist $\sqrt{g}$ definiert und stetig und weiters $(f \circ \Phi)\sqrt{g} \in \mathcal{C}_c(T)$; wir definieren

$$\int_M f(x)\,dS(x) := \int_T f(\Phi(t))\sqrt{g(t)}\,dt.$$

Gemäß 28.4, 1.) hängt diese Definition nicht von der gewählten Parametrisierung ab, denn mit $\Gamma = \Phi^{-1} \circ \Psi$ (Notation aus 28.4) gilt

$$\int_T f(\Phi(t))\,\sqrt{g(t)}\,dt = \int_R f(\Phi(\Gamma(r))) \cdot \underbrace{|\det D\Gamma(r)|\sqrt{g(\Gamma(r))}}_{\sqrt{\tilde{g}(r)}}\,dr = \int_R f(\Psi(r))\,\sqrt{\tilde{g}(r)}\,dr.$$

Schritt 2: Der allgemeine Fall $\operatorname{supp}(f) \subseteq M$ kompakt.
$\operatorname{supp}(f)$ wird von endlich vielen Mengen der Form $V_j := \Phi_j(T_j)$ $(j = 1, \dots, N)$ überdeckt, wobei $\Phi_j\colon T_j \to M$ lokale Parametrisierungen sind. Es ist $V_j = M \cap U_j$ mit passenden offenen Mengen $U_j \subseteq \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \dots, N)$. Sei $(\tilde{\chi}_j)_{j=1,\dots,N}$ eine der Überdeckung (U_j) untergeordnete glatte Partition der Eins [entsprechend Proposition 25.5].
Wir setzen $\chi_j = \tilde{\chi}_j\big|_M$ $(j = 1, \dots, N)$ und definieren

$$\int_M f(x)\,dS(x) := \sum_{j=1}^N \int_M \chi_j(x) f(x)\,dS(x)$$

(es ist $\operatorname{supp}(\chi_j f) \subseteq V_j$).

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Partition der Eins und den lokalen Parametrisierungen ist.
Seien $\Psi_l\colon T_l' \to V_l' \subseteq M$ weitere lokale Parametrisierungen $(l = 1, \dots, m)$ und $(\lambda_l)_{l=1,\dots,m}$ wie oben (durch Einschränkung) aus einer entsprechenden Partition der Eins gewonnen.

Es gilt $\sum\limits_{l=1}^{m} \chi_j \lambda_l = \chi_j$ und $\sum\limits_{j=1}^{N} \chi_j \lambda_l = \lambda_l$, daher auch

$$\sum_{j=1}^{N} \int_M \chi_j(x) f(x)\, dS(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{m} \int_M \chi_j(x)\lambda_l(x) f(x)\, dS(x)$$
$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} \int_M \chi_j(x)\lambda_l(x) f(x)\, dS(x) = \sum_{l=1}^{m} \int_M \lambda_l(x) f(x)\, dS(x),$$

wobei verwendet wurde, dass $\operatorname{supp}(\chi_j\lambda_l) \subseteq \operatorname{supp}(\chi_j) \cap \operatorname{supp}(\lambda_l)$ gilt.

Der k-dimensionale Flächeninhalt: Ist beispielsweise $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, dann heißt

$$\mathrm{Fl}_k(M) := \int_M 1\, dS(x)$$

der *k-dimensionalen Flächeninhalt* von M.

Das Integral über M kann mühelos auch auf halbstetige Funktionen ausgedehnt werden, was dann auch

$$\mathrm{Fl}_k(K) := \int_M \mathbb{1}_K(x)\, dS(x)$$

für beliebiege kompakte Teilmengen $K \subseteq M$ definiert, ohne dass M selbst kompakt sein muss.

X DIFFERENTIALFORMEN UND INTEGRALSÄTZE

29. Multilinearformen

29.0. Ein bisschen Hintergrund zu Tensorprodukten

[Anmerkung: dieser Unterabschnitt läuft „außer Konkurrenz“ und ist logisch-begrifflich gesehen nicht Bestandteil der VO; es kann auch sofort zu Punkt 29.1 gesprungen werden.]

1) Tensorprodukt von Vektorräumen

- Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$.

  Wir setzen $\mathcal{J} := \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ und

  $$E := \mathbb{R}^{\mathcal{J}} = \{f \colon \mathcal{J} \to \mathbb{R}\}.$$

  Dann ist E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (mit den üblichen punktweisen Operationen für Funktionen).

  Eine Basis von E ist gegeben durch $\{e_{ij} \colon 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$, wobei

  $$e_{ij}(r,s) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & i = r \wedge j = s \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} = \delta_{ir} \cdot \delta_{js}.$$

  Daher ist $\dim E = n \cdot m$.

- Seien nun $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \ldots, w_m\}$ Basen von V bzw. W.
  Wir definieren $\iota \colon V \times W \to E$ zunächst auf den Paaren von Basiselementen von V und W durch $\iota(v_i, w_j) := e_{ij}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ und setzen bilinearer fort, d. h. für Vektoren $v = \sum \lambda_i v_i \in V$ und $w = \sum \mu_j w_j \in W$ ist

  $$\iota(v,w) = \iota\big(\sum_i \lambda_i v_i,\ \sum_j \mu_j w_j\big) := \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \cdot \iota(v_i, w_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \cdot e_{ij}.$$

Mit der neuen Notation

$$v_i \otimes w_j := e_{ij} \quad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$$

können wir also schreiben

$$V \otimes W := E = \operatorname{span}\{v_i \otimes w_j \colon 1 \leq i \leq n, \leq j \leq m\} = \Big\{ \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} a_{ij}\, v_i \otimes w_j \colon a_{ij} \in \mathbb{R} \Big\}$$

und

$$\iota(v,w) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \cdot v_i \otimes w_j.$$

Lemma 1

Sei U ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\beta\colon V \times W \to U$ bilinear, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\tilde{\beta}\colon V \otimes W \to U$ mit $\beta = \tilde{\beta} \circ \iota$, d. h.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ V \otimes W \arrow[r, "\tilde{\beta}"'] & U \end{tikzcd}$$

ist ein kommutatives Diagramm.

Diese Eigenschaft der Faktorisierung beliebiger bilinearer Abbildungen auf $V \times W$ in lineare Abbildungen auf $V \otimes W$ heißt *universelle Eigenschaft des Tensorprodukts*.

Beweis

<u>Eindeutigkeit</u>: Falls $\tilde{\beta}$ existiert, muss gelten

$$\beta(v_i, w_j) = \tilde{\beta}\left(\iota(v_i, w_j)\right) = \tilde{\beta}(v_i \otimes w_j).$$

Somit ist $\tilde{\beta}$ auf der Basis $\{v_i \otimes w_j\}$ festgelegt, also auf $V \otimes W$ eindeutig linear fortsetzbar.

<u>Existenz</u>: Wird $\tilde{\beta}(v_i \otimes w_j) := \beta(v_i, w_j)$ gesetzt und linear fortgesetzt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta\Big(\sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \mu_j w_j\Big) &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \, \beta(v_i, w_j) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \, \tilde{\beta}(v_i \otimes w_j) = \tilde{\beta}\Big(\sum_{ij} \lambda_i \mu_j \, v_i \otimes w_j\Big) = \tilde{\beta}(\iota(v, w)). \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2

Ist E' ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\iota'\colon V \times W \to E'$ eine bilineare Abbildung, die ebenfalls die universelle Eigenschaft (wie in Lemma 1) erfüllen, dann ist E' isomorph zu $V \otimes W$.

Beweis

Die universelle Eigenschaft für $(V \otimes W, \iota)$ und (E', ι') wird wie folgt angewendet:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\iota'"] & \\ V \otimes W \arrow[r, "\tilde{\imath}"'] & E' \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[d, "\iota'"'] \arrow[dr, "\iota"] & \\ E' \arrow[r, "\tilde{\imath}'"'] & V \otimes W \end{tikzcd}$$

Dann ist

$$\tilde{\imath}' \circ \tilde{\imath}(v_i \otimes w_j) = \tilde{\imath}'\big(\underbrace{\tilde{\imath} \circ \iota}_{\iota'}(v_i, w_j)\big) = \underbrace{\tilde{\imath}' \circ \iota'}_{\iota}(v_i, w_j) = v_i \otimes w_j \quad \Rightarrow \quad \tilde{\imath}' \circ \tilde{\imath} = \mathrm{id}_{V \otimes W}\,.$$

Analog sieht man, dass $\tilde{\imath} \circ \tilde{\imath}' = \mathrm{id}_{E'}$ gilt.

$\square$

Definition

Der durch die universelle Eigenschaft aus Lemma 1 bis auf Isomophie eindeutige $\mathbb{R}$-Vektorraum heißt *Tensorprodukt von V und W* und wird mit $V \otimes W$ bezeichnet.

Unsere obige Konstruktion von $V \otimes W = E$ und $\iota\colon V \times W \to V \otimes W$ ergibt folgende Notationen und Rechenregeln:

- Ist $(v, w) \in V \times W$ mit Basisdarstellungen $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j$, dann schreiben wir
$$v \otimes w := \iota(v, w) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \, v_i \otimes w_j$$
- $(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w) = v \otimes (\lambda w) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
- $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w \quad (v' \in V)$
  $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w' \quad (w' \in W)$
- aus der obigen Konstruktion mittels Basen folgt direkt, dass
$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W.$$

Bemerkung: nicht alle Elemente aus $V \otimes W$ sind von der Form $v \otimes w$ mit $v \in V$, $w \in W$; betrachte z. B. $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 &\overset{!}{=} (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \otimes (\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) \\ &= \lambda_1\mu_1 \, e_1 \otimes e_1 + \lambda_1\mu_2 \, e_1 \otimes e_2 + \lambda_2\mu_1 \, e_2 \otimes e_1 + \lambda_2\mu_2 \, e_2 \otimes e_2 \end{aligned}$$

und Koeffizientenvergleich (es handelt sich ja um Basisdarstellungen!) ergibt $\lambda_1\mu_1 = 0 = \lambda_2\mu_2$ und $\lambda_1\mu_2 = 1 = \lambda_2\mu_1$ — ein Widerspruch $\lightning$.

Die Verallgemeinerung auf *k-fache Tensorprodukte* $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$ ist eher eine notationelle Übung und wir erhalten

$$\dim(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k) = \prod_{l=1}^{k} \dim V_l.$$

Bemerkung: In der **Physik** ist folgende Konstruktionen grundlegend, wobei $k = p + q$, $V_1 = \cdots = V_p = V^*$ (der Dualraum zu V) und $V_{p+1} = \cdots = V_k = V$; die Elemente aus

$$T_p^q(V) := \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p \text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ Faktoren}}$$

heißen *p-fach kovariante und q-fach kontravariante Tensoren.*

Eine gängige Schreibweise für Basisdarstellungen ist die folgende: sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ die dazu duale Basis in V^*; es ist $\dim(T_q^p(V)) = n^{p+q}$ und jedes $T \in T_p^q(V)$ hat eine eindeutige Darstellung

$$T = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \\ j_1,\cdots j_q}} a_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q} \cdot v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_p}^* \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q},$$

wobei die Koeffizienten auch aus $a_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_p} = T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}, v_{j_1}^*, \ldots, v_{j_q}^*)$ gewonnen werden können (o.B.), indem T als Multiniearform auf $V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ aufgefasst wird (nämlich mittels $v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_p}^* \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_q}(w_1, \ldots w_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_q) := v_{i_1}^*(w_1) \cdots \alpha_q(v_{j_q})$; vergleiche auch mit der Definition von k-Formen weiter unten).

2) Symmetrische und alternierende Tensoren

Sei W ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir betrachten die folgenden Teilräume von $W \otimes W$:

$$\begin{aligned} S(W) &:= \operatorname{span}\{v \otimes v' - v' \otimes v \colon\ v, v' \in W\}, \\ A(W) &:= \operatorname{span}\{v \otimes v \colon v \in W\}. \end{aligned}$$

Sei $\beta \colon W \times W \to U$ eine bilineare Abbildung und U ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Die Abbildung β heißt *symmetrisch*, falls für alle $v, v' \in W$ gilt

$$\beta(v, v') = \beta(v', v)$$

und *alternierend*, falls

$$\beta(v, v') = -\beta(v', v)$$

(oder äquivalent $\beta(v, v) = 0$).

Beobachtung:

es bezeichne $\tilde{\beta} \colon W \otimes W \to U$ die zu β gehörige eindeutige lineare Abbildung gemäß der universellen Eigenschaft, dann gilt

1.) β ist symmetrisch $\;\Leftrightarrow\;$ $S(W) \subseteq \ker \tilde{\beta}$

2.) β ist alternierend $\;\Leftrightarrow\;$ $A(W) \subseteq \ker \tilde{\beta}$.

Zum Beweis bemerken wir einfach, dass
1.) $\beta(v, v') - \beta(v', v) = \tilde{\beta}(v \otimes v') - \tilde{\beta}(v' \otimes v) = \tilde{\beta}(\underbrace{v \otimes v' - v' \otimes v}_{\in S(W)})$

und 2.) $\beta(v, v) = \tilde{\beta}(v \otimes v)$ gilt.

Definition

Wir bilden Quotientenräume und nennen

$$W \wedge W := W \otimes W \,/\, A(W)$$

das *äußere Produkt* und

$$W \circledS W := W \otimes W \,/\, S(W)$$

das *symmetrische Tensorprodukt* von W.

Bemerkung: Die Vektorräume $W \wedge W$ und $W \circledS W$ (zusammen mit $W \times W \xrightarrow{\iota} W \otimes W \to W \otimes W / \dots$) erfüllen ebenfalls eine universelle Eigenschaft bzgl. alternierender bzw. symmetrischer bilinearer Abbildungen $W \times W \to U$ und sind dadurch eindeutig bis auf die Isomorphie festgelegt (vgl. etwa [Fis03, Abschnitt 6.3]).

Notation und Rechenregeln: Seien $v, v' \in W$

- wir setzen $v \circledS v' := v \otimes v' + S(W)$, dann gilt

  $v \circledS v' = v' \circledS v$ (Symmetrie) und $\circledS$ ist bilinear;

  die Menge $\{v_i \circledS v_j \colon 1 \le i \le j \le n\}$ bildet eine Basis von $W \circledS W$, somit ist $\dim W \circledS W = \sum\limits_{j=1}^{n} j = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- wir setzen $v \wedge v' := v \otimes v' + A(W)$, dann gilt

  $v \wedge v' = -v' \wedge v$ (Antisymmetrie, auch $v \wedge v = 0$) und $\wedge$ ist bilinear; eine Basis von $W \wedge W$ ist gegeben durch $\{v_i \wedge v_j \colon 1 \le i < j \le n\}$, somit ist $\dim W \wedge W = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

  Analog wird das *k-fache äußere (bzw. symmetrische) Produkt* eingeführt

  $\bigwedge^k W := W \wedge W \wedge \cdots \wedge W$ (bzw. $\circledS^k W := W \circledS \cdots \circledS W$) [jeweils k Faktoren];

  Es gilt für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$ von $\{1, \dots, k\}$

  $$w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot w_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge w_{\sigma(k)},$$

  was 0 ergibt, falls $\exists i, j$ mit $w_i = w_j$.

  Weiters gilt k-Linearität, d. h.

  $$\lambda(w_1 \wedge \cdots \wedge w_k) = (\lambda w_1) \wedge \cdots \wedge w_k = w_1 \wedge (\lambda w_2) \wedge \cdots = \cdots = w_1 \wedge \cdots \wedge (\lambda w_k)$$

  und

  $$w_1 \wedge \cdots \wedge w_k \;+\; w_1' \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k = (w_1 + w_1') \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_k$$

  bzw. ebenso Additivität im zweiten bis zum k. Faktor separat.

  Eine Basis von $\bigwedge^k W$ ist gegeben durch

  $$\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} \colon 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}, \quad \text{somit } \dim \bigwedge^k W = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix};$$

insbesondere ist

$$\bigwedge^k W = \{0\}, \text{ falls } k > n; \quad \bigwedge^0 W := \mathbb{R}; \qquad \bigwedge^1 W := W; \; \bigwedge^n W \cong \mathbb{R}.$$

Wir geben nun für den Fall $W = V^*$, d.h. W ist der Dualraum eines n-dimensionalen Vektorraumes V über $\mathbb{R}$, eine konkrete Realisierung von $\bigwedge^k V^*$ als Raum von Multilinearformen an. Diese wird im offiziellen Teil dann zur Definition erhoben werden (vgl. 29.1).

Proposition: $\bigwedge^k V^*$ ist isomorph zum $\mathbb{R}$-Vektorraum der *alternierenden k-Formen* auf V, das sind Abbildungen $\omega\colon V^k \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

(a) $\omega(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda\, \omega(\dots, v', \dots) + \mu\, \omega(\dots, v'', \dots)$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R},\ v', v'' \in V$ (jeweils dieselbe Komponente)

(b) $$\omega(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Komp.}}}{v'}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Komp.}}}{v''}, \dots) = -\,\omega(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Komp.}}}{v''}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Komp.}}}{v'}, \dots) \qquad (i \neq j).$$

Beweis. Sei $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ eine Basis von V^*, dann ist

$$\{\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k} \colon 1 \le i_1 < 1_2 < \dots < i_k \le n\}$$

eine Basis von $\bigwedge^k V^*$.

Wir bezeichnen mit F den Raum der alternierenden k-Formen auf V und definieren $L\colon \bigwedge^k V^* \to F$ wie folgt: zunächst setzen wir

$$L(\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k})(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \langle \mu_{i_1}, v_1 \rangle & \cdots & \langle \mu_{i_1}, v_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mu_{i_k}, v_1 \rangle & \cdots & \langle \mu_{i_k}, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

für alle $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ und dehnen L dann linear auf $\bigwedge^k V^*$ aus.

- $L(\mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k})$ ist k-linear und alternierend, weil det es ist (ebenso Linearkombinationen davon) und das Skalarprodukt im zweiten Argument linear ist.

- L ist injektiv: sei $L\big(\overbrace{\sum_{i_1,\dots,i_k} \lambda_{i_1,\dots,i_k} \mu_{i_1 \wedge \dots \wedge \mu_{i_k}}}^{T}\big) = 0$ in F; wähle Vektoren

  $$v_1, \dots, v_n \in V \text{ mit } \langle \mu_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n).$$

  Für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ beliebig folgt dann

  $$0 = L(T)(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = \sum_{j_1 < \dots j_k} \lambda_{j_1,\dots,j_k} \underbrace{L(\mu_{j_1} \wedge \dots \wedge \mu_{j_k})(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})}_{=\det(\delta_{j_r, i_l})_{1 \le r,l \le k} = \delta_{j_1,i_1} \cdots \delta_{j_k,i_k}} = \lambda_{i_1,\dots,i_k},$$

  also ist $T = 0$ in $\bigwedge^k V^*$.

- L ist surjektiv: sei $\omega \in F$; wir setzen
$$T := \sum_{i_1,\dots,i_k} \omega(v_{i_1},\dots,v_{i_k})\, \mu_{i_1} \wedge \dots \wedge \mu_{i_k};$$
eine einfache direkte Rechnung zeigt dann, dass tatsächlich gilt
$$L(T)(z_1,\dots,z_k) = \omega(z_1,\dots,z_k) \qquad \forall z_1,\dots,z_k \in V.$$

$\square$

29.1. Definition

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit dem Dualraum V^*.
1.) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\bigwedge^k V^*$ definiert als Raum der *alternierenden k-Formen* auf V, das sind Abbildungen $\omega\colon V^k \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(a) $\omega(\dots,\lambda v' + \mu v'',\dots) = \lambda\,\omega(\dots,v',\dots) + \mu \cdot \omega(\dots,v'',\dots)$ für $\lambda,\mu \in \mathbb{R},\ v',v'' \in V$
(jeweils dieselbe Komponente)

(b) $\omega(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Komp.}}}{v'}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Komp.}}}{v''}, \dots) = -\,\omega(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Komp.}}}{v''}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Komp.}}}{v'}, \dots)$ $\quad (i \neq j)$.

2.) Für $\nu_1,\dots,\nu_k \in V^*$ definieren wir die alternierende k-Form $\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_k \in \bigwedge^k V^*$ wie folgt:

(29.1)
$$(\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_k)(w_1,\dots,w_k) = \det \begin{pmatrix} \langle \nu_1, w_1\rangle & \cdots & \langle \nu_1, w_k\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \nu_k, w_1\rangle & \cdots & \langle \nu_k, w_k\rangle \end{pmatrix} \qquad \forall (w_1,\dots,w_k) \in V^k.$$

Bemerkungen: Eigenschaft (b) ist äquivalent zu
$$\omega(v_1,\dots,v_k) = 0,\ \text{falls } \exists i \neq j\colon v_i = v_j$$
(Beweis als Übungsaufgabe). Aus (b) folgt weiter, dass für jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$ von $\{1,\dots,k\}$ gilt
$$\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_1,\dots,v_k).$$

29.2. Proposition

Es sei $A = (a_{ij})$ eine $(k \times k)$-Matrix und $\varphi_1,\dots,\varphi_k \in V^*$. Wir setzen für $i = 1,\dots,k$
$$\psi_i := \sum_{j=1}^k a_{ij}\varphi_j.$$

Dann gilt
$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k = \det A \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k.$$

Beweis

Für beliebige $v_1, \dots, v_k \in V$ ist

$$\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k(v_1, \dots, v_k) = \det\left(\langle \psi_i, v_l \rangle\right) = \det\Big(\sum_j a_{ij}\,\langle \varphi_j, v_l \rangle\Big)$$
$$= \det\left[A \cdot (\langle \varphi_j, v_l \rangle)\right] = \det A \cdot \det\left(\langle \varphi_j, v_l \rangle\right) = \det A \cdot \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k(v_1, \dots, v_k).$$

□

29.3. Proposition

Es seien $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \geq 1$. Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$H\colon \Big(\bigwedge^k V^*\Big) \times \Big(\bigwedge^l V^*\Big) \to \bigwedge^{k+l} V^*$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $\psi_1, \dots, \psi_k,\ \eta_1, \dots, \eta_l \in V^*$ gilt:

(1.) $$H(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k,\, \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l) = \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_l.$$

Wir schreiben vereinfacht $\omega \wedge \sigma$ statt $H(\omega, \sigma)$ für $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\sigma \in \bigwedge^l V^*$ und nennen H das *äußere Produkt* oder *Keilprodukt* (oder etwas gröber das Hackprodukt) von k- und l-Formen.
Weiters gilt
(2.) für $\omega_j \in \bigwedge^{k_j} V^*$ $(j = 1, 2, 3)$: $\quad (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$
(3.) für $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\sigma \in \bigwedge^l V^*$: $\quad \omega \wedge \sigma = (-1)^{k \cdot l}\, \sigma \wedge \omega$.

Beweis

Sei $\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$ eine Basis von V^*. Dann erzwingt Eigenschaft (1.) zunächst, dass für $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ und $j_1 < j_2 < \dots < j_l$ stets

$$H(\nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_k}, \nu_{j_1} \wedge \dots \wedge \nu_{j_l}) = \nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_k} \wedge \nu_{j_1} \wedge \dots \wedge \nu_{j_l}$$

gilt. Die geforderte Bilinearität ergibt dann

$$H\Big(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1 \dots i_k} \nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_k},\ \sum_{j_1 < \dots < j_l} \alpha_{j_1 \dots j_l} \nu_{j_1} \wedge \dots \wedge \nu_{j_l}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} \lambda_{i_1 \dots i_k} \cdot \alpha_{j_1 \dots j_l}\, \nu_{i_1} \wedge \dots \wedge \nu_{i_k} \wedge \nu_{j_1} \wedge \dots \wedge \nu_{j_l}$$

Wird nun umgekehrt H so definiert, dann folgen die Eigenschaften (1-3.) durch direkte Rechnung.

□

29.4. Bemerkung

1.) Die Abbildung $H\colon \bigwedge^1 V^* \times \bigwedge^1 V^* = V^* \times V^* \to \bigwedge^2 V^*$ gemäß obiger Proposition ist konsistent mit der direkten Definition von $\nu_1 \wedge \nu_2$ für $\nu_1, \nu_2 \in V^*$ vermöge der Determinante; dies folgt aus Eigenschaft (1.). Ebenso gilt dies für Faktoren von höherem Grad.

2.) Für $k = 0$ oder $l = 0$ setzen wir (unter Beachtung von $\bigwedge^0 V^* := \mathbb{R}$):
$\lambda \wedge \omega := \lambda \cdot \omega \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ \omega \in \bigwedge^l V^*)$
$\nu \wedge \lambda := \lambda \cdot \nu \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ \nu \in \bigwedge^k V^*)$.

29.5. Vereinfachte Indexnotation

Im Weiteren schreiben wir auch oft $I = (i_1, \dots, i_k)$ und $|I| = k$, wobei stets die Bedingung $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ gelte; weiters verwenden wir vereinfachte Notationen wie

$$\lambda_I \ \text{ statt } \lambda_{i_1 \dots i_k}, \qquad \sum_{|I|=k} \ \text{statt} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n}, \qquad \varphi_I \ \text{ statt } \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}.$$

30. Differentialformen

30.1. Definition

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine *Differentialform der Ordnung* k (kurz k*-Form*) auf U ist eine Abbildung $\omega\colon U \to \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$.

Wir stellen uns ω als ein Tensorfeld (Multilinearformenfeld) vor, d. h. an jedem Punkt $p \in U$ denken wir uns die Multilinearform (genauer: k-Form auf $\mathbb{R}^n$) $\omega(p)$ angeheftet.[1]

Der Spezialfall $k = 1$ ist uns schon bekannt: Differentialformen der Ordnung 1 sind genau die 1-Formen aus Analysis 2; wir hatten dort die eindeutige Darstellung der 1-Form

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, dx_j$$

mit Komponentenfunktionen $f_j\colon U \to \mathbb{R}$, wobei $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$ die zur Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ duale Basis bezeichnete, d.h. $\langle dx_j(p), e_l\rangle = \delta_{jl}$.

Nun ist $\{dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p)\colon 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n\}$ eine Basis von $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*$ und wir erhalten entsprechend eine eindeutige Darstellung von k-Formen auf U durch

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} f_{i_1 \dots i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{|I|=k} f_I \cdot dx_I \tag{30.1}$$

mit Komponentenfunktionen $f_{i_1 \dots i_k}\colon U \to \mathbb{R}$.

Wegen $\bigwedge^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}$ sind 0-Formen gerade skalare Funktionen $U \to \mathbb{R}$.

Wir sagen, dass die k-Form ω *stetig* (bzw. *differenzierbar* oder *stetig differenzierbar* [$\mathcal{C}^1$] etc.) ist, falls alle Koeffizientenfunktionen diese Eigenschaft besitzen.

- Seien $\omega, \tilde{\omega}$ zwei k-Formen und $f\colon U \to \mathbb{R}$, dann sind $\omega + \tilde{\omega}$ und $f \cdot \omega$ punktweise definiert durch

  $(\omega + \tilde{\omega})(p) := \omega(p) + \tilde{\omega}(p), \qquad (f \cdot \omega)(p) := f(p) \cdot \omega(p).$

- Ist ω eine k-Form und σ eine l-Form auf U, so ist das äußere Produkt (oder Keilprodukt) $\omega \wedge \sigma$ eine Differentialform der Ordnung $(k + l)$, definiert durch

  $(\omega \wedge \sigma)(p) := \omega(p) \wedge \sigma(p).$

[1] Streng genommen müssten wir fordern, dass $\omega(p) \in \bigwedge^k T_p^*(U)$ für jedes $p \in U$ gilt, sodass $\omega(p)$ eine k-Form auf dem Tangentialraum $T_p(U)$ an (die n-dimensionale Untermannigfaltigkeit) U (von $\mathbb{R}^n$) im Punkt p ist. Dieser Aspekt ist vor allem in der Differentialgeomtrie wesentlich. Da $T_p(U)$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist und weil wir im Rahmen dieser VO nur Differentialformen auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ betrachten, erlauben wir uns die vereinfachte Notation.

30.2. Äußere Ableitung von k-Formen

Definition

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine stetig differenzierbare k-Form auf U.
Fall $k = 0$: ω ist eine 0-Form, d. h. gleich einer $\mathcal{C}^1$-Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$; dann ist die *äußere Ableitung* df definiert als die 1-Form mit Darstellung

$$df = \sum_{i=1}^{n} D_i f\, dx_i.$$

(Dies stimmt mit dem gleichlautenden Begriff aus Analysis 2 überein überein, der im Zusammenhang mit Stammfunktionen von 1-Formen eingeführt wurde.)
Fall $k \geq 1$: ω habe die Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

dann ist die *äußere Ableitung* $d\omega$ die $(k+1)$-Form

$$d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (df_{i_1 \ldots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

(Beachte, dass $df_{i_1 \ldots i_k}$ gemäß dem Fall $k = 0$ jeweils eine 1-Form ist.)

Beispiele

1.) $k = 1$, d.h. $\omega = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j\, dx_j$; es ist $df_j = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i f_j\, dx_i$, daher wegen $dx_i \wedge dx_i = 0$ und $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ also

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^{n} D_i f_j\, dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (D_i f_j - D_j f_i)\, dx_i \wedge dx_j.$$

Bemerkung: Im Spezialfall $n = 3$ entsprechen die Koeffizienten von $d\omega$ in der Entwicklung bzgl. $dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2$ (in dieser Reihenfolge gezählt) genau den Komponenten von $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ (vgl. die Übungsaufgaben zu diesem Abschnitt.)

2.) 2-Form im $\mathbb{R}^3$ ($k = 2$, $n = 3$):

Es sei $\omega = f_{12}\, dx \wedge dy + f_{13}\, dx \wedge dz + f_{23}\, dy \wedge dz$, dann beachten wir

$$d\omega = (D_1 f_{12} \underbrace{dx} + D_2 f_{12} \underbrace{dy} + D_3 f_{12}\, dz) \wedge dx \wedge dy + \cdots$$

geben $= 0$, wenn $\cdots \wedge dx \wedge dy$

somit erhalten wir

$$\begin{aligned} d\omega &= D_3 f_{12} \underbrace{dz \wedge dx \wedge dy}_{dx\wedge dy\wedge dz} + D_2 f_{13} \underbrace{dy \wedge dx \wedge dz}_{-dx\wedge dy\wedge dz} + D_1 f_{23}\, dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (D_1 f_{23} - D_2 f_{13} + D_3 f_{12})\, dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Bemerkung: Mit der Identifizierung $v = (f_{23}, -f_{13}, f_{12})$ lässt sich das Ergebnis auch in der Form $d\omega = \operatorname{div}(v) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$ schreiben.

Proposition

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

1.) Sind ω_1, ω_2 zwei $\mathcal{C}^1$ k-Formen auf U und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$d(\lambda\, \omega_1 + \mu\, \omega_2) = \lambda\, d\omega_1 + \mu\, d\omega_2.$$

2.) Ist ω eine $\mathcal{C}^1$ k-Form und σ eine $\mathcal{C}^1$ l-Form auf U, dann gilt

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^k\, \omega \wedge (d\sigma) \qquad \text{(graduierte Leibniz-Regel).}$$

3.) Ist ω eine $\mathcal{C}^2$ k-Form auf U, dann gilt

$$d(d\omega) = 0.$$

Beweis. 1.) Folgt direkt aus der Definition.

2.) Sei zunächst $k = l = 0$, d. h. wir betrachten $\mathcal{C}^1$-Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{R}$. Es ist $f \wedge g = fg$ sowie $df \wedge g = g \cdot df$, $f \wedge dg = f \cdot dg$ und daher

$$\begin{aligned} d(f \wedge g) = d(fg) &= \sum_{j=1}^{n} D_j(fg)\, dx_j \\ &= \sum_j g\, D_j f\, dx_j + \sum_j f\, D_j g\, dx_j = df \wedge g + f \wedge dg. \end{aligned}$$

Nun sei $\omega = \sum\limits_{|I|=k} f_I\, dx_I$ und $\sigma = \sum\limits_{|J|=l} g_J\, dx_J$. Dann ist $\omega \wedge \sigma = \sum\limits_{I,J} f_I g_J\, dx_I \wedge dx_J$ und nach dem obigen Spezialfall

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= \sum_{I,J} (g_J\, df_I + f_I\, dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} \big(g_J\, df_I \wedge dx_I \wedge dx_J + (-1)^{k\cdot 1} f_I\, dx_I \wedge dg_J \wedge dx_J\big) \\ &= \Big(\sum_I df_I \wedge dx_I\Big) \wedge \Big(\sum_J g_J\, dx_J\Big) + (-1)^k \cdot \Big(\sum_I f_I\, dx_I\Big) \wedge \Big(\sum_J dg_J \wedge dx_J\Big) \\ &= d\omega \wedge \sigma + (-1)^k\, \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

3.) Wir zeigen die Aussage zunächst für $k = 0$, d. h. es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion. Dann ist $df = \sum_{j=1}^{n} D_j f \, dx_i$ und mit $f_j := D_j f$ in Beispiel 1.) oben erhalten wir weiter mit dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

$$d(df) = \sum_{1 \le i < j \le n} (D_i D_j f - D_j D_i f) \, dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Nun sei $\omega = \sum_{|I|=k} f_I \, dx_I$ eine k-Form und $\mathcal{C}^2$, dann ist $d\omega = \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx_I$ und gemäß der schon bewiesenen Eigenschaft 2.)

$$d(d\omega) = \sum_{|I|=k} (\underbrace{d(df_I)}_{=0} \wedge dx_I + (-1)^1 \, df_I \wedge d(dx_I)) = -\sum_{|I|=k} df_I \wedge d(dx_I) = 0,$$

denn

$$d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = d(1) \wedge dx_I = 0 \cdot dx_I = 0.$$

□

Bemerkung

1.) Die Aussage $d(df) = 0$ bedeutet im $\mathbb{R}^3$ gerade (vgl. die Bemerkung in Bsp. 1.))

$$\boxed{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0}$$

2.) Ist ω eine 2-Form im $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = v_1 \, dy \wedge dz + v_2 \, dz \wedge dx + v_3 \, dx \wedge dy$, so besagt Beispiel 2.) oben, dass $d\omega = \operatorname{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz$ ist; somit ergibt Prop. 3.) zusammen mit Beispiel 2.) für $v = \operatorname{rot} b$ (d.h. $\omega = d\eta$ mit $\eta = b_1 \, dx + b_2 \, dy + b_3 \, dz$) die Formel

$$\boxed{\operatorname{div}(\operatorname{rot} b) = 0}$$

3.) Sei $\omega = \sum f_j \, dx_j$ eine 1-Form auf U. Dann ist die Bedingung

$$(*) \qquad 0 = d\omega = \sum_{i<j} (D_i f_j - D_j f_i) \, dx_i \wedge dx_j$$

äquivalent dazu, dass ω die Integrabilitätsbedingung (aus Analysis 2) erfüllt; in diesem Fall nannten wir ω geschlossen.

Wir wissen: Falls U sternförmig ist, so folgt aus $(*)$, dass eine 0-Form f existiert mit $\omega = df$ (wir nannten f eine Stammfunktion zu ω und ω in diesem Fall exakt).

30.3. Definition

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ω eine k-Form auf U.

1.) Sei ω stetig differenzierbar. Dann heißt ω *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ ist.

2.) Sei $k \geq 1$ und ω stetig. Dann heißt ω *exakt*, falls es auf U eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form η gibt mit $\omega = d\eta$. (η ist also eine Art „Stammform" für ω.)

30.4. Bemerkung

1.) Für $k = 1$ stimmen diese Begriffe mit jenen aus Analysis 2 überein.

2.) Ist η $\mathcal{C}^2$ und $\omega = d\eta$, so folgt $d\omega = d(d\eta) = 0$.
In diesem Sinne gilt: aus 'exakt' folgt 'geschlossen'.

$\boxed{?}$ Sei U sternförmig und ω eine geschlossene $\mathcal{C}^1$ k-Form auf U.
Muss ω dann auch exakt sein?

Die Antwort lautet: Ja.
Das ist der Inhalt des so genannten Lemmas von Poincaré (vgl. Punkt 30.6, Seite 71), auf dessen Beweis wir nun hinarbeiten.

30.5. Pullback von Differentialformen

Definition

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \colon V \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung.
Für jede k-Form ω auf U ist das *Pullback* $\Phi^*\omega$ als k-Form auf V wie folgt definiert:
für $\omega = \sum\limits_{|I|=k} f_I \, dx_I$ mit $f_I \colon U \to \mathbb{R}$ ist

$$\Phi^*\omega := \sum_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) \cdot d\varphi_I = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (f_{i_1,\ldots,i_k} \circ \Phi) \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}. \tag{30.2}$$

Spezialfälle:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Phi^* f"'] & U \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

1.) $k = 0$: sei f eine 0-Form, d. h. eine Funktion auf U;
dann ergibt sich die Verknüpfung $\Phi^* f = f \circ \Phi$.

2.) $k = 1$: sei $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \, dx_i$; es ist $\Phi^*\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i \circ \Phi) \, d\varphi_i$, wobei $d\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{m} D_j\varphi_i \, dt_j$; somit

$$\Phi^*\omega = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} (f_i \circ \Phi) \, D_j\varphi_i \, dt_j = \sum_{j=1}^{m} \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} D_j\varphi_i \, (f_i \circ \Phi)}_{=: g_j} \Bigg) \, dt_j,$$

d. h. mit $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$ und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ ist $g = (D\Phi)^t \cdot (f \circ \Phi)$.

3.) $m = k$: es ist $d\varphi_i = \sum_{j=1}^{k} (D\Phi)_{ij} \cdot dt_j$; sei für $I = (i_1, \ldots, i_k)$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$

$$(D\Phi)_I := (D_j \varphi_{i_l})_{\substack{l=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,k}},$$

dann gilt gemäß Proposition 29.2 $d\varphi_I = \det(D\Phi)_I \cdot dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$ und daher

$$\Phi^*\omega = \sum_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) \cdot d\varphi_I = \sum_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) \cdot \det(D\Phi)_I \cdot dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k.$$

Falls sogar $m = n = k$ ist (z. B. mit Φ als Diffeomorphismus), so ergibt sich

$$\Phi^*\omega = (f \circ \Phi) \cdot \det(D\Phi) \cdot dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$$

für $\omega = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$

Die für das Weitere wesentlichen Eigenschaften des Pullbacks von k-Formen sind in folgender Liste zusammengefasst:

Proposition

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\Phi\colon V \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung. Weiters seien ω, ν zwei k-Formen und σ eine l-Form auf U sowie $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1.) $\Phi^*(\lambda \cdot \omega + \alpha \cdot \nu) = \lambda \cdot \Phi^*\omega + \alpha \cdot \Phi^*\nu$.

2.) $\Phi^*(\omega \wedge \sigma) = (\Phi^*\omega) \wedge (\Phi^*\sigma)$.

3.) Falls ω $\mathcal{C}^1$ ist und Φ $\mathcal{C}^2$, dann gilt $d(\Phi^*\omega) = \Phi^*(d\omega)$.

4.) Sei $\Psi\colon \mathbb{R}^p \underset{\text{offen}}{\supseteq} W \to V$ ebenfalls $\mathcal{C}^1$, dann ist $\Psi^*(\Phi^*\omega) = (\Phi \circ \Psi)^*\omega$.

Beweis. 1.) ist klar.

2.)
- Für $k = 0$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ ist $\Phi^*(f \cdot \sigma) = (\Phi^* f) \cdot (\Phi^*\sigma) = (\Phi^* f) \wedge (\Phi^*\sigma)$
- Für $\omega = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $\sigma = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ ist die Behauptung unmittelbar klar aus der Definition von Φ^*.

Somit folgt für allgemeine $\omega = \sum f_I \, dx_I$ und $\sigma = \sum g_J \, dx_J$ die Behauptung aus 1.) und den gerade besprochenen Spezialfällen.

3.) Sei wieder zunächst $k = 0$, d. h. f ist eine 0-Form und $\Phi^* f = f \circ \Phi$. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(\Phi^* f) = d(f \circ \Phi) = \sum_{j=1}^{m} D_j(f \circ \Phi) \cdot dt_j &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} ((D_i f) \circ \Phi) \cdot D_j \varphi_i \cdot dt_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} (D_i f \circ \Phi) \cdot d\varphi_i = \Phi^*\Big(\sum_{i=1}^{n} D_i f \cdot dx_i\Big) = \Phi^*(df). \end{aligned}$$

Sei nun allgemein $\omega = \sum\limits_{|I|=k} f_I \cdot dx_I$. Dann ist $\Phi^*\omega = \sum\limits_{|I|=k} (f_I \circ \Phi) \cdot d\varphi_I$ stetig differenzierbar und

$$\begin{aligned} d(\Phi^*\omega) &= \sum_I \big(d(\Phi^* f_I) \wedge d\varphi_I + (-1)^0\, \Phi^* f_I \cdot \underbrace{d(d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k})}_{0}\big) \\ &= \sum_I \Phi^*(df_I) \wedge \Phi^*(dx_I) \underset{[2.),1.)]}{=} \Phi^*\Big(\sum_I df_I \wedge dx_I\Big) = \Phi^*(d\omega). \end{aligned}$$

4.) Wir setzen $\Gamma := \Phi \circ \Psi$ und $\gamma_i = \varphi_i \circ \Psi$ (somit $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$), dann ist nach der Kettenregel $d\gamma_i = d(\varphi_i \circ \Psi) = \Psi^*(d\varphi_i)$ und weiter

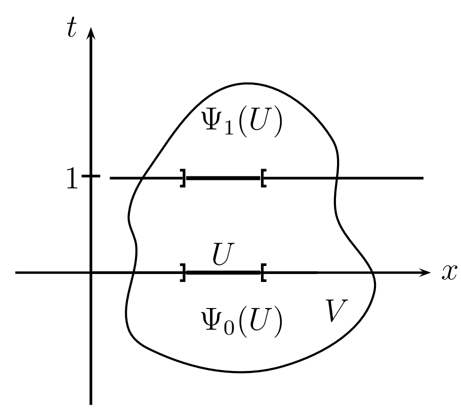
$$\begin{aligned} \Psi^*(\Phi^*\omega) = \Psi^*\Big(\sum_I (f_I \circ \Phi) \cdot d\varphi_I\Big) &\underset{[1.),2.)]}{=} \sum_I (f_I \circ \underbrace{\Phi \circ \Psi}_{\Gamma}) \cdot \underbrace{\Psi^*(d\varphi_I)}_{d\gamma_I} \\ &= \sum_I (f_I \circ \Gamma) \cdot d\gamma_I = \Gamma^*(\omega) = (\Phi \circ \Psi)^*\omega. \end{aligned}$$

□

30.6. Das Lemma von Poincaré[2]

Lemma[3]

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen mit $[0,1] \times U \subseteq V$ und $\Psi_0, \Psi_1 \colon U \to V$ definiert durch $\Psi_0(x) := (0, x)$, $\Psi_1(x) := (1, x)$.



Für jede geschlossene $\mathcal{C}^1$ k-Form σ auf V (mit $k \geq 1$) gibt es eine $\mathcal{C}^1$ $(k-1)$-Form η auf U mit $\Psi_1^*\sigma - \Psi_0^*\sigma = d\eta$.

[2] Jules Henri Poincaré (29. 4. 1854 Nancy; †17. 7. 1912 Paris) [ʒyl ɑ̃ˈʁi pwɛ̃kaˈʁe] zählt zu den bedeutendsten französischen Mathematikern und Physikern. Er gilt als einer der Wegbereiter der Chaostheorie und der Relativitätstheorie.

[3] Es handelt sich hierbei noch nicht um das angekündigte Lemma von Poincaré, sondern lediglich um einen Hilfssatz schlechthin.

Beweis

Wenn σ die Darstellung

$$\sigma = \sum_{|I|=k} f_I\,dx_I + \sum_{|J|=k-1} g_J\,dt \wedge dx_J,$$

dann folgt $\Psi_0^*\sigma = \sum\limits_I f_I(0,.)\,dx_I$ und $\Psi_1^*\sigma = \sum\limits_I f_I(1,.)\,dx_I$.
Daher lautet die Bedingung für $\eta = \sum\limits_{|J|=k-1} h_J\,dx_J$ folgendermaßen:

$$d\eta = \sum_{|J|=k-1} dh_J(x) \wedge dx_J \overset{!}{=} \sum_{|I|=k} \underbrace{\big(f_I(1,x) - f_I(0,x)\big)}_{\int_0^1 D_t f_I(t,x)\,dt} dx_I = \left[\begin{array}{c}\text{Integral in der Form}\\ \text{komponentenweise}\\ \text{verstanden}\end{array}\right]$$

$$= \int_0^1 \Big(\sum_{|I|=k} D_t f_I \cdot dx_I\Big)\,dt =: \triangle.$$

Die Form σ ist geschlossen, daher gilt

$$\begin{aligned} 0 = d\sigma &= \sum_{|I|=k} D_t f_I\,dt \wedge dx_I + \sum_I \sum_{i=1}^n D_{x_i} f_I\,dx_i \wedge dx_I + \sum_{|J|=k-1} \sum_{i=1}^n D_{x_i} g_J\,dx_i \wedge dt \wedge dx_J \\ &= dt \wedge \left(\sum_{|I|=k} D_t f_I\,dx_I - \sum_{|J|=k-1} \sum_{i=1}^n D_{x_i} g_J\,dx_i \wedge dx_J\right) + \sum_I \sum_{i=1}^n D_{x_i} f_I\,dx_i \wedge dx_I. \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Komponentenfunktionen von $(k+1)$-Formen folgt insbeondere, dass der Ausdruck in der Klammer verschwinden muss (denn hier sind alle Terme versammelt, die mit dt zu tun haben), deshalb gilt

$$\sum_I D_t f_I\,dx_I = \sum_J \sum_i D_{x_i} g_J\,dx_i \wedge dx_J.$$

Setzen wir dies in $\triangle$ ein, dann bedeutet obige Bedingung nun

$$d\eta \overset{!}{=} \sum_J \sum_i \underbrace{\left(\int_0^1 D_{x_i} g_J(t,x)\,dt\right)}_{D_{x_i}(\int_0^1 g_J(t,x)\,dt) \quad \text{[Parameterintegral]}} dx_i \wedge dx_J = \sum_J d\left(\int_0^1 g_J(t,x)\,dt\right) \wedge dx_J.$$

Somit ist die angegebene Bedingung erfüllbar, indem wir $h_J(x) := \int_0^1 g_J(t,x)\,dt$ und $\eta := \sum\limits_J h_J\,dx_J$ setzen (h_J ist $\mathcal{C}^1$ gemäß den Sätzen über Parameterintegrale aus Analysis 2).

$\square$

Theorem (Lemma von Poincaré)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Ist $k \geq 1$ und ω eine geschlossene $\mathcal{C}^1$ k-Form auf U, so ist ω exakt.

Beweis

OBdA ist U sternförmig bzgl. 0 (sonst Translation anwenden). Wir definieren

$$\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \Phi(t, x) := t \cdot x.$$

Da U sternförmig bzgl. 0 istgilt für alle $x \in U$ und $t \in [0, 1]$, dass $\Phi(t, x) \in U$; mit anderen Worten $V := \Phi^{-1}(U) \supseteq [0, 1] \times U$; weiters ist V offen, weil Φ stetig ist.

Wir definieren die k-Form $\sigma := \Phi^*\omega$ auf V. Dann folgt $d\sigma \underset{[30.5]}{=} \Phi^*(d\omega) = 0$, d. h. σ ist geschlossen. Seien Ψ_1, Ψ_0 wie im obigen Lemma, dann gibt es eine $(k-1)$-Form η auf U, so dass

$$\Psi_1^*\sigma - \Psi_0^*\sigma = d\eta.$$

Außerdem ist $\Psi_0^*\sigma = \Psi_0^*(\Phi^*\omega) \underset{[30.5]}{=} (\Phi \circ \Psi_0)^*\omega$ und $\Phi(\Psi_0(x)) = \Phi(0, x) = 0$, daher also

$$\Psi_0^*\sigma = 0$$

und weiters $\Psi_1^*\sigma = \Psi_1^*(\Phi^*\omega) = (\Phi \circ \Psi_1)^*\omega$ und $\Phi(\Psi_1(x)) = \Phi(1, x) = x$, folglich

$$\Psi_1^*\sigma = \omega.$$

Somit ist insgesamt $d\eta = \Psi_1^*\sigma - \Psi_0^*\sigma = \omega$.

$\square$

Spezialfälle mit physikalischem Hintergrund:

1.) Für $k = 1$ erhalten wir wieder die Theorie der 1-Formen und Stammfunktionen aus Analysis 2; insbesondere gilt im $\mathbb{R}^3$: Ist v ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{rot}(v) = 0$ (wirbelfrei), dann gibt es eine Potenzialfunktion f mit $v = -\operatorname{grad} f$.

2.) In $U = \mathbb{R}^3$ mit $k = 2$ (vgl. Bsp. 2.) in 30.2) gilt: sei $v = (v_1, v_2, v_3)$ und

$$\omega = v_1 \cdot dy \wedge dz - v_2 \cdot dx \wedge dz + v_3 \cdot dx \wedge dy,$$

dann ist

$$d\omega = \operatorname{div}(v) \cdot dx \wedge dy \wedge dz;$$

somit gilt: ist ω geschlossen, d. h. $d\omega = 0$ bzw. äquivalent $\operatorname{div}(v) = 0$ (quellenfreies Kraftfeld), dann folgt $\omega = d\eta$ bzw. $v = \operatorname{rot}(b)$ (Wirbelfeld) mit geeignetem $\eta = b_1\, dx + b_2\, dy + b_3\, dz$ bzw. $b = (b_1, b_2, b_3)$.

31. Orientierte Untermannigfaltigkeiten; Integration von Differentialformen

31.1. Integration von n-Formen

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (somit ist U eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$) und ω eine stetige n-Form mit der Darstellung $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist das *Integral von ω über eine kompakte Menge $K \subseteq U$* definiert durch

$$\int_K \omega := \int_K f(x)\,dx \tag{31.1}$$

(Merkregel: „aus $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ wird $d(x_1, \ldots, x_n)$“.)

Man kann folgende Frage stellen: Ist der Wert des Integrals unabhängig von den gewählten Koordinaten? Mit anderen Worten: Wie ist das Verhalten unter Diffeomorphismen?

Definition

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.
Dann heißt Φ *orientierungstreu*, falls $\det D\Phi(x) > 0 \quad \forall x \in U$,
und *orientierungsumkehrend*, falls $\det D\Phi(x) < 0 \quad \forall x \in U$.

Bemerkung

Sei U (weg)zusammenhängend und Φ ein beliebiger $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $U \to V$. Die Funktion $x \mapsto \det D\Phi(x)$ ist stetig und überall ungleich 0. Sei $\gamma\colon [0,1] \to U$ ein stetiger Weg von $x_0 := \gamma(0)$ nach $y := \gamma(1)$, dann wechselt $t \mapsto \det D\Phi(\gamma(t))$ das Vorzeichen nicht (Zwischenwertsatz!), daher haben $\det D\Phi(x_0)$ und $\det D\Phi(y)$ dasselbe Vorzeichen; somit ist Φ in diesem Fall entweder orientierungstreu oder orientierungsumkehrend.

Proposition

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi\colon U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $K \subseteq U$ kompakt und ω eine stetige n-Form auf V. Dann gilt:

1.) Falls Φ orientierungstreu ist:

$$\int_{\Phi(K)} \omega = \int_K \Phi^*\omega. \tag{31.2}$$

2.) Falls Φ orientierungsumkehrend ist:

$$\int_{\Phi(K)} \omega = -\int_K \Phi^*\omega. \tag{31.2'}$$

Beweis

Sei $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, dann ist $\Phi^*\omega = (f \circ \Phi) \cdot \det D\Phi \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ [vgl. 30.5,3.)] und aus der Transformationsformel folgt

$$\int\limits_{\Phi(K)} \omega = \int\limits_{\Phi(K)} f(y)\,dy = \int\limits_K f(\Phi(x)) \cdot \underbrace{|\det D\Phi(x)|}_{=\pm\det D\Phi(x)} dx = \pm \int\limits_K \Phi^*\omega,$$

wobei $+$ auftritt, falls Φ orientierungstreu ist und $-$, falls Φ orientierungsumkehrend ist.

□

31.2. Orientierung von Untermannigfaltigkeiten

Wir erinnern daran, dass für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq M$ gilt:

$$V \text{ offen relativ zu } M \quad \Leftrightarrow \quad \exists U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen mit } V = U \cap M.$$

Wiederholung zu Untermannigfaltigkeiten: M ist eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn gilt:
für alle $a \in M$ gibt es $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $V \subseteq M$ offen relativ M mit $a \in V$ und eine Immersion $\Phi : T \to \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(T) = V$ und Φ ist ein Homöomorphismus $T \to V$.

Man nennt $\Phi : T \to V$ eine lokale Parametrisierung von M nahe a und $\Psi := \Phi^{-1} : V \to T$ eine *Karte*[1] von M nahe a und$(t_1, \ldots, t_k) \in T$ die *lokalen Koordinaten*.

Definition

1.) Seien $\Phi_j : T_j \to V_j \subseteq M$ $(j = 1, 2)$ lokale Parametrisierungen von M nahe $a \in M$ (somit ist $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$) und $W_j := \Phi_j^{-1}(V_1 \cap V_2)$ $(j = 1, 2)$; gemäß Proposition 28.2 ist $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

   Wir nennen Φ_1 und Φ_2 *gleich orientiert*, falls $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ orientierungstreu ist; ebenso heißen dann die entsprechenden *Karten* $\Psi_j := \Phi_j^{-1} : V_j \to T_j$ *gleich orientiert*.

   (Bem: 'gleich orientiert' liefert eine symmetrische und transitive Relation.)

2.) Eine Familie $\mathcal{A} = (\Psi_\iota : V_\iota \to T_\iota)_{\iota \in I}$ von Karten für M heißt *Atlas von M*, falls $M = \bigcup\limits_{\iota \in I} V_\iota$ ist. Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt *orientiert*, falls je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ gleich orientiert sind. Eine *Orientierung* auf M ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten; dabei heißen orientierte Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ auf M *äquivalent*, wenn jede Karte aus $\mathcal{A}$ mit jeder Karte aus $\mathcal{A}'$ gleich orientiert ist. Eine *orientierte Untermannigfaltigkeit* ist ein Paar (M, σ), wobei M eine Untermannigfaltigkeit und σ eine Orientierung auf M ist.

[1] Achtung: diese Konvention ist umgekehrt zu jener in [For84]!

3.) Sei (M,σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit. Eine lokale Parametrisierung Φ (bzw. Karte $\Phi^{-1} = \Psi$) heißt *positiv orientiert* bzgl. σ, falls Φ (bzw. Ψ) mit jeder lokalen Parametrisierung (bzw. Karte) aus einem Atlas, der σ repräsentiert, gleich orientiert ist.

Bemerkung: M heißt *orientierbar*, wenn es eine Orientierung auf M gibt. Nicht alle Untermannigfaltigkeiten sind orientierbar! (Siehe z.B. das Möbiusband in 31.4, Bsp. 31.4.) auf Seite 80 unten).
Falls M orientierbar mittels σ ist, dann gibt es auch eine zweite, nicht äquivalente, so genannte entgegengesetzte Orientierung, bezeichnet mit $-\sigma$ (sie wird z.B. erzeugt durch Davorschalten von $(t_1,\dots,t_k) \mapsto (t_1,\dots,t_{k-1},-t_k)$ vor die lokalen Parametrisierungen).

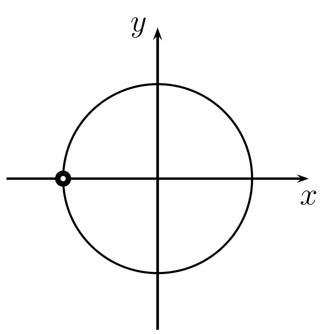
Beispiele

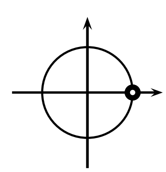
1.) Sei $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, also eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit; $\Psi := \mathrm{id}_U$ ist eine Karte, $\mathcal{A} := \{\Psi\}$ ein Atlas für U und orientiert; sei $V \subseteq U$ offen und $\tilde{\Psi} : V \to T$ eine Karte:

$$\tilde{\Psi} \text{ positiv orientiert } \Leftrightarrow \forall x \in U : 0 < \det D(\tilde{\Psi} \circ \Psi^{-1})(x) = \det D\tilde{\Psi}(x).$$

2.) Sei $M = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, also eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit.

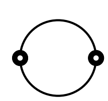
Sei $V_1 = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$, $T_1 =]-\pi,\pi[$ und $\Phi_1 = \Psi_1^{-1} : T_1 \to V_1$ gegeben durch sphärische Koordinaten $\Phi_1(t) = (\cos t, \sin t)$.
Weiters sei $V_2 = S^1 \setminus \{(1,0)\}$, $T_2 =]0,2\pi[$ und $\Phi_2 = \Psi_2^{-1} : T_2 \to V_2$ mit $\Phi_2(t) = (\cos t, \sin t)$.



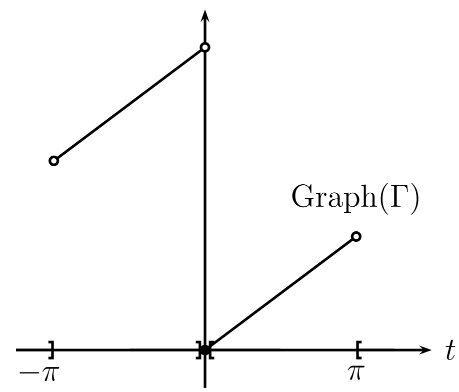


Ein Atlas für S^1 ist dann gegeben durch $\mathcal{A} = \{\Psi_1, \Psi_2\}$.

Sei nun $V := V_1 \cap V_2 = S^1 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.



Wir erhalten mit
$W_1 := \Psi_1(V) = T_1 \setminus \{0\} =]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$,
$W_2 := \Psi_2(V) = T_2 \setminus \{\pi\} =]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$
$\Gamma := \Psi_2 \circ \Phi_1 = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : W_1 \to W_2$
nun $\Gamma(t) = \begin{cases} t + 2\pi & -\pi < t < 0 \\ t & 0 < t < \pi. \end{cases}$



$\forall t \in W_1 : \Gamma'(t) = 1 > 0$, also sind Ψ_1 und Ψ_2 gleich orientiert, daher definiert $\{\Psi_1, \Psi_2\}$ eine Orientierung auf S^1.

31.3. Integration von k-Formen auf orientierten k-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, ω eine stetige k-Form auf U, $M \subseteq U$ eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $K \subseteq M$ kompakt.

Schritt 1: Sei $\Phi : T \to V \subseteq M$ eine positiv orientierte lokale Parametrisierung mit $K \subseteq V$, dann setzen wir

$$\int_K \omega := \int_{\Phi^{-1}(K)} \Phi^*\omega. \tag{31.3}$$

Behauptung: Die Defintion ist unabhängig von der gewählten positiv orientierten Parametrisierung.
Beweis: Sei $\tilde{\Phi} : \tilde{T} \to \tilde{V} \subseteq M$ eine weitere postiv orientierte lokale Parametrisierung mit $K \subseteq \tilde{V}$. Dann ist $\Gamma := \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi : W \to \tilde{W}$ ein orientierungstreuer $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, wobei $\tilde{W} := \tilde{\Phi}^{-1}(V \cap \tilde{V})$, $W := \Phi^{-1}(V \cap \tilde{V})$, und es gilt

$$\int_{\Phi^{-1}(K)} \Phi^*\omega = \int_{\Phi^{-1}(K)} (\tilde{\Phi} \circ \Gamma)^*\omega = \int_{\Gamma^{-1}(\tilde{\Phi}^{-1}(K))} \Gamma^*(\tilde{\Phi}^*\omega) \overset{\text{[Prop. 31.1]}}{=} \int_{\tilde{\Phi}^{-1}(K)} \tilde{\Phi}^*\omega.$$

□

Schritt 2: Sei $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, wobei $\Phi_j : T_j \to V_j$ (für $j = 1 \ldots, m$) eine positiv orientierte lokale Parametrisierung ist. (Wegen der Kompaktheit von K kommen wir mit endlich vielen V_j aus.)
Dann gibt es eine der endlichen offenen Überdeckung untergeordnete Partition der Eins [vgl. 25.5], d. h. $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen $\chi_1, \ldots, \chi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) $0 \le \chi_j \le 1$

2.) $\forall j = 1 \dots, m$: $K_j := K \cap \operatorname{supp}(\chi_j) \subseteq V_j$

3.) $\forall x \in K$: $\sum\limits_{j=1}^{m} \chi_j(x) = 1$.

Wir setzen nun

$$\int\limits_K \omega := \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{K_j} \chi_j \, \omega \qquad \left(= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Phi_j^{-1}(K_j)} (\chi_j \circ \Phi_j) \cdot \Phi_j^* \omega \right). \tag{31.4}$$

Behauptung: Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Wahl der positiv orientierten lokalen Parametrisierungen und der Partition der Eins.
Beweis: Seien $\tilde{\Phi}_l : \tilde{T}_l \to \tilde{V}_l$ $(l = 1, \dots, N)$ positiv orientierte lokale Parametrisierungen mit $K \subseteq \bigcup\limits_{l=1}^{N} \tilde{V}_l$ und $\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_N$ eine entsprechende Partition der Eins mit Eigenschaften wie oben. Wir setzen $\tilde{K}_l := K \cap \operatorname{supp}(\tilde{\chi}_l)$ und erhalten

$$\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{K_j} \chi_j \, \omega \underset{\left[\sum\limits_{l=1}^{N} \tilde{\chi}_l \big|_K = 1\right]}{=} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{K_j \cap \tilde{K}_l} \chi_j \tilde{\chi}_l \, \omega = \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{\tilde{K}_l} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{m} \chi_j \Big)}_{1} \tilde{\chi}_l \, \omega = \sum_{l=1}^{N} \int\limits_{K_l} \tilde{\chi}_l \omega.$$

□

Spezialfall $k = 1$:

Sei $M \subseteq U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$, M eine eindimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit und ω eine stetige 1-Form auf U. Sei weiters $\Phi : I \to V \subseteq M$ eine lokale positiv orientierte Parametrisierung, $[a, b] \subseteq I$ und $K := \Phi([a, b])$. Mit $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \, dx_i$ und $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ist dann

$$\int\limits_K \omega = \int\limits_{\Phi^{-1}(K)} \Phi^* \omega = \int\limits_{[a,b]} \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ \Phi) \cdot d\varphi_i = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(\Phi(t)) \cdot \varphi_i'(t) \, dt \underset{[f=(f_1,\dots,f_n)]}{=}$$

$$= \int\limits_a^b \Big\langle f(\Phi(t)) \mid \dot{\Phi}(t) \Big\rangle \, dt = \int\limits_\Phi \omega \qquad \dots \text{ ergibt genau das Kurvenintegral aus Analysis 2.}$$

31.4. Orientierung von Hyperflächen: Normalenfelder

Vorbemerkung über Orientierung von $\mathbb{R}^k$ und Tangentialräumen: Eine Basis $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ von $\mathbb{R}^k$ heißt *positiv orientiert* (bzgl. der Standard-Orientierung von $\mathbb{R}^k$), falls $\det(v_1\, v_2 \cdots v_k) > 0$.

Sei (M, σ) eine orientierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $\Phi : T \to V$ eine positiv orientierte lokale Parametrisierung und $a = \Phi(t_*) \in V \subseteq M$. Dann bildet nach Sätzen aus der Analysis 2 die Menge $\{D_1\Phi(t_*), \dots, D_k\Phi(t_*)\}$ eine Basis von $T_a(M)$, d. h. $D\Phi(t_*) : \mathbb{R}^k \to T_a(M)$ ist ein Isomorphismus (von $\mathbb{R}$-Vektorräumen).

Eine Basis $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k\}$ von $T_a(M)$ heißt *positiv orientiert* bzgl. der Orientierung σ, falls es eine positiv orientierte Basis $\mathcal{B}_0$ von $\mathbb{R}^k$ sowie eine positiv orientierte lokale Parametrisierung $\Phi : T \to V$ gibt mit $a \in V$ und

$$w_j = D\Phi(t_*) \cdot v_j \qquad (v_j \in \mathcal{B}_0,\ j = 1, \dots, k).$$

Insbesondere ist $\mathcal{B} := \{D_1\Phi(t_*), \dots, D_k\Phi(t_*)\}$ positiv orientiert (als Bild der Standardbasis $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$).
Diese Defintion von positiv orientierten Basen in $T_a(M)$ ist unabhängig von der Wahl der positiv orientierten lokalen Parametrisierung Φ, weil Parametertransformationen $\Psi^{-1} \circ \Phi$ auf andere positiv orientierte lokale Parametrisierungen Ψ ja stets orientierungstreu sind (d. h. $\det D(\Psi^{-1} \circ \Phi) > 0$ [vgl. 31.1]).

Definition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, d. h. eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
Ein *Einheits-Normalenfeld* auf M ist eine **stetige** Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall a \in M \quad \text{ist} \quad \nu(a) \in N_a(M) \quad \text{und} \quad \|\nu(a)\| = 1.$$

Ist σ eine Orientierung auf M, so heißt ν *positiv orientiert* bzgl. σ, wenn gilt:
Für alle $a \in M$ und für jede positiv orientierte Basis $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ von $T_a(M)$ ergibt $\{\nu(a), v_1, \dots, v_{n-1}\}$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$ (d. h. $\det(\nu(a)\, v_1 \cdots v_{n-1}) > 0$).
(Es genügt übrigens, dies für eine positiv orientierte Basis zu prüfen: Sei $\{v'_1, \dots, v'_{n-1}\}$ eine weitere positiv orientierte Basis von $T_a(M)$, dann ist $v'_j = A\, v_j$, wobei $\det A > 0$ und $\det(\nu(a)\, v'_1 \cdots v'_{n-1}) = \det(\nu(a)\, v_1 \cdots v_{n-1}) \cdot \det A$.)

Theorem

Sei $n \geq 2$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche.

1.) Ist M orientierbar mit der Orientierung σ, dann gibt es genau ein Einheits-Normalenfeld ν auf M, das positiv orientiert bzgl. σ ist.

2.) Besitzt M ein Einheits-Normalenfeld ν, dann ist M orientierbar und es gibt genau eine Orientierung σ von M, so dass ν positiv orientiert bzgl. σ ist.

Kurzfassung: Hyperflächen sind genau dann orientierbar, wenn sie (stetige) Einheits-Normalenfelder besitzen.

Beweis

1.): Wegen $\dim N_a(M) = 1$ gibt es genau zwei Einheitsvektoren $w, -w \in N_a(M)$. Es sei $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ eine positiv orientierte Basis von $T_a(M)$ und $s := \operatorname{sgn}\det(w\, v_1 \cdots v_{n-1}) \in \{+1, -1\}$.
Dann ist $\{s \cdot w, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^n$, d. h. es muss $\nu(a) = s \cdot w$ gelten, womit die Eindeutigkeit von ν geklärt ist.
Es sei nun $\nu(a)$ für jedes $a \in M$ wie oben definiert; es bleibt noch zu zeigen, dass $a \mapsto \nu(a)$ stetig ist.
Sei $p \in M$ fixiert. Aus den in Analysis 2 bewiesenen äquivalenten lokalen Darstellungen für Untermannigfaltigkeiten folgt: $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $p \in U$ und eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ für alle $x \in U \cap M$ und

$$M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Weiters ist $\{\operatorname{grad} f(a)\}$ eine Basis von $N_a(M)$ für jedes $a \in M \cap U$.

Wir setzen $\tilde{\nu}_0(a) := \frac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$ $(a \in M \cap U)$ und wählen „das Vorzeichen“ $\tilde{s} \in \{+1, -1\}$ so, dass $\tilde{s} \cdot \tilde{\nu}_0(p) = \nu(p)$ ist.

Mit der Festlegung $\tilde{\nu}(a) := \tilde{s} \cdot \tilde{\nu}_0(a)$ erreichen wir dann, dass $\tilde{\nu}$ stetig $M \cap U \to \mathbb{R}^n$ ist und $\tilde{\nu}(p) = \nu(p)$ erfüllt.

Sei $\Phi : T \to V$ eine positiv orientierte lokale Parametrisierung mit $p = \Phi(t_*) \in V$, dann ist

$$t \mapsto \Delta(t) := \det(\tilde{\nu}(\Phi(t))\, D_1\Phi(t) \cdots D_{n-1}\Phi(t))$$

stetig $T \cap \Phi^{-1}(U \cap M) \to \mathbb{R}$ und $\Delta(t_*) > 0$, weil $\tilde{\nu}(\Phi(t_*)) = \tilde{\nu}(p) = \nu(p)$ ist.
Daher bleibt für t nahe t_* stets $\Delta(t) > 0$ und wegen der Eindeutigkeit von $\nu(\Phi(t))$ mit dieser Eigenschaft ist $\tilde{\nu}(\Phi(t)) = \nu(\Phi(t))$; also ist ν nahe p stetig.

2.): Zu jedem $p \in M$ gibt es eine lokale Parametrisierung $\Phi : T \to V \subseteq M$ nahe p, wobei OBdA T wegzusammenhängend ist (allenfalls ist eine Verkleinerung von T nötig). Dann hat die stetige Funktion $t \mapsto \Delta(t) := \det(\nu(\Phi(t))\, D_1\Phi(t) \cdots D_{n-1}\Phi(t))$ auf ganz T dasselbe Vorzeichen (vgl. die Bemerkung in 31.1); OBdA ist $\Delta(t) > 0$ für alle $t \in T$ (andernfalls kann die Abbildung $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \ldots, t_{n-2}, -t_{n-1})$ davorgeschalten werden).
Sei nun $\mathcal{P}$ die Menge aller lokalen Parametrisierungen mit diesen Eigenschaften (d. h. wegzusammenhängender Bereich und $\det > 0$).

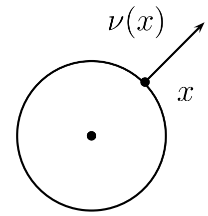
Behauptung: $\Phi, \tilde{\Phi} \in \mathcal{P} \implies \Phi$ und $\tilde{\Phi}$ sind gleich orientiert.
Sei $\Phi : T \to V$, $\tilde{\Phi} : \tilde{T} \to \tilde{V}$ und $W := \Phi^{-1}(V \cap \tilde{V})$, $\tilde{W} := \tilde{\Phi}^{-1}(V \cap \tilde{V})$; dann ist $\Gamma := \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi : W \to \tilde{W}$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.
Wir setzen $v_j := D_j\Phi$ und $\tilde{v}_j := D_j\tilde{\Phi}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ erhalten (mit $\tilde{t} := \Gamma(t)$)

$$(v_1(t) \cdots v_{n-1}(t)) = D\Phi(t) = D(\tilde{\Phi} \circ \Gamma)(t) = D\tilde{\Phi}(\tilde{t}) \cdot D\Gamma(t) = (\tilde{v}_1(\tilde{t}) \cdots \tilde{v}_{n-1}(\tilde{t})) \cdot D\Gamma(t).$$

Wegen $\det(\nu(\Phi(t))\, v_1(t) \cdots v_{n-1}(t)) > 0$, $\det(\nu(\tilde{\Phi}(\tilde{t}))\, \tilde{v}_1(\tilde{t}) \cdots) > 0$ und $\det(\nu(\Phi(t))\, v_1(t) \cdots) = \det(\nu(\tilde{\Phi}(\tilde{t}))\, \tilde{v}_1(\tilde{t}) \cdots) \cdot \det D\Gamma(t)$ folgt somit $\det D\Gamma(t) > 0$. Also ist Γ orientierungstreu.
Somit definiert $\mathcal{A} := \{\Phi^{-1} : \Phi \in \mathcal{P}\}$ einen orientierten Atlas, also eine Orientierung σ, und ν ist bzgl. σ positiv orientiert.

$\square$

Beispiele



1.) $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ mit stetigem Einheits-Normalenfeld $\nu(x) = x$.
Sphärische Koordinaten ergeben eine lokale Parametrisierung

$$\Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\theta \\ \sin\varphi\cdot\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ auf dem Bereich } T_\alpha :=]\alpha,\alpha+2\pi[\times]0,\pi[\subseteq \mathbb{R}^2 \quad (\alpha\in\mathbb{R}).$$

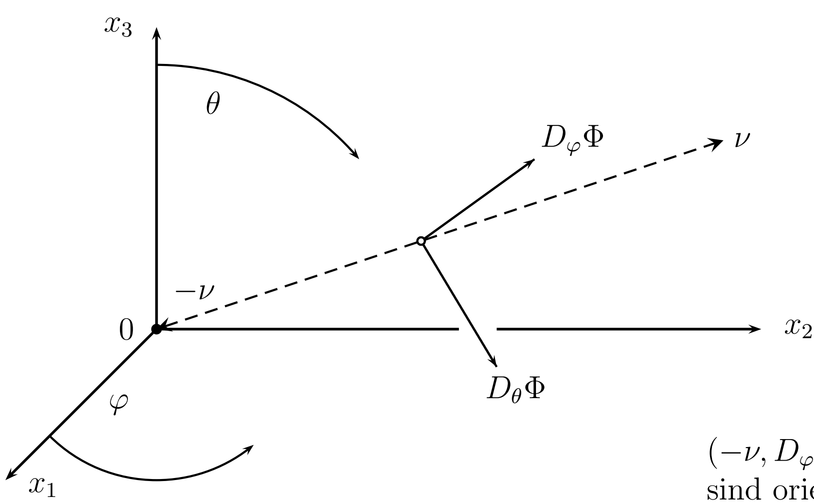
Es ist

$$D_\varphi\Phi = \sin\theta\cdot\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_\theta\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\theta \\ \sin\varphi\cdot\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
\det\big(\nu(\Phi(\varphi,\theta))\ D_\varphi\Phi(\varphi,\theta)\ D_\theta\Phi(\varphi,\theta)\big) &= \det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cdot\sin\theta & -\sin\varphi\cdot\sin\theta & \cos\varphi\cdot\cos\theta \\ \sin\varphi\cdot\sin\theta & \cos\varphi\cdot\sin\theta & \sin\varphi\cdot\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix} \\
= \cos\theta\cdot\det\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cdot\sin\theta & \cos\varphi\cdot\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix} &- \sin\theta\cdot\det\left[\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\sin\theta\right] \\
= \cos\theta\cdot(-\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\sin\theta\cos\theta &- \sin^3\theta\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\
&= \sin\theta\,[-\cos^2\theta - \sin^2\theta] = -\sin\theta < 0 \quad \text{für } 0<\theta<\pi.
\end{aligned}$$

Daher ist z. B. $\check{\Phi}(\theta,\varphi) := \Phi(\varphi,\theta)$ (Vertauschung von 2. und 3. Spalte in obiger Determinante) eine positiv orientierte lokale Parametrisierung bzgl. der Orientierung σ auf S^2, die durch ν definiert wird („äußere Normale"); Φ ist eine positiv orientierte lokale Parametrisierung bzgl. $-\nu$ („innere Normale").



$(-\nu, D_\varphi\Phi, D_\theta\Phi)$ und $(\nu, D_\theta\Phi, D_\varphi\Phi)$
sind orientiert wie (e_1,e_2,e_3)

2.) **Das Möbiusband:** Es sei $I := \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ und eine Parametrisierung $F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\gamma(\varphi) := (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ durch

$$F(\varphi, t) := \gamma(\varphi) + t \cdot \underbrace{\left(\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \gamma(\varphi) + \sin\frac{\varphi}{2} \cdot e_3\right)}_{=:\rho(\varphi)}$$

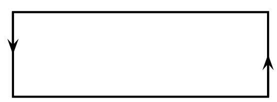
$\gamma(\varphi)$ beschreibt die Sphäre S^1 in der (e_1, e_2)-Ebene;

$\rho(\varphi)$ ist der Einheitsvektor in der $(\gamma(\varphi), e_3)$-Ebene mit dem Winkel $\frac{\varphi}{2}$ zur (e_1, e_2)-Ebene:
$\varphi = 0 \ldots\ \rho(0)$ horizontal, weg von 0
$\varphi = \pi \ldots\ \rho(\pi)$ vertikal, nach oben
$\varphi = 2\pi \ldots\ \rho(2\pi)$ horizontal, zu 0 hin.

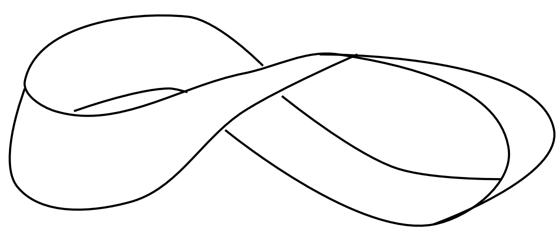
$F(\varphi + 2\pi, t) = F(\varphi, -t)$, also ist F nicht injektiv.

Die Fläche $M := F(\mathbb{R} \times I) \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *Möbiusband*[2].

Papiermodell:



Querseiten entgegengesetzt orientiert verkleben



M ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, also eine Hyperfläche. Dies kann man z. B. mittels der beiden lokalen Parametrisierungen $\Phi := F\big|_{]-\pi,\pi[\times I}$ und $\tilde{\Phi} := F\big|_{]0,2\pi[\times I}$ nacheisen (ohne Beweis – eine Bemerkung dazu befindet sich weiter unten).

Behauptung: M ist nicht orientierbar.

(Indirekter) Beweis: Wäre M orientierbar, dann gäbe es nach obigem Theorem ein stetiges Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$. Wir betrachten ν entlang der Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma(\varphi) = F(\varphi, 0) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$.
Es ist

$$DF(\varphi, 0) = \Big(\dot\gamma(\varphi)\ \rho(\varphi)\Big) = \begin{cases} D\Phi(\varphi, 0) & -\pi < \varphi < \pi \\ D\tilde{\Phi}(\varphi, 0) & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

[2]Es wurde 1858 unabhängig voneinander von dem deutschen Mathematiker und Astronomen August Ferdinand Möbius (1790–1868) und von seinem Kollegen Johann Benedikt Listing entdeckt.

Die Spaltenvektoren spannen $T_{\gamma(\varphi)}(M)$ auf, also ist

$$\begin{aligned} N_{\gamma(\varphi)}(M) &= \{\dot\gamma(\varphi), \rho(\varphi)\}^\perp = \operatorname{span}\{\dot\gamma(\varphi) \times \rho(\varphi)\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ \cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ \sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

und daher

$$\nu(\gamma(0)) = \nu(1,0,0) = \pm\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

OBdA ist $\nu(1,0,0) = e_3$, d. h. $\nu(\gamma(\varphi)) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ -\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \quad (-\pi < \varphi < \pi).$

Die Funktion $f := \nu \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist laut Annahme stetig.
Wir betrachten nun $p := \gamma(\pi) = \gamma(-\pi) = (-1,0,0)$, dann ist einerseits

$$\nu(p) = f(\pi) = \nu(\gamma(\pi)) = \lim_{\varphi\nearrow\pi} \nu(\gamma(\varphi)) = \lim_{\varphi\nearrow\pi} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ -\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und andererseits

$$\nu(p) = f(-\pi) = \nu(\gamma(-\pi)) = \lim_{\varphi\searrow-\pi} \nu(\gamma(\varphi)) = \lim_{\varphi\searrow-\pi} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ -\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist ν in p nicht stetig, ein Widerspruch zur Annahme. $\lightning$
Somit gibt es kein stetiges Einheits-Normalenfeld auf M, daher kann M nicht orientierbar sein.

Bemerkung zur Untermannigfaltigkeitseigenschaft von M: Es ist $DF = (D_\varphi F \; D_t F)$ mit

$$D_\varphi F = \left(1 + t\cos\frac{\varphi}{2}\right)\dot\gamma(\varphi) - \frac{t}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\gamma(\varphi) + \frac{t}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot e_3$$

und

$$D_t F = \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\gamma(\varphi) + \sin\frac{\varphi}{2}e_3.$$

Daher gilt $\langle D_\varphi F \mid D_t F\rangle = 0$ [beachte $\langle\dot\gamma \mid \gamma\rangle = \langle\gamma \mid e_3\rangle = \langle\dot\gamma \mid e_3\rangle = 0$], und wegen $D_\varphi F(\varphi,t) \neq 0$ sowie $D_t F(\varphi,t) \neq 0 \;\forall (t,\varphi)$ ist $\{D_\varphi F, D_t F\}$ linear unabhängig. Somit ist $\operatorname{rang} DF = 2$ und F und folglich auch Φ, $\tilde\Phi$ sind Immersionen.
Um zu beweisen, dass Φ und $\tilde\Phi$ lokale Parametrisierungen ergeben, muss noch gezeigt werden, dass

$$\Phi :]-\pi,\pi[\times I \to V := F(]-\pi,\pi[\times I)$$

und

$$\tilde\Phi :]0,2\pi[\times I \to \tilde V := F(]0,2\pi[\times I)$$

jeweils Homöomorphismen sind und $M = V \cup \tilde{V}$ gilt. Die Bijektivität von Φ und $\tilde{\Phi}$ wurde nach Konstruktion bereits erzwungen. Bleibt noch zu zeigen, dass die jeweiligen Inversen stetig ist.

Sei $x = F(\varphi, t)$, dann ist $t = \left\| x - \frac{(\operatorname{pr}(x), 0)}{\|\operatorname{pr}(x)\|} \right\|$ und $\varphi = \arg(\operatorname{pr}(x))$, wobei $\operatorname{pr}(x) = (x_1, x_2)$, also die Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf die (e_1, e_2)-Ebene bezeichnet. Da die Inversen jeweils auf diese Weise gewonnen werden, lesen wir deren Stetigkeit ab.

31.5. Orientiertes Flächenintegral im $\mathbb{R}^3$

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und ω eine stetige 2-Form auf U sowie $M \subseteq U$ eine zweidimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit mit stetigem Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$, das positiv orientiert ist. Sei

$$\omega = w_1 \cdot dy \wedge dz + w_2 \cdot dz \wedge dx + w_3 \cdot dx \wedge dy,$$

dann können wir $w := (w_1, w_2, w_3)$ als Vektorfeld (auf U) auffassen. Mit der symmbolischen Notation $d\vec{S} := (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ können wir schreiben: $\omega = w \cdot d\vec{S}$ (einfach formal wie ein Skalarprodukt ausrechnen).

Proposition

Sei $K \subseteq M$ kompakt, dann gilt

$$\int\limits_K \omega = \int\limits_K w \cdot d\vec{S} = \int\limits_K \langle w \mid \nu \rangle \; dS$$

Integral einer 2-Form über ein kompaktes Stück der orientierten zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit M	Oberflächenintegral der Funktion $f(x) := \langle v(x) \mid \nu(x) \rangle$ über das Flächenstück K (die Orientierung wird hier durch ν eingebracht)

Symbolisch schreibt man oft auch $d\vec{S} = \nu \cdot dS$ und nennt dies das *„vektorielle Flächenelement“*.

(Ein analoges Resultat für Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ findet sich zum Beispiel in [For84, §20].)

Beweis

Mittels Partition der Eins kann dies auf den Fall zurückgeführt werden, dass K in einer Umgebung enthalten ist, wo M als Graph einer $\mathcal{C}^1$-Funktion beschrieben wird, und zwar sogar durch $z = g(x, y)$ (nach eventueller Umbenennung der Koordinaten); d. h. OBdA: $U = T \times I$, wobei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend ist (Gebiet), $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $g : T \to I$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion, so dass $M = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in T\}$; wir definieren eine lokale Parametrisierung $\Phi : T \to M$ durch $\Phi(x, y) = (x, y, g(x, y))$.

Für die Flächennormale erhalten wir mit dem Resultat aus Beispiel 28.1,2.)

$$\nu(x,y,g(x,y)) = s\cdot\frac{N_\Phi(x,y)}{\|N_\Phi(x,y)\|} = s\cdot\frac{\begin{pmatrix}-\operatorname{grad} g(x,y)\\ 1\end{pmatrix}}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} g(x,y)\|^2}} =: s\cdot\nu_0(x,y),$$

wobei $s\in\{-1,+1\}$ ist; weiters gilt

$$\begin{aligned}\det(s\nu_0\; D_1\Phi\; D_2\Phi) &= \det\left(\frac{s}{\sqrt{1+\|\nabla g\|^2}}\begin{pmatrix}-\nabla g\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\D_1 g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\D_2 g\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{s}{\sqrt{1+\|\nabla g\|^2}}\cdot\det\begin{pmatrix}-D_1g & 1 & 0\\ -D_2 g & 0 & 1\\ 1 & D_1 g & D_2 g\end{pmatrix}\\ &= \frac{s}{\sqrt{1+\|\nabla g\|^2}}\cdot\left(1+(D_1g)^2+(D_2g)^2\right) = s\cdot\sqrt{1+\|\nabla g\|^2},\end{aligned}$$

d. h. Φ ist genau dann positiv orientiert, wenn $s=+1$ ist; OBdA ist dies der Fall, sonst schalten wir $(x,y)\mapsto(y,x)$ davor.
Wir haben nun

$$\int\limits_K \omega = \int\limits_{\Phi^{-1}(K)} \Phi^*\omega =: \triangle$$

und

$$\Phi^*\omega = (w_1\circ\Phi)\cdot dy\wedge dg + (w_2\circ\Phi)\cdot dg\wedge dx + (w_3\circ\Phi)\cdot dx\wedge dy =$$

$$= (w_1\circ\Phi)\cdot\underbrace{dy}_{\text{gibt } 0}\wedge(D_1 g\,dx + D_2 g\underbrace{dy}) + (w_2\circ\Phi)\cdot D_2 g\,dy\wedge dx + (w_3\circ\Phi)\cdot dx\wedge dy =$$

$$= [(w_1\circ\Phi)\cdot(-D_1g) + (w_2\circ\Phi)\cdot(-D_2g) + (w_3\circ\Phi)]\cdot dx\wedge dy$$

und daher

$$\triangle = \int\limits_{\Phi^{-1}(K)} (-D_1g\cdot(w_1\circ\Phi) - D_2g\cdot(w_2\circ\Phi) + (w_3\circ\Phi))(x,y)\,d(x,y).$$

Andererseits ist

$$\int\limits_K \langle w\mid\nu\rangle\,dS = \int\limits_{\Phi^{-1}(K)}\left\langle (w\circ\Phi)(x,y)\mid \underbrace{\nu(\Phi(x,y))}_{\begin{pmatrix}-\nabla g\\ 1\end{pmatrix}/\sqrt{1+\|\nu g\|^2}}\right\rangle\sqrt{1+\|\nabla g(x,y)\|^2}\,d(x,y) =$$

$$= \int\limits_{\Phi^{-1}(K)} \left\langle \begin{pmatrix} w_1 \circ \Phi \\ w_2 \circ \Phi \\ w_3 \circ \Phi \end{pmatrix} (x,y) \mid \begin{pmatrix} -D_1 g(x,y) \\ -D_2 g(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(x,y) = \bigtriangleup$$

□

In den Übungen wird folgender Spezialfall behandelt: $M = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$, $K \subseteq M$ kompakt, $\omega = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \cdot d\vec{S}$ und $\nu = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$; dann gilt

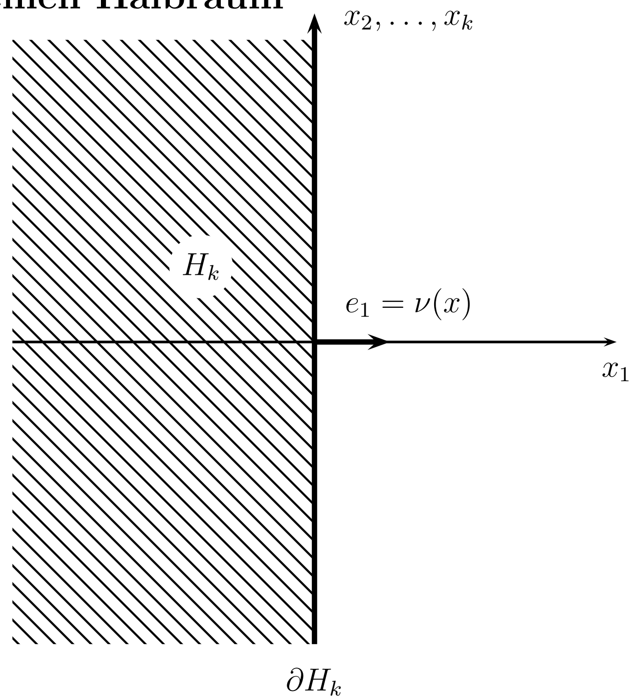
$$\mathrm{Fl}(K) = \int\limits_K \omega.$$

32. Satz von Stokes und klassische Integralsätze

32.1. Spezialfall: Integral über einen Halbraum

Es sei $H_k := \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$, dann ist $\partial H_k = \{x : x_1 = 0\}$ eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit einer globalen Parametrisierung $\beta\colon \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k$, $\beta(t_1, \dots, t_{k-1}) = (0, t_1, \dots, t_{k-1})$.

Dabei definiert β eine Orientierung auf ∂H_k und $\nu(x) := e_1$ für alle $x \in \partial H_k$ definiert ein positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld (das nach außen weist).



Es ist $\dim \bigwedge^{k-1}(\mathbb{R}^k)^* = k$ und jede $(k-1)$-Form ω auf $\mathbb{R}^k$ kann mit eindeutigen Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_k\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} f_j \cdot \underbrace{(-1)^{j-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \underbrace{\widehat{dx_j}}_{\text{fehlt}} \wedge \dots \wedge dx_k}_{\text{bilden punktweise eine Basis}}.$$

Proposition (der „flache Stokes“): Es sei $k \geq 2$ und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form mit $\operatorname{supp}(\omega) := \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{supp}(f_j)$ kompakt. Dann gilt

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega.$$

Bemerkung: Für $k = 1$ ist $H_k =]-\infty, 0]$ und $\partial H_k = \{0\}$; ist f eine stetig differenzierbare 0-Form auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, d. h. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ mit kompaktem Träger, dann entspräche der obigen Proposition gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formal die Aussage

$$\int_{-\infty}^{0} f' = f(0).$$

Beweis

Es ist

$$\beta^*\omega = \sum_{j=1}^{k} (f_j \circ \beta) \cdot (-1)^{j-1} \underbrace{d0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_{j-1}} \wedge \dots dt_{k-1}}_{=0,\text{ außer wenn } j=1} = (f_1 \circ \beta) \cdot dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1}$$

und daher

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1})\, d(t_1, \dots, t_{k-1}).$$

Nun berechnen wir die linke Seite der behaupteten Gleichung: mit

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} D_j f_j \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

ist weiter

$$\int_{H^k} d\omega = \int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{k-1}} \left(\sum_{j=1}^{k} D_j f_j(x) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \underbrace{\int_{-\infty}^{0} D_1 f_1(x)\, dx_1}_{f_1(0,x_2,\dots)} d(x_2, \dots, x_k)$$

$$+ \sum_{j=2}^{k} \int_{]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{k-2}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} D_j f_j(x)\, dx_j \right)}_{= f_j(x)\big|_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty} = 0,\text{ weil } \operatorname{supp}(f_j) \text{ kompakt}} d(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_k)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k)\, d(x_2, \dots, x_k).$$

Insgesamt folgt also $\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega$.

$\square$

32.2. Kompakta mit glattem Rand

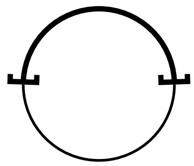
Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $A \subseteq M$. Weiters sei d die euklidische Metrik in $\mathbb{R}^n$ und $d' := d\big|_{M\times M}$, dann bezeichne

$$\partial_M A \quad \text{den Rand von } A \text{ bzgl. } (M, d').$$

Für $x \in M$ gilt dann: $x \in \partial_M A \iff$
für alle Umgebungen U von x in $\mathbb{R}^n$ ist $(M \cap U) \cap A \neq \emptyset$ und $(M \cap U) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset$.

Vorsicht! Es ist stets $\partial_M A \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n} A$, aber i. A. gilt nicht Gleichheit.

Beispiel im $\mathbb{R}^2$:



$M = S^1$, $A = \{(x,y) \in S^1 : y \geq 0\}$
$\partial_{\mathbb{R}^2} A = A$ und $\partial_M A = \{(-1,0),(1,0)\}$.

Bemerkung: Falls M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, dann stimmen $\partial_M A$ und ∂A überein, falls $A \cap \partial M = \emptyset$ ist.

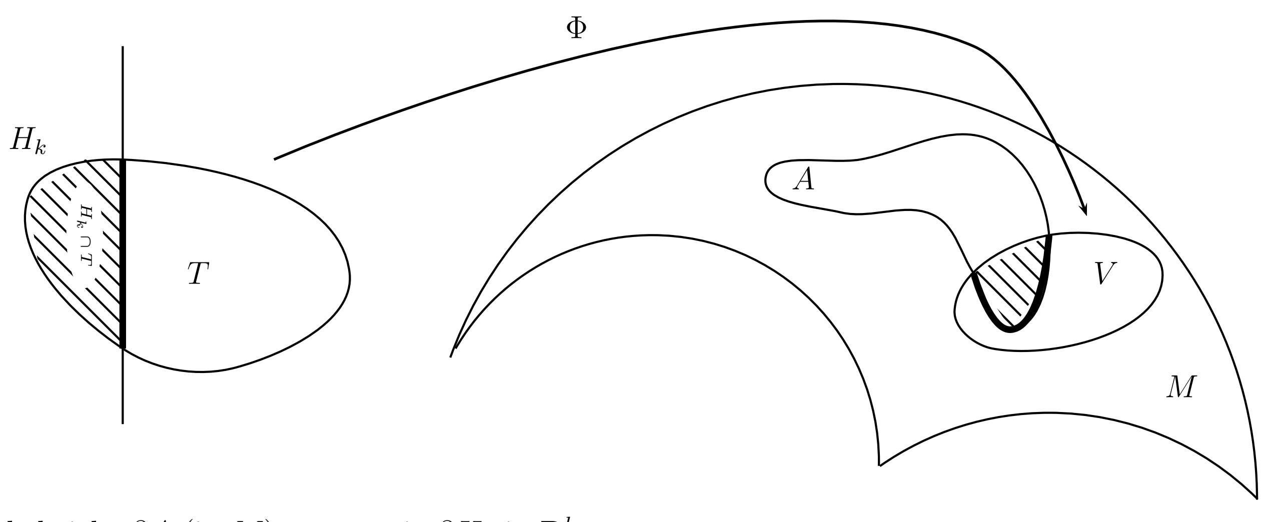
Da in allen folgenden Aussagen stets nur Ränder relativ zu einer fix gegebenen Untermannigfaltigkeit M vorkommen, wird ab nun dennoch die **Notation** ∂A für $\partial_M A$ verwendet (es handelt sich dabei um einen üblichen Missbrauch der Notation).

Definition

Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $A \subseteq M$ kompakt. Man sagt, A habe *glatten Rand* (in M), falls gilt: Für alle $p \in \partial A$ gibt es eine so genannte *randadaptierte* lokale Parametrisierung, d. h. $\Phi\colon T \to V \subseteq M$ ist eine lokale Parametrisierung von M mit $p \in V$ und

1.) $\Phi(H_k \cap T) = A \cap V$

2.) $\Phi(\partial H_k \cap T) = \partial A \cap V$.



Lokal sieht ∂A (in M) so aus wie ∂H_k in $\mathbb{R}^k$.

Proposition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ ein Kompaktum mit glattem Rand (in M). Dann ist ∂A eine $(k-1)$-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Beweis

Sei $p \in \partial A$ und $\Phi\colon T \to V$ eine randadaptierte lokale Parametrisierung nahe p. Sei weiters $\beta\colon \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k$ wie in 32.1 und

$$T_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap T), \quad V_0 := \partial A \cap V.$$

Dann ist T_0 offen in $\mathbb{R}^{k-1}$ und V_0 offen in ∂A; wir setzen

$$\Psi := \Phi \circ \beta\colon T_0 \to V_0 \subseteq \partial A, \text{ d. h. } \Psi(s_1, \dots, s_{k-1}) = \Phi(0, s_1, \dots, s_{k-1}).$$

Wegen $\Phi(\partial H_k \cap T) = \partial A \cap V$ ist Ψ ein Homöomorphismus und natürlich $\mathcal{C}^1$. Die Jacobi-Matrix

$$D\Psi(s) = (D_2\Phi(0,s) \cdots D_k\Phi(0,s))$$

hat Rang $k-1$, weil $(D_1\Phi \cdots D_k\Phi)$ laut Voraussetzung Rang k hat.
Hier war $p \in \partial A$ beliebig, also ist ∂A eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit; weiters ist $\partial A \subseteq A$, weil A abgeschlossen (in M) ist. Außerdem ist ∂A selbst abgeschlossen und Teilmenge eines Kompaktums, also ist auch ∂A kompakt.

□

32.3. Induzierte Orientierung des Randes

Lemma

Es seien $T, T' \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)\colon T \to T'$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus mit folgenden Eigenschaften:

1.) $\Gamma(H_k \cap T) = H_k \cap T'$

2.) $\Gamma(\partial H_k \cap T) = \partial H_k \cap T'$ [Bem. ohne Bew.: folgt eigentlich schon aus 1.)]

3.) $\det D\Gamma(x) > 0 \quad \forall x \in T$.

Dann gilt

$$\det \frac{\partial(\Gamma_2, \dots, \Gamma_k)}{\partial(x_2, \dots, x_x)} > 0 \qquad \forall x \in \partial H_k \cap T.$$

Beweis. Wir verwenden die Notation $x'' = (x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$.
2.) impliziert $\Gamma_1(0, x_2, \dots, x_k) = 0$ für $(0, x'') \in T$, daher ist

$$D_j\Gamma_1(x) = 0 \qquad j = 2, \dots, k;\ \forall x \in \partial H_k \cap T.$$

Es ist

$$D_1\Gamma_1(0, x'') = \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma_1(h, x'') - \Gamma_1(0, x'')}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma_1(h, x'')}{h}.$$

Aus 1.) folgt, dass $\Gamma_1(h, x'') \le 0$ für $h < 0$ und $\Gamma_1(h, x'') > 0$ für $h > 0$, daher gilt

$$D_1\Gamma_1(0, x'') \ge 0.$$

Wegen $D\Gamma(x) = \begin{pmatrix} D_1\Gamma_1(x) & 0\cdots 0 \\ * & \frac{\partial(\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k)}{\partial(x_2,\ldots,x_k)} \end{pmatrix}$ folgt somit für $x = (0, x'')$ aus 3.) schließlich

$$0 < \det D\Gamma(x) = \underbrace{D_1\Gamma_1(x)}_{\geq 0} \cdot \det \frac{\partial(\Gamma_2,\ldots,\Gamma_k)}{\partial(x_2,\ldots,x_k)}(x).$$

und somit die Behauptung. □

Proposition

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit und $A \subseteq M$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A. Dann definieren die gemäß Proposition 32.2 (im Beweis) konstruierten lokalen Parametrisierungen aus den randadaptierten positiv orientierten lokalen Parametrisierungen von M eine Orientierung auf ∂A. Wir nennen sie die (von M) *induzierte Orientierung* auf ∂A.

Beweis

Seien $\Phi\colon T \to V$, $\Phi'\colon T' \to V'$ positiv orientierte randadaptierte lokale Parametrisierungen und $\Psi := \Phi \circ \beta\colon T_0 \to V_0$, $\Psi' := \Phi' \circ \beta\colon T_0' \to V_0'$ die daraus konstruierte lokale Parametrisierung von ∂A.
Wir setzen $\Gamma := (\Phi')^{-1} \circ \Phi\colon T \to T'$ und $\tilde{\Gamma} := (\Psi')^{-1} \circ \Psi\colon T_0 \to T_0'$.

Laut Annahme ist Γ orientierungstreu, d. h. $\det D\Gamma(x) > 0$ für alle $x \in T$. Weiters ist $\Gamma(H_k \cap T) = H_k \cap T'$ und $\Gamma(\partial H_k \cap T) = \partial H_k \cap T'$, weil Φ, Φ' randadaptiert sind.
Für alle $s \in T_0$ gilt

$$\tilde{\Gamma}(s) = (\Phi' \circ \beta)^{-1} \circ (\Phi \circ \beta)(s) = (\Phi' \circ \beta)^{-1}(\Phi(0,s)) = (\Gamma_2(0,s), \ldots, \Gamma_k(0,s)),$$

daher

$$D\tilde{\Gamma}(s) = \frac{\partial(\Gamma_2,\ldots,\partial\Gamma_k)}{\partial(t_2,\ldots,t_k)}(0,s).$$

Nach dem obigen Lemma ist $\det D\tilde{\Gamma}(s) > 0$ für alle $s \in T_0$, daher ist $\tilde{\Gamma}$ orientierungstreu und somit Ψ, Ψ' gleich orientiert.

□

32.4. Der Satz von Stokes[1]

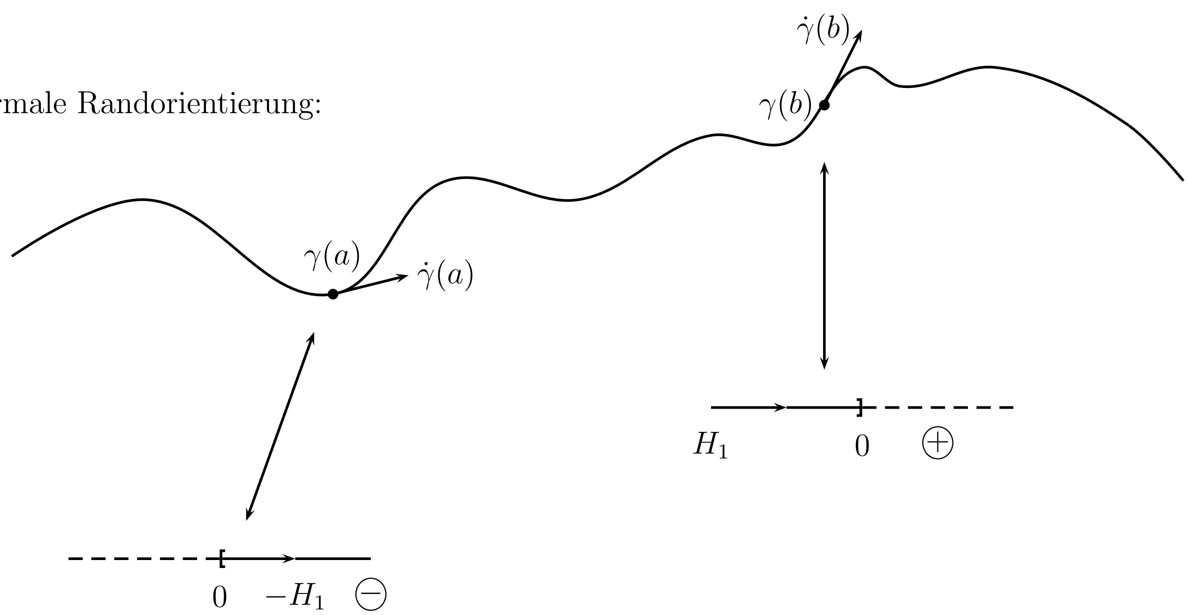
Sei $k \geq 2, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$ eine orientierte k-dimensionale $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit, d.h. alle lokalen Parametrisierungen sind stets sogar $\mathcal{C}^2$-Abbildungen.
Ist $A \subseteq M$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A (mit der induzierten Orientierung) und ω eine stetig differenzierbare $(k-1)$-Form auf U, dann gilt

$$\boxed{\int\limits_A d\omega = \int\limits_{\partial A} \omega}$$

Bemerkungen:

1.) Für $k = 1$ sieht das Analogon der Aussage wie folgt aus: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve, $M = \gamma(I)$, $[a, b] \subseteq I$ und $A = \gamma([a, b])$ und $\partial A = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$.

formale Randorientierung:



Ist ω eine 0-Form, d. h. also $\omega = f\colon U \to \mathbb{R}$, dann ist $d\omega = df$ eine 1-Form und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für 1-Formen besagt

$$\int\limits_{\gamma([a,b])} df = -f(\gamma(a)) + f(\gamma(b)).$$

[1]Dieser Satz ist nach dem irischen Mathematiker und Physiker Sir George Gabriel Stokes (*13. 8. 1819 Skreen, Sligo, Irland; †1. 2. 1903 Cambridge) [dʒɔːdʒ ˈgeɪbriəl ßtəʊks] benannt.

2.) Der Satz von Stokes gilt unverändert auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass M eine $\mathcal{C}^1$-Untermannigfaltigkeit ist. In unserer Formulierung steht die Voraussetzung $\mathcal{C}^2$ nur, um die Beweistechniken einfacher zu halten (weil beim Pullback von Differentialformen ein Regularitätsgrad der Parametrisierungen verloren geht).

Weiters braucht auch der Rand ∂A nur stückweise glatt zu sein, darf also „Ecken“ haben. Dazu kann man von Haus aus mit diffeomorphen Bildern von Quadern bzw. Simplices als Integrationsbereichen arbeiten, was zum Begriff der *Integration über Ketten* führt (vgl. etwa [Rud05] oder [Heu04]).

Alternativ kann man den Integralbegriff selbst erweitern (z.B. nach Lebesgue) und darf dann etwaige „Problem-Nullmengen“ des Integrationsbereiches vernachlässigen, womit ebenso klassische Bereiche wie Quadrat, Dreieck, Kegel, Würfel etc. als Integrationsgebiete für den Satz von Sokes zulässig werden (vgl. [Kön04] oder [AE01]).

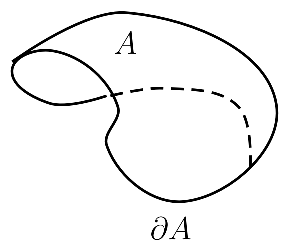
3.) Gilt $\partial A = \emptyset$, so folgt $\int_A d\omega = 0$. Ist insbesondere M eine kompakte Untermannigfaltigkeit, dann ergibt die Setzung $A = M$ stets $\partial A = \partial_M M = \emptyset$ und somit

$$\int_M d\omega = 0.$$

32.5. Die klassische Version der Integralsätze im $\mathbb{R}^3$

(A) $\dim \mathbf{M} = 2$, Stokescher Integralsatz:

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $M \subseteq U$ eine zweidimensionale $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit, orientiert durch ein Einheits-Normalenfeld $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$, und $A \subseteq M$ ein Kompaktum mit dem glatten Rand ∂A. ∂A hat Dimension 1 und ist die Randkurve des Flächenstücks A.



Für alle $p \in \partial A$ sei $\tau(p) \in T_p(\partial A)$ mit $\|\tau(p)\| = 1$ und positiv orientiert (im Sinne der von M induzierten Orientierung). Dann heißt $\tau\colon \partial A \to \mathbb{R}^3$ das *Einheits-Tangentenfeld* der Randkurve. Falls ∂A durch einen regulären Weg $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird, so folgt $\tau(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)/\|\dot\gamma(t)\|$.
Sei ω eine $\mathcal{C}^1$ 1-Form auf U mit Darstellung $\omega = w_1\,dx + w_2\,dy + w_3\,dz$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. In der Notation von 30.2 und 31.5 ist dann $d\omega = \operatorname{rot}(\vec{w}) \cdot d\vec{S}$ und somit gilt

$$\int_{\partial A} \omega = \boxed{\int_{\partial A} \langle \vec{w} \mid \tau \rangle = \int_A \langle \operatorname{rot}(\vec{w}) \mid \nu \rangle \; dS} = \int_A d\omega \tag{32.1}$$

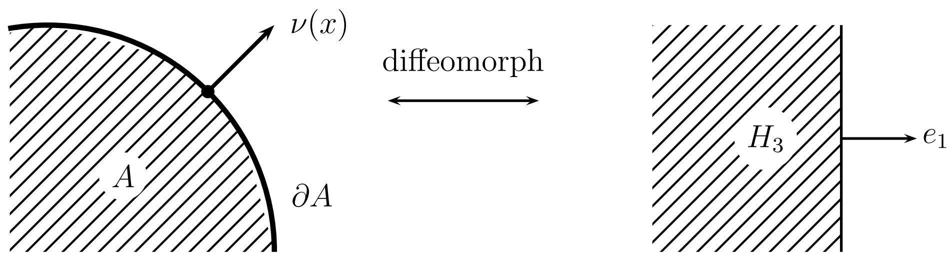
(Die inneren Terme sind ein- und zweidimensionale Oberflächenintegrale, wobei die Orientierungen in τ bzw. ν gesteckt wurden. Mit einer Parametrisierung von ∂A durch $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ ergibt sich z.B. $\int_{\partial A} \langle \vec{w} \mid \tau \rangle = \int_I \langle \vec{w}(\gamma(t)) \mid \dot\gamma(t) \rangle \; dt$.)

(B) $\dim \mathbf{M} = \mathbf{3}$**, Gaußscher Integralsatz:**[2]

Sei $M = U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen (als dreidimensionale $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit mit Standard-Orientierung) und $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit dem glatten Rand ∂A.

∂A hat Dimension 2 und ist die Randfläche des Volumens A.

Sei $\nu\colon \partial A \to \mathbb{R}^3$ ein Einheits-Normalenfeld auf ∂A und positiv orientiert entsprechend der Standard-Orientierung in A. Dann zeigt ν stets aus dem Volumen nach „außen“, d. h. in Richtung $U \setminus A$:



Daher nennt man ν das *äußere Einheits-Normalenfeld* auf ∂A.

Sei ω eine $\mathcal{C}^1$ 2-Form auf U mit Darstellung

$$\omega = w_1 \cdot dy \wedge dz + w_2 \cdot dz \wedge dx + w_3 \cdot dx \wedge dy, \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3),$$

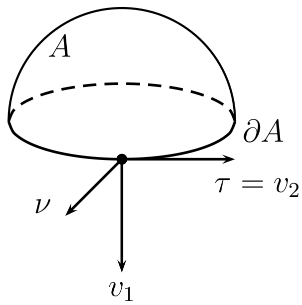
dann gilt in der Notation von 31.5 und 30.2 $d\omega = \operatorname{div}(\vec{w}) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$ und somit:

$$\int_{\partial A} \omega = \boxed{\int_{\partial A} \langle \vec{w} \mid \nu \rangle \; dS = \int_A \operatorname{div}(\vec{w})} = \int_A d\omega \tag{32.2}$$

(Physikalisch: der Gesamtfluss von $\vec{w}$ durch ∂A ist gleich der Quellstärke in A.)

[2] Dieser Spezialfall des allgemeinen Satzes von Stokes wurde wahrscheinlich zum ersten Mal von Joseph Louis Lagrange im Jahre 1762 formuliert und unabhängig davon 1813 von Carl Friedrich Gauß, 1825 von George Green und 1831 Mychajlo Vasyljovyč Ostrohrads'kyj (Остроградський Михайло Васильович) neu entdeckt. Ostrogradski bewies ihn auch erstmals formal, weswegen er auch oft Satz von Gauß-Ostrogradski genannt wird. *Ostrohradskyj, Mychajlo*

Beispiele:

1.) 

$M = S^2$, $A = \{(x,y,z) \in S^2 \colon z \geq 0\}$,
$\partial A = \{(x,y,0) \colon (x,y) \in S^1\}$, $\nu(p) = p$ für alle $p \in S^2$.
Dann ist $\tau(x,y,0) = (-y,x,0) \quad \forall (x,y,0) \in \partial A$.

Sei nun $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \log(1+x^2) + e^{x+z} \\ x + \sinh(y) \\ e^{x+z} \end{pmatrix}$, $\boxed{\ ?\ }$ $\int_{\partial A} \langle \vec{w} \mid \tau \rangle = \ldots$

Aus (32.1) folgt

$$\int\limits_{\partial A} \langle \vec{w} \mid \tau \rangle = \int\limits_{A} \langle \operatorname{rot}(\vec{w}) \mid \nu \rangle \; dS = \circledast$$

Wegen $\operatorname{rot}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $dS = \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$ in sphärischen Koordinaten ist

$$\circledast = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\nu_3(\Phi(\varphi,\theta))}_{=z=\cos\theta} \cdot \sin\theta \, d\theta d\varphi = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \pi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta = \pi.$$

2.) $M = U = \mathbb{R}^3$, $A = \overline{B_1(0)} = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,
$\partial A = S^2$ und $\nu(p) = p \; \forall p \in \partial A = S^2$.
Für $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ergibt sich gemäß (32.2)

$$\int\limits_{S^2} \langle \vec{w} \mid \nu \rangle \; dS = \int\limits_{\overline{B_1(0)}} \overbrace{\operatorname{div}(\vec{w})}^{3} = 3 \cdot \operatorname{Vol}_3(\overline{B_1(0)}) = 4\pi.$$

32.6. Beweis des Satzes von Stokes

Lemma: Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_\iota)_{\iota\in I}$ eine offene Überdeckung von A. Dann existiert $\lambda > 0$ (die so genannte *Lebesgue-Zahl*) mit folgender Eigenschaft:
$\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $K \cap A \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(K) \leq \lambda\ \ \exists \iota \in I\colon K \subseteq U_\iota$.

Beweis. $\forall a \in A\colon \exists r_a > 0,\ \exists \iota \in I\colon B_{r_a}(a) \subseteq U_\iota$.
Es ist $\big(B_{r_a/2}(a)\big)_{a\in A}$ eine offene Überdeckung von A, daher folgt aus der Kompaktheit

$$\exists a_1, \ldots, a_m \in A\colon \quad A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_{r_{a_k}/2}(a_k).$$

Wir setzen $\lambda := \min\left(\frac{r_{a_1}}{2}, \ldots, \frac{r_{a_m}}{2}\right)$.
Sei K wie in der Behauptung; wähle $a \in A \cap K$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$ sowie $\iota_k \in I$ mit $a \in B_{r_{a_k}/2}(a_k) \subseteq B_{r_{a_k}}(a_k) \subseteq U_{\iota_k}$.
Wegen $\operatorname{diam}(K) \leq r_{a_k}/2$ ist somit $K \subseteq B_{r_{a_k}}(a_k) \subseteq U_{\iota_k}$. □

Nun zum Beweis des Satzes 32.4:

- Sei $(U_\iota)_{\iota\in I}$ eine offene Überdeckung von A passend zu Bildern von Parametrisierungen $\Phi_\iota\colon T_\iota \to M \cap U_\iota$.
- Sei $\lambda > 0$ eine Lebesgue-Zahl zur Überdeckung $(U_\iota)_{\iota\in I}$ für A gemäß obigem Lemma.
- Setze $\varepsilon := \dfrac{\lambda}{2\sqrt{n}}$ und wähle eine $\mathcal{C}^\infty$-Partition der Eins gemäß Lemma 25.5,

  d. h. $(\chi_p)_{p\in\mathbb{Z}^n}$, $\chi_p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\sum\limits_p \chi_p = 1$ und $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\chi_p)) \leq \underbrace{2 \cdot \sqrt{n} \cdot \varepsilon}_{\substack{\text{Diagonale im Würfel } W_\varepsilon(\varepsilon\cdot p)\\ \text{aus Lemma 25.5}}} = \lambda$.

- Wir erhalten $\omega = \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}^n} \chi_p \cdot \omega$, wobei die Summe auf A endlich ist.
  - Es genügt daher, den Satz für einen Summanden zu beweisen, das bedeutet OBdA: $\operatorname{supp}(\omega) \cap M \subseteq \Phi(T) = V$, wobei $\Phi\colon T \to V$ eine positiv orientierte lokale $\mathcal{C}^2$-Parametrisierung von M ist.
- $\Phi^*\omega$ ist eine $(k-1)$-Form auf T mit kompaktem $\operatorname{supp}(\Phi^*\omega) \subseteq T$ und kann durch Null zu einer $(k-1)$-Form $\tilde\omega$ auf $\mathbb{R}^k$ fortgesetzt werden, wobei $\operatorname{supp}(\tilde\omega)$ kompakt ist.
- $\displaystyle\int_A d\omega = \int_{H_k\cap T} \Phi^*(d\omega) = \int_{H_k\cap T} d(\Phi^*\omega) = \int_{H_k} d\tilde\omega$
- Sei $\Psi\colon T_0 \to V_0 = \partial A \cap V$ die von Φ induzierte Parametrisierung von ∂A:

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{T_0} \Psi^*\omega = \int_{T_0} (\Phi\circ\beta)^*\omega = \int_{T_0} \beta^*\Phi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^*\tilde\omega = \int_{\partial H_k} \tilde\omega$$

- Aus Proposition 32.1 („flacher Stokes“) folgt $\displaystyle\int_{\partial H_k} \tilde{\omega} = \int_{H_k} d\tilde{\omega}$, womit die Behauptung des Satzes von Stokes bewiesen ist.

□

32.7. Der Satz von Green[3] im $\mathbb{R}^2$

Wir betrachten den folgenden Spezialfall Theorem 32.4: Sei $M = U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A; dann ist ∂A eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, also lokal eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. Ist $\omega = P \cdot dx + Q \cdot dy$ eine $\mathcal{C}^1$ 1-Form auf U, dann gilt

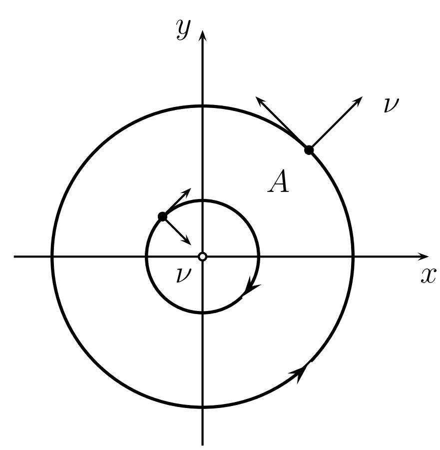
$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Mit $d\omega = D_yP \cdot dy \wedge dx + D_xQ \cdot dx \wedge dy = (D_xQ - D_yP)\, dx \wedge dy$ und $C := \partial A$ als Notation für die Randkurve nimmt obige Formel folgende Gestalt an:

$$\boxed{\int_C (P dx + Q dy) = \int_A (D_xQ - D_yP)\, d(x,y).}$$

Dies ist der so genannte *Integralsatz von Green(-Riemann-Gauß) in der Ebene.*

Beispiel



Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $A = \{(x,y)\colon 0 < r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$, also ein Kreisring. Dann erhalten wir als Rand

$$\partial A = \underbrace{\{x^2+y^2=r^2\}}_{C_1} \cup \underbrace{\{x^2+y^2=R^2\}}_{C_2}.$$

Der Normalvektor ν zeigt aus A heraus: die Randkurve ist $C = C_2 - C_1$, wobei C_1 im Uhrzeigersinn und C_2 entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Sei $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\, dy$, dann ist $d\omega = 0$ (schon in Analysis 2 bei den Integrabilitätsbedingungen berechnet!) und folglich gilt

$$0 = \int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega = \int_{-C_1} \omega + \int_{C_2} \omega = -\int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega.$$

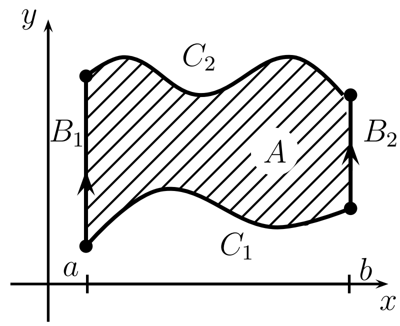
[3]George Green (*14. 7. 1793 Nottingham; †31. 3. 1841 Sneinton) [dʒɔːdʒ griːn]englischer Mathematiker und Physiker

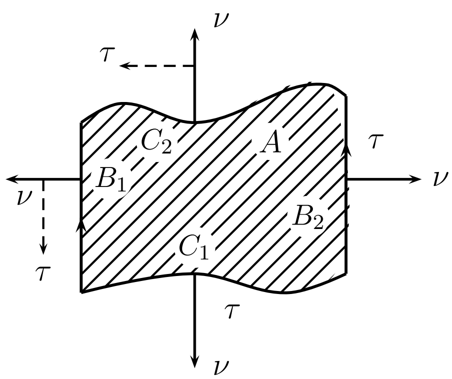
Daher gilt unabhängig vom Radius

$$\int\limits_{C_1} \omega = \int\limits_{C_2} \omega.$$

Satz von Green für Normalbereiche

Sei z. B. mit zwei $\mathcal{C}^1$-Funktionen $g_1, g_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_1 \leq g_2$ ein Normalbereich bzgl. der x-Achse gegeben: $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Dieser hat keinen glatten Rand, denn es ist $\partial A = C_1 \cup B_2 \cup C_2 \cup B_1$.
Notation: Seien C_1 und C_2 von links nach rechts durchlaufen, B_1 und B_2 von unten nach oben.





Bzgl. der Standardorientierung des $\mathbb{R}^2$ sollte die Abfolge $C_1, B_2, -C_2, -B_1$ für den Randweg genommen werden; sei $C = C_1 + B_2 - C_2 - B_1$ als stückweise regulärer Weg.

Lemma 1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $A \subseteq U$ und $P \in \mathcal{C}^1(U)$, dann gilt:

$$\int\limits_C P\,dx = -\int\limits_A D_y P\,d(x,y).$$

Beweis.

$$-\int\limits_A D_y P\,d(x,y) = -\int\limits_a^b \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} D_y P(x,y)\,dy\,dx$$

$$= -\int\limits_a^b \big(P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x))\big)\,dx = \int\limits_a^b P(x,g_1(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,g_2(x))\,dx$$

$$= \int\limits_{C_1} P\,dx + \int\limits_{-C_2} P\,dx.$$

Wegen $\int\limits_{B_1} P\,dx = \int\limits_{B_2} P\,dx = 0$ (die x-Komponenten des Tangentialvektors sind jeweils 0) folgt die Behauptung in 1.). □

Eine analoge Überlegung lässt sich für Normalbereiche bzgl. der y-Achse mit D_x statt D_y durchführen. Dies führt zu folgendem Resultat. [4]

Lemma 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $A \subseteq U$ ein Normalbereich bzgl. der y-Achse und C die positive orientierte stückweise reguläre Randkurve. Dann gilt für jedes $Q \in \mathcal{C}^1(U)$

$$\int\limits_C Q\,dy = \int\limits_A D_x Q\,d(x,y).$$

Korollar

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $P, Q \in \mathcal{C}^1(U)$ und $A \subseteq U$ ein Normalbereich bzgl. beider Achsen, dessen stückweise reguläre Randkurve C entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, so folgt

$$\boxed{\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_A \big(D_x Q - D_y P\big)\,d(x,y)}$$

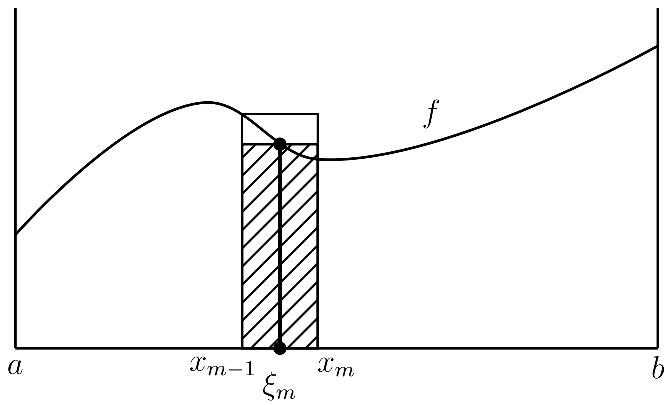
Beweis. Durch Addition der Gleichungen aus Lemma 1 und 2. □

[4] Wobei diesmal kein Minus in der Formel auftritt, weil die zwei nichttrivialen Teilintegrale diesmal von den vertikalen Teilstücken stammen, was bei der Stammfunktionsauswertung des inneren x-Integrals schon die richtigen Vorzeichen für Obergrenze bzw. Untegrenze ergibt. Als Übung selbst!

XI MASS UND INTEGRAL

Ein kurzer Vergleich von Grundideen der Integration:

Riemann (1854):



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_m f(\xi_m) \cdot (x_m - x_{m-1})$$

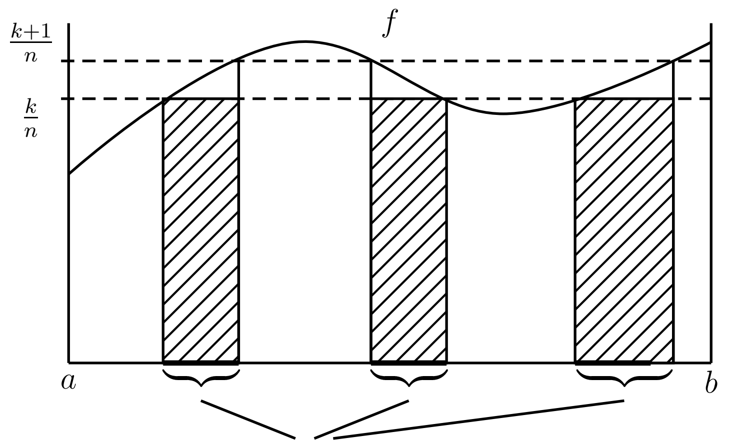
sehr einfache Zerlegung
des Definitionsbereichs

kann bei stark schwankenden
Funktionen unkontrollierbar werden

- braucht starke Bedingungen (z. B. gleichmäßige Konvergenz) für Konvergenz von Integralen
- zusätzlich „uneigentliches Integral“ nötig, um unbeschränkte Integranden oder Bereiche zu erlauben

Lebesgue (1902):

(Der französische Mathematiker Henri Léon Lebesgue (*28. 6. 1875 Beauvais; †26. 7. 1941 Paris) [ɑ̃ˈʁi leˈɔ̃ ləˈbɛɡ] erweiterte den Integralbegriff und begründete so die Maßtheorie.)



$E_{k,n} := \left\{x\colon \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\right\} \subseteq \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \quad \approx \quad \sum_k \frac{k}{n} \cdot \mathrm{Vol}_1(E_{k,n})$$

einfache Werte
für Rechteckshöhe,
d. h. Zerlegung
des Bildbereiches

der „Kompliziertheit“
der Funktion angepasste
Breiten;
$\boxed{!}$ brauche aber
Volumsbegriff (Maß) für
sehr allgemeine Teilmengen

Wir benötigen (wünschen uns) dazu also eine Mengenfunktion

$$\mu\colon \{\text{brauchbare Teilmengen}\} \to [0,\infty]$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (additiv)

oder sogar

(b)$_\infty$ (A_k) Folge disjunkter Mengen: $\mu\Big(\bigcup\limits_k A_k\Big) = \sum\limits_k \mu(A_k)$ (σ-additiv)

und auf $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^n$) speziell noch:

(c) $\mu([a,b]) = b - a$ (bzw. $\mu\Big(\prod\limits_{i=1}^n [a_i,b_i]\Big) = \prod\limits_{i=1}^n (b_i - a_i)$)

(d) $\mu(E + \{t\}) = \mu(E)$ (Translationsinvarianz)

Bemerkung

$$\{\text{brauchbare Mengen}\} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \quad (\text{Potenzmenge von } \mathbb{R}^n)$$

ist unmöglich, wenn (a), $(\mathrm{b})_\infty$, (c), (d) verlangt wird.

(Vitali 1905, Banach-Tarski 1924 [so gen. Maßproblem])

Es ist auch unmöglich zusammen mit Eigenschaft (a), (b), (c), (d) für Dimension $n \geq 3$ und nicht eindeutig für Dimension $n = 1,\ 2$

(Hausdorff 1914, Banach 1923 [so gen. Inhaltsproblem])

Literaturhinweis: Als Gerüst für dieses Kapitel haben wir [Rud05] herangezogen. Für manche Beweisdetails und Ergänzungen seien die ausführlicheren Darstellungen in [BF96] oder [AE01] empfohlen. Für eine Vertiefung und weitere Anwendungen der Maßtheorie (sowie viele historische Anmerkungen) sei zu [Els05] geraten. Wie schon an früherer Stelle angekündigt, weichen wir in der Darstellung der Lebesgueschen Theorie von den Zugängen unserer ebenso empfehlenswerten Standardbegleittexte [For84] und [Heu04] insofern ab, als wir den Maßbegriff zu Grunde legen. Dies hat den Vorteil der breiteren Anwendung, insbesondere z.B. für einen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastik.

33. Inhalte und Maße

Im Folgenden bezeichne stets X eine (beliebige) Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X (das ist die Menge aller Teilmengen von X).

33.1. Definition

1.) Wir nennen $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ einen *Ring* (über X), wenn gilt:

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(b) $A, B \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{R} \quad \text{und} \quad A \setminus B \in \mathcal{R}$

2.) Wir nennen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine *σ-Algebra* (über X), wenn gilt:

(a) $X \in A$

(b) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$

(c) $A_k \in \mathcal{A} \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \Rightarrow \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Wir nennen $(X, \mathcal{A})$ einen *messbaren Raum.*

33.2. Bemerkung

1.) Ist $\mathcal{R}$ ein Ring, $A, B \in \mathcal{R}$, dann folgt

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R};$$

aber i. A. gilt nicht $X \in \mathcal{R}$.

2.) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $A, B \in \mathcal{A}$, so folgt

$$A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cap B)^c \in \mathcal{A}$$

3.) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \in \mathbb{N})$, so folgt

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k = A_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_0 \setminus A_k) \in \mathcal{A};$$

weiters ist $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.

33.3. Definition

1.) Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über X. Eine Abbildung $\mu \colon \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt *Inhalt*, wenn gilt:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $A, B \in \mathcal{R},\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (Additivität)

2.) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X. Eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt *Maß*, wenn gilt:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b)$_\infty$ $A_k \in \mathcal{A}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $A_k \cap A_j = \emptyset$ $(k \neq j)$ impliziert, dass

$$\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \qquad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Wir nennen dann $(X, \mathcal{A}, \mu)$ [oft auch (X, μ) notiert] einen *Maßraum*.
μ ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(X) = 1$ gilt.

33.4. Eigenschaften von Inhalten

0.) Jede σ-Algebra ist auch ein Ring; jedes Maß ist auch ein Inhalt.

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring über X und μ ein Inhalt;

1.) induktiv sieht man leicht: $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R} \Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_m \in \mathcal{R}$.
Wenn zusätzlich $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt, dann folgt

$$\mu\left(A_1 \cup \dots \cup A_m\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_j) \qquad [\mu \text{ ist endlich additiv}].$$

2.) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, dann gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Beweis:

$$B = \underbrace{(B \setminus A) \cup (A \cap B)}, \; A \cup B = \underbrace{A \cup (B \setminus A)},$$
$$\text{(beide: disjunkte Vereinigungen)}$$

daher folgt, wenn wir für B einsetzen,

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \underset{\left[\substack{\text{1. u. 2. Term}\\ \text{zusammen}}\right]}{=} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

3.) Für $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$ folgt

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

(Beweis als Übung selbst.)

4.) Sind $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subseteq B$, dann gilt *Monotonie*, d. h. $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(Beweis als Übung selbst.)

5.) Falls μ σ-additiv ist, $A_k \in \mathcal{R}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ und $A := \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$, dann gilt

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Beweis: setze $B_0 := A_0,\ B_k := A_k \setminus A_{k-1}$ $(k \geq 1)$, dann ist

$$A_k = B_0 \cup \cdots \cup B_k, \text{ somit } A = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k, \text{ wobei } B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j);$$

daher ist $\mu(A_k) = \sum_{j=0}^{k} \mu(B_j)$ und wegen der σ-Additivität auch $\mu(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j)$; dies zeigt die behauptete Limes-Beziehung.

33.5. Einfache Beispiele für Maße

1.) $X = \mathbb{Z},\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}),\ \mu(A) := \sum_{a\in A} 1 =$ Mächtigkeit von $A = |A|$ heißt *Zählmaß*.

2.) X beliebig, $x_0 \in X,\ \mathcal{A} = \mathcal{P}(X),\ \delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & x_0 \in A \\ 0 & x_0 \notin A \end{cases}$

heißt *Dirac-Maß* (konzentriert im Punkt x_0).

34. Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$

34.1. Definition

1.) Seien $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ endliche Intervalle (evtl. auch leer), dann heißt die Produktmenge $\hat{I} := I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ein *Intervall* in $\mathbb{R}^n$.

Wir definieren die Familie von *Elementarmengen* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ wie folgt:

$$\mathcal{E} = \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^n \colon \ \exists \text{ Intervalle } \hat{I}_1, \dots, \hat{I}_N \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } A = \bigcup_{j=1}^{N} \hat{I}_j \right\}$$

($\mathcal{E}$ besteht also aus den endlichen Vereinigungen von Intervallen in $\mathbb{R}^n$)

2.) Wir definieren eine Abbildung $\lambda \colon \mathcal{E} \to [0, \infty[$ wie folgt:

- Für ein Intervall $\hat{I} = \prod_{l=1}^{n} I_l \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $I_l = [a_l, b_l]$ oder $]a_l, b_l]$ oder $[a_l, b_l[$ oder $]a_l, b_l[$ ist

$$\lambda(\hat{I}) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \quad \Big[= \mathrm{Vol}_n(\hat{I})\Big] \tag{34.1}$$

- Für $A = \hat{I}_1 \cup \hat{I}_2 \cup \cdots \cup \hat{I}_N \in \mathcal{E}$, wobei $\hat{I}_j$ ein Intervall in $\mathbb{R}^n$ ist $(j = 1, \dots, N)$ und $\hat{I}_i \cap \hat{I}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$, setzen wir

$$\lambda(A) := \lambda(\hat{I}_1) + \cdots + \lambda(\hat{I}_N). \tag{34.2}$$

- Für allgemeines $A \in \mathcal{E}$ zeigen wir in der folgenden Proposition, dass der Wert von $\lambda(A)$ aus obigem schon wohldefiniert ist.

34.2. Proposition

1.) Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt: A ist endliche Vereinigung *disjunkter* Intervalle in $\mathbb{R}^n$.

2.) $\mathcal{E}$ ist ein Ring über $\mathbb{R}^n$.

3.) Ist $A \in \mathcal{E}$, so ist der Wert von $\lambda(A)$ gemäß (34.2) wohldefiniert, d. h. unabhängig von der disjunkten Zerlegung in Intervalle.

4.) λ ist ein Inhalt auf $\mathcal{E}$.

5.) In folgendem Sinne ist λ *regulär*: Ist $A \in \mathcal{E}$, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $F \in \mathcal{E}$ und eine offene Menge $G \in \mathcal{E}$ mit den Eigenschaften

$$F \subseteq A \subseteq G \qquad \text{und} \qquad \lambda(G) - \varepsilon \leq \lambda(A) \leq \lambda(F) + \varepsilon$$

(d. h. Approximation durch kompakte Mengen von innen und durch offene Mengen von außen).

Beweisskizze (in VO ausgelassen):

ad 1.) leicht zu sehen: Sind $\hat{I}, \hat{J}$ Intervalle in $\mathbb{R}^n$, dann ist $\hat{I} \cap \hat{J}$ ein Intervall und $\hat{J} \setminus \hat{I} \in \mathcal{E}$.

Sei nun $A \in \mathcal{E}$ gegeben durch $A = \bigcup_{j=1}^{N} \hat{I}_j$, wobei $\hat{I}_1, \ldots, \hat{I}_N$ Intervalle sind; dann schreiben wir A als disjunkte Vereinigung um:

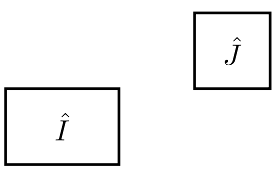
$$A = \hat{I}_1 \cup (\hat{I}_2 \setminus \hat{I}_1) \cup (\hat{I}_3 \setminus (\hat{I}_1 \cup \hat{I}_2)) \cup \cdots \cup \left(\hat{I}_N \setminus \bigcup_{l=1}^{N-1} \hat{I}_l \right)$$

Daher genügt es, die Behauptung 1.) für Mengen der Form $\hat{I} \setminus \left(\hat{J}_1 \cup \cdots \cup \hat{J}_m \right)$ zu zeigen, wobei $\hat{I}, \hat{J}_1, \ldots, \hat{J}_m$ Intervalle in $\mathbb{R}^n$ sind. Es ist

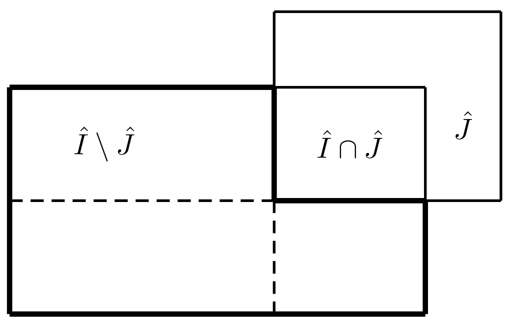
$$\hat{I} \setminus \left(\hat{J}_1 \cup \cdots \cup \hat{J}_m \right) = \bigcap_{i=1}^{m} \left(\hat{I} \setminus \hat{J}_i \right);$$

daher reicht es sogar aus, $m = 1$ anzunehmen; d. h. seien $\hat{I}, \hat{J}$ Intervalle in $\mathbb{R}^n$; zu zeigen: $\hat{I} \setminus \hat{J}$ ist eine endliche Vereinigung disjunkter Intervalle.

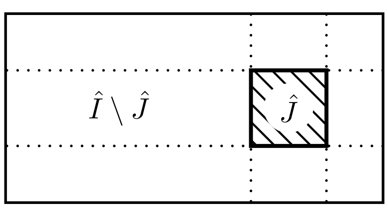
Bildlich in $\mathbb{R}^2$:



oder



oder



$\hat{I} \setminus \hat{J} =$ disjunkte Vereinigung von maximal $8 = 3^2 - 1$ Intervallen

Allgemein im $\mathbb{R}^n$: $\hat{I} \setminus \hat{J}$ =disjunkte Vereinigung von maximal $3^n - 1$ Intervallen

ad 2.) $\emptyset = \emptyset \times I_2 \times \cdots \times I_n$ ist ein Intervall, also $\emptyset \in \mathcal{E}$;

$$A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E},$$

weil das wieder eine endliche Vereinigung von Intervallen ist;

noch zu zeigen: $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{E}$

Sei $A = \bigcup_{i=1}^{N} \hat{I}_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{M} \hat{J}_j$ mit den Intervallen $\hat{I}_i,\ \hat{J}_j$;

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{N} \left(\bigcap_{j=1}^{M} \left(\hat{I}_i \setminus \hat{J}_j \right) \right)$$

Wir wissen aus 1.), dass $\hat{I}_i \setminus \hat{J}_j \in \mathcal{E}$; daher genügt es, zu zeigen, dass mit $C, D \in \mathcal{E}$ auch $C \cap D$ wieder in $\mathcal{E}$ ist.

(dann folgt dies für endliche Durchschnitte induktiv)

Ist also $C = \bigcup_{i=1}^{N'} \hat{I}'_i, \quad D = \bigcup_{j=1}^{M'} \hat{J}'_j$, dann gilt

$$C \cap D = \bigcup_{\substack{1 \le i \le N' \\ 1 \le j \le M'}} \left(\hat{I}'_i \cap \hat{J}'_j \right),$$

wobei gemäß dem Beweis von 1.) stets stets $\hat{I}'_i \cap \hat{J}'_j$ ein Intervall ist. Somit ist $C \cap D \in \mathcal{E}$, weil es sich um eine endliche Vereinigung von Intervallen handelt.

ad 3.) Sei $A \in \mathcal{E}$; wegen 1.) ist A überhaupt darstellbar als disjunkte Vereinigung endlich vieler Intervalle; seien zwei solche Darstellungen gegeben, d. h.

$$A = \hat{I}_1 \cup \cdots \cup \hat{I}_m = \hat{J}_1 \cup \cdots \cup \hat{J}_N,$$

wobei $\hat{I}_i, \hat{J}_j \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le N)$ Intervalle sind und $\hat{I}_i \cap \hat{I}_l = \emptyset \quad (i \ne l), \quad \hat{J}_j \cap \hat{J}_k = \emptyset \quad (j \ne k)$; es ist

$$\hat{I}_i = \hat{I}_i \cap A = \hat{I}_i \cap \left(\hat{J}_1 \cup \cdots \cup \hat{J}_N \right) = \bigcup_{k=1}^{N} \left(\hat{I}_i \cap \hat{J}_k \right)$$

... endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen

und analog

$$\hat{J}_j = \bigcup_{l=1}^{m} \left(\hat{I}_l \cap \hat{J}_j \right)$$

... endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen

Hilfsbehauptung:

3.) gilt, wenn A ein Intervall ist.

(Beweis induktiv: zunächst Schnitt entlang einer Hyperebene senkrecht auf eine Koordinatenachse $\rightsquigarrow$ 2 Teile; dann endlich viele solcher Hyperebenenschnitte)

Aus der Hilfsbehauptung folgt nun

$$\lambda\left(\hat{I}_i\right) = \sum_{k=1}^{N} \lambda\left(\hat{I}_i \cap \hat{J}_k\right) \quad \text{und} \quad \lambda\left(\hat{J}_j\right) = \sum_{l=1}^{m} \lambda\left(\hat{I}_l \cap \hat{J}_j\right)$$

Somit ist

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda\left(\hat{I}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{N} \lambda\left(\hat{I}_i \cap \hat{J}_k\right) = \sum_{k=1}^{N}\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda\left(\hat{I}_i \cap \hat{J}_k\right)}_{\lambda(\hat{J}_k)} = \sum_{k=1}^{N} \lambda\left(\hat{J}_k\right),$$

also ist $\lambda(A)$ durch jede der beiden Summen $\sum \lambda(\hat{I}_i)$ bzw. $\sum \lambda(\hat{J}_k)$ wohldefiniert.

ad 4.) $\lambda(\emptyset) = 0$, weil $\emptyset$ ein Intervall mit Vol $= 0$ ist;

Additivität: Seien $A, B \in \mathcal{E}$ disjunkt mit Darstellung als endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} \hat{I}_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{M} \hat{J}_j \Rightarrow A \cup B = \hat{I}_1 \cup \cdots \cup \hat{I}_N \cup \hat{J}_1 \cup \cdots \cup \hat{J}_M$$

ist ebenfalls eine disjunkte Vereinigung von Intervallen

$$\Rightarrow \lambda(A \cup B) = \sum_{i=1}^{N} \lambda\left(\hat{I}_i\right) + \sum_{j=1}^{M} \lambda\left(\hat{J}_j\right) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

ad 5.) Zunächst für ein Intervall $\hat{I} = I_1 \times \cdots \times I_n$, wobei für $j = 1, \ldots, n$:

$$I_j =]a_j, b_j[\text{ oder } [a_j, b_j[\text{ oder }]a_j, b_j] \text{ oder }]a_j, b_j[;$$

wir setzen

$$F := \prod_{j=1}^{n} \left[a_j + \frac{\delta}{2}, b_j - \frac{\delta}{2}\right], \quad G := \prod_{j=1}^{n} \left]a_j - \frac{\delta}{2}, b_j + \frac{\delta}{2}\right[,$$

wobei $\delta > 0$ (und $\delta < \frac{1}{2} \cdot \min(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$);

F ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt; G ist offen und $F \subseteq \hat{I} \subseteq G$;

$$\lambda(G) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j + \delta) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) + \delta \cdot r_G = \lambda\left(\hat{I}\right) + \delta \cdot r_G$$

$$\lambda(F) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j - \delta) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j) - \delta \cdot r_F = \lambda\left(\hat{I}\right) - \delta \cdot r_F$$

wobei $r_G, r_F \geq 0$ und beschränkt für $\delta \to 0$; daher ist

$$\lambda(G) - \delta \cdot r_G \leq \lambda\left(\hat{I}\right) \leq \lambda(F) + \delta \cdot r_F,$$

die Regularitätsbedingung ist also erfüllbar für $\delta \cdot \max(r_G, r_F) < \varepsilon$;

allgemeiner Fall: $A = \hat{I}_1 \cup \cdots \cup \hat{I}_N$, wobei $\hat{I}_j$ ein Intervall und $\hat{I}_i \cap \hat{I}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$ ist; wegen der Additivität folgt dann die Regularitätsbedingung für A.

□

34.3. Lemma

Für jede Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathcal{U}(E) := \left\{ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Folge offener Mengen in } \mathcal{E}\colon E \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \right\}$$

und

$$\lambda^*(E) := \inf\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\left(A_k\right) : \ (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(E) \right\}. \tag{34.3}$$

Dann gilt:

1.) $\lambda^*(E) \geq 0$

2.) $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \lambda^*(E_1) \leq \lambda^*(E_2)$

3.) $\forall A \in \mathcal{E}\colon \lambda^*(A) = \lambda(A)$ (λ^* ist Erweiterung von λ)

4.) Ist $E = \bigcup_{l=0}^{\infty} E_l$, dann folgt $\lambda^*(E) \leq \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^*(E_l)$ (Subaddivität)

$\lambda^*\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ heißt *äußeres Lebesgue-Maß* (ist aber kein Maß!).

Beweis. 1.) und 2.) sind klar aus der Definition von λ^*.
3.) Sei $A \in \mathcal{E}$; aus der Regularität von λ [nach 34.2,5.)] folgt:
Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es offenes $G \in \mathcal{E}$ mit $G \supseteq A$ und kompaktes $F \in \mathcal{E}$ mit $F \subseteq A$, sodass

$$\lambda(G) \leq \lambda(A) + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \lambda(A) \leq \lambda(F) + \varepsilon$$

- Daher folgt nach Definition von λ^* unmittelbar: $\lambda^*(A) \leq \lambda(A)$
- Man wähle eine Folge (A_k) in $\mathcal{E}$, A_k offen mit $\bigcup_k A_k \supseteq A$ und

  $$\sum_k \lambda(A_k) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon \qquad \text{[Definition des Supremums]}$$

  Es ist $F \subseteq A \subseteq \bigcup_k A_k$, daher $\exists N \in \mathbb{N}\colon F \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_N$ [F ist kompakt!]

  $$\Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda(F) + \varepsilon \leq \lambda(A_1 \cup \cdots \cup A_N) + \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{N} \lambda(A_j) + \varepsilon \leq \lambda^*(A) + 2\varepsilon$$

  $$\Rightarrow \lambda(A) \leq \lambda^*(A); \quad \text{insgesamt die Gleichung in 3.)}$$

4.) • Falls es ein k mit $\lambda^*(E_k) = \infty$ gibt, dann folgt wegen 2.) auch $\lambda^*(E) = \infty$, also ist die behauptete Ungleichung trivial erfüllt.
• Zweiter Fall: Für alle k sei $\lambda^*(E_k) < \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $\left(A_{k_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ von E_k durch offene Mengen $A_{k_j} \in \mathcal{E}$ mit

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda\left(A_{k_j}\right) \leq \lambda^*\left(E_k\right) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Daher folgt $E \subseteq \bigcup\limits_k \bigcup\limits_j A_{kj}$ und

$$\lambda^*(E) \leq \sum_k \sum_j \lambda\left(A_{k_j}\right) \leq \sum_k \left(\lambda^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) \leq$$

$$= \sum_k \lambda^*\left(E_k\right) + \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_k \lambda^*\left(E_k\right) + \varepsilon$$

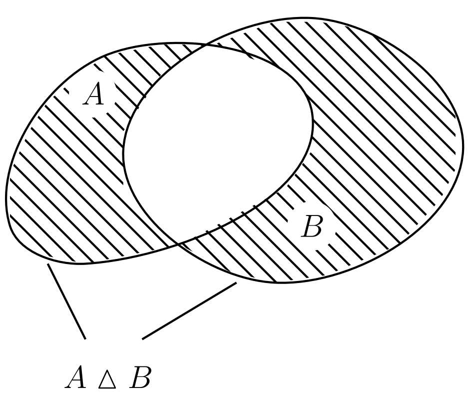
□

34.4. Lebesgue-messbare Mengen

Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B und



$$d(A,B) := \lambda^*(A \triangle B)$$

(eine Art Maß, um wieviel „Volumen" sich A und B unterscheiden)

Definition

Sei (A_k) eine Folge mit $A_k \subseteq \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$; wir schreiben

$$A_k \to A \quad (k \to \infty), \quad \text{falls} \quad \lim_{k\to\infty} d(A_k, A) = 0.$$

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *endlich λ-messbar* (oder *endlich Lebesgue-messbar*), falls gilt: Es gibt eine Folge (A_k) mit $A_k \in \mathcal{E}$, so dass $A_k \to A \quad (k \to \infty)$.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt λ-*messbar* (oder *Lebesgue-messbar*, kurz L-messbar), falls A die Vereinigung einer abzählbaren Familie von endlich λ-messbaren Mengen ist.
Wir bezeichnen die Menge aller endlich L-messbaren Mengen mit $\mathcal{M}_f(\lambda)$, die Menge aller L-messbaren Mengen mit $\mathcal{M}(\lambda)$.

Bemerkung und grundlegende Eigenschaften:

1.) $A \vartriangle B = B \vartriangle A, \quad A \vartriangle A = \emptyset$

2.) $A \vartriangle B \subseteq (A \vartriangle C) \cup (C \vartriangle B)$
(verwende $A \setminus B \subseteq (A \setminus C) \cup (C \setminus B), \quad B \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cup (B \setminus C)$)

3.)
$$\left.\begin{array}{l} (A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \\ (A_1 \cap A_2) \vartriangle (B_1 \cap B_2) \\ (A_1 \setminus A_2) \vartriangle (B_1 \setminus B_2) \end{array}\right\} \subseteq (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$$
(Beweis elementar, wenn auch umständlich)

1.)′ $d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, A) = 0$

2.)′ $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

3.)′
$$\left.\begin{array}{l} d(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 \setminus A_2\ B_1 \setminus B_2) \end{array}\right\} \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$$

4.) Falls $\lambda^*(A) < \infty$ oder $\lambda^*(B) < \infty$, dann gilt
$$|\lambda^*(A) - \lambda^*(B)| \leq d(A, B)$$

Beweis: OBdA $0 \leq \lambda^*(B) \leq \lambda^*(A)$, d. h. $\lambda^*(B) < \infty$; es ist
$$\underbrace{d(A, \emptyset)}_{=\lambda^*(A)} \leq d(A, B) + \underbrace{d(B, \emptyset)}_{=\lambda^*(B)} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\lambda^*(A) - \lambda^*(B)}_{\geq 0} \leq d(A, B)$$

$\square$

5.) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abzählbar, so ist $\lambda^*(A) = 0$.

Beweis: Sei $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$; wähle offene Intervalle I_k mit $a_k \in I_k$ und $\lambda(I_k) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$
$$\Rightarrow \quad A \subseteq \bigcup_k I_k, \quad \lambda^*(A) \leq \sum_k \lambda(I_k) \leq \varepsilon.$$

Bemerkung: in diesem Fall ist $d(A, \emptyset) = 0$, obwohl $A \neq \emptyset$ ist.

Daher ist d nur fast eine Metrik auf $\mathcal{M}_f(\lambda)$. Wir könnten zu Äquivalenzklassen übergehen, um die Metrikeigenschaften zu erzwingen (d. h. $A \sim B$, falls $d(A, B) = 0$).

6.) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen, so folgt $A \in \mathcal{M}(\lambda)$.

Beweis: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist abzählbare Vereinigung offener Intervalle (Ausschöpfung durch kleine offene Intervalle mit rationalen Mittelpunkten und rationalen Intervalllängen; jede abgeschlossene Menge ist das Komplement von offenen Mengen, dann ist Theorem 34.5 [s. unten] anwendbar).

7.) Ist $A \in \mathcal{M}(\lambda)$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt: Es gibt eine offene Menge G und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subseteq A \subseteq G$ so, dass

$$\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$$

aus Definition von λ^* und $\mathcal{M}(\lambda)$

durch Übergang zum Komplement (und Theorem 34.5)

8.) Ist $\lambda^*(E) = 0$, so heißt E eine *Lebesgue-Nullmenge* und es gilt $E \in \mathcal{M}_f(\lambda)$.

Beweis: Wegen $\lambda^*(E) = 0$ gilt: Für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, gibt es eine Folge $\left(A_l^{(k)}\right)_l$ von offenen Mengen in $\mathcal{E}$ mit $E \subseteq \bigcup\limits_l A_l^{(k)}$ und $\sum\limits_l \lambda\left(A_l^{(k)}\right) < \frac{1}{k}$; mit $B_k := \bigcup_l A_l^{(k)}$ ist daher

$$d(E, B_k) \leq d(E, \emptyset) + d(\emptyset, B_k) = \underbrace{\lambda^*(E)}_{0} + \lambda^*(B_k) \leq \sum_l \lambda\left(A_l^{(k)}\right) < \frac{1}{k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

□

- Jede abzählbare Menge ist eine L-Nullmenge (siehe 5.))
- Es gibt $E \subseteq \mathbb{R}^n$ überabzählbar mit $\lambda^*(E) = 0$.
  (ein prominentes Beispiel in $\mathbb{R}$ ist das so genannte Cantorsche Diskontinuum)

34.5. Theorem

1.) $\mathcal{M}(\lambda)$ ist eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$.

2.) $\lambda^*\big|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ ist ein Maß; wir bezeichnen es wieder mit λ und nennen es das *Lebesgue-Maß*.

Beweis. 1. Schritt: $\mathcal{M}_f(\lambda)$ ist ein Ring und $\lambda^*\big|_{\mathcal{M}_f(\lambda)}$ ein Inhalt.

Seien $A, B \in \mathcal{M}_f(\lambda)$ und $A_k, B_k \in \mathcal{E}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $A_k \to A$, $B_k \to B$, dann folgt aus 34.4, 3.)$'$ und 4.)

$$A_k \cup B_k \to A \cup B, \quad A_k \cap B_k \to A \cap B, \quad A_k \setminus B_k \to A \setminus B, \quad \lambda^*(A_k) \to \lambda^*(A)$$

Außerdem ist für $\mathcal{E} \ni C_k \to C$ stets

$$\lambda^*(C) = d(C,\emptyset) \le d(C,C_N) + d(C_N,\emptyset) = d(C,C_N) + \lambda^*(C_N) \underset{\left[\begin{smallmatrix} N \text{ groß,} \\ d(C,C_N)\to 0\end{smallmatrix}\right]}{<} 1 + \lambda^*(C_N) < \infty$$

Daher ist $\mathcal{M}_f(\lambda)$ ein Ring; für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\lambda(A_k) + \lambda(B_k) = \lambda(A_k \cup B_k) + \lambda(A_k \cap B_k) \quad [33.4, 3.)]$$

$$\Big\downarrow \qquad\qquad \Big\downarrow \; (k\to\infty)$$

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B)$$

Falls $A \cap B = \emptyset$ ist, so folgt daraus wegen $\lambda^*(A\cap B) = 0$ die Additivität von $\lambda^*\big|_{\mathcal{M}_f(\lambda)}$.

2. Schritt: $A \in \mathcal{M}(\lambda)$ und $\lambda^*(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{M}_f(\lambda)$

- Zunächst kann A als abzählbare Vereinigung von *disjunkten* Mengen aus $\mathcal{M}_f(\lambda)$ geschrieben werden: Ist nämlich $A = \bigcup\limits_k A'_k$ mit $A'_k \in \mathcal{M}_f(A)$, so setzen wir

  $$A_0 := A'_0,\; A_k := \underbrace{\left(\bigcup_{j=0}^{k} A'_j\right) \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} A'_j\right)}_{\in \mathcal{M}_f(A) \text{ nach Schritt 1}} \quad (j \ge 1).$$

  Es ist $A = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ eine disjunkte Vereinigung mit $A_k \in \mathcal{M}_f(\lambda)$.
- Aus 34.3, 4.) folgt $\lambda^*(A) \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A_k)$; andererseits ist

  $$A \supseteq \underbrace{A_0 \cup \cdots \cup A_N}_{\in \mathcal{M}_f(\lambda) \text{ und } \lambda^*|_{\mathcal{M}_f(\lambda)} \text{ additiv}} \qquad \forall N \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \lambda^*(A) \ge \lambda^*(A_0 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^*(A_k)$$

  Mit $N \to \infty$ folgt insgesamt $\lambda^*(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^*(A_k)$. $(*)$
- Laut Voraussetzung ist $\lambda^*(A) < \infty$; setze $B_m := A_0 \cup \cdots \cup A_m$, dann gilt

  $$d(A,B_m) = \lambda^*(A \bigtriangleup B_m) \underset{[B_m \subseteq A]}{=} \lambda^*(A \setminus B_m) =$$

  $$= \lambda^*\left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} A_j\right) \underset{[\text{wie für } A=\bigcup A_k]\ (*)}{=} \sum_{j=m+1}^{\infty} \lambda^*(A_j) \to 0 \quad (m \to \infty),$$

  weil $\sum\limits_k \lambda^*(A_k)$ (absolut) konvergiert (in $(*)$). Daher gilt

  $$B_m \to A \quad (m \to \infty); \qquad B_m \in \mathcal{M}_f(\lambda)$$

- Für $m \in \mathbb{N}$ sei $\left(B_j^{(m)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $B_j^{(m)} \to B_m \quad (j \to \infty)$; für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $k_m \geq m$, sodass für alle $j \geq k_m$ stets $d(B_j^{(m)}, B_m) < \frac{1}{m}$ ist; setze $C_m := B_{k_m}^{(m)} \quad (m \in \mathbb{N})$; $C_m \in \mathcal{E}$

  Behauptung: $C_m \to A \quad (m \to \infty)$ (dann fertig, weil $A \in \mathcal{M}_f(\lambda)$ folgt)
  Sei $\varepsilon > 0$: $\exists N : \forall m \geq N : d(A, B_m) < \frac{\varepsilon}{2}$;
  sei N_1 so groß, dass für alle $m \geq N_1$ stets $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ ist; sei $m \geq \max(N, N_1)$

$$\Rightarrow d(A, C_m) = d(A, B_{k_m}^{(m)}) \leq d(A, B_m) + d(B_m, B_{k_m}^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. Schritt: $\mathcal{M}(\lambda)$ ist eine σ-Algebra (damit folgt 1.))

- $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^*} [-k,k]^n$, wobei $W_k := [-k,k]^n \in \mathcal{E}$, also ist $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}(\lambda)$.
- Ist $A_k \in \mathcal{M}(\lambda)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $A := \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$, so gilt: Zu jedem k gibt es eine Folge $\left(A_l^{(k)}\right)_l$ in $\mathcal{M}_f(\lambda)$ mit $A_k = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} A_l^{(k)}$; daher ist $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} A_l^{(k)}$ … abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{M}_f(\lambda)$, daher ist $A \in \mathcal{M}(\lambda)$.
- Ist $A \in \mathcal{M}(\lambda)$, $A = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{M}_f(\lambda)$, so folgt

$$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (W_k \setminus A)$$

Behauptung: $W_k \setminus A \in \mathcal{M}_f(\lambda)$ (dann fertig, weil $A^c \in \mathcal{M}(\lambda)$ folgt)

$$W_k \setminus A = W_k \setminus (W_k \cap A)$$

Dabei ist $W_k \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_f(\lambda)$, es genügt also, zu zeigen, dass $W_k \cap A \in \mathcal{M}_f(\lambda)$:

$$W_k \cap A = \bigcup_i \underbrace{(W_k \cap A_i)}_{\in\mathcal{E}} \in \mathcal{M}(\lambda)$$

Außerdem ist $\lambda^*(W_k \cap A) \leq \lambda^*(W_k) = (2k)^n < \infty$, daher gilt nach Schritt 2 auch $W_k \cap A \in \mathcal{M}_f(\lambda)$.

4. Schritt: $\lambda^*\big|_{\mathcal{M}(\lambda)}$ ist σ-additiv (womit 2.) folgt).

Sei $A_k \in \mathcal{M}(\lambda) \quad (k \in \mathbb{N})$, $\quad A := \bigcup_k A_k$, $\quad A_k \cap A_i = \emptyset \quad (k \neq i)$

- Falls $\lambda^*(A_l) = \infty$ für ein l ist, so folgt $\lambda^*(A) = \infty$ und $\sum\limits_k \lambda^*(A_k) = \infty$, d. h. die Gleichung gilt trivialerweise.

- Falls $\lambda^*(A_k) < \infty$ für alle k ist, dann gilt nach Schritt 2, dass $A_k = \bigcup_k A_j^{(k)}$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen $A_j^{(k)} \in \mathcal{M}_f(\lambda)$ ist; folglich ist $A = \bigcup_k \bigcup_j A_j^{(k)}$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen in $\mathcal{M}_f(\lambda)$.

$$\overset{[(*),\text{ Schritt 2}]}{\Longrightarrow} \lambda^*(A) = \sum_k \sum_j \lambda^*\left(A_j^{(k)}\right) = \sum_k \lambda^*(A_k)$$

□

34.6. Bemerkung

Das Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert den Begriff des *n-dimensionalen Volumens*, den wir in §27 für kompakte Mengen eingeführt hatten (beachte: ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist nach 34.4,6.) $K \in \mathcal{M}(\lambda)$, und $\int_K 1\,dx = \lambda(K)$ folgt dann aus der Lebesgue-Integrationstheorie [vgl. weiter unten]); außerdem ist λ *translationsinvariant*, d. h. $\lambda(A + \{\xi\}) = \lambda(A)$; für Intervalle folgt das laut Formel (35.1) und daher leicht für Mengen aus $\mathcal{E}$; mittels Regularitätseigenschaften 34.2,5.) und 34.4,7.) kann diese Eigenschaft auf ganz $\mathcal{M}(\lambda)$ nachgewiesen werden (ohne Details, einfacher ist dies mit allgemeineren Methoden der Maßtheorie [z.B. über Bildmaße]).
Das Lebesgue-Maß ist durch die Eigenschaften $\lambda([0,1]^n) = 1$ und Translationsinvarianz als Maß auf $\mathcal{M}(\lambda)$ sogar schon eindeutig bestimmt (es genügt dafür übrigens auch schon die kleinere σ-Algebra der Borel-Mengen [ohne Beweis]).

35. Messbare Funktionen und Integral

In diesem Abschnitt sei wieder X eine beliebige Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, d. h. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein *Maßraum*.
Der für uns wichtigste Spezialfall ist natürlich $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\lambda)$ mit dem Lebesgue-Maß λ, aber alle Konstruktionen und Sätze in diesem und dem folgenden Abschnitt gelten in einem beliebigen Maßraum; nichts würde dabei einfacher, wenn wir uns auf das Lebesgue-Maß beschränkten.

35.1. Definition

Wir nennen die Mengen $A \in \mathcal{A}$ *messbare Mengen* in X (oder μ-*messbare Mengen*).

35.2. Proposition

Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

1.) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X\colon f(x) > a\}$ messbar.

2.) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X\colon f(x) \geq a\}$ messbar.

3.) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X\colon f(x) < a\}$ messbar.

4.) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X\colon f(x) \leq a\}$ messbar.

Beweis

1.) $\Rightarrow$ 2.)**:** $\{x\colon f(x) \geq a\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{x\colon f(x) > a - \frac{1}{k}\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

2.) $\Rightarrow$ 3.)**:** $\{x\colon f(x) < a\} = X \setminus \underbrace{\{x\colon f(x) \geq a\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

3.) $\Rightarrow$ 4.)**:** $\{x\colon f(x) \leq a\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{x\colon f(x) < a + \frac{1}{k}\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

4.) $\Rightarrow$ 1.)**:** $\{x\colon f(x) > a\} = X \setminus \underbrace{\{x\colon f(x) \leq a\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

$\square$

35.3. Definition

Wir nennen $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine *messbare Funktion*, falls eine der vier äquivalenten Bedingungen in Proposition 35.2 erfüllt ist.

35.4. Beispiele

1.) Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) > a\}$ offen, also nach 34.4,6.) Lebesgue-messbar. Somit ist jede stetige Funktion messbar bzgl. $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet.

2.) Sei $E \subseteq X$ und $\mathbb{1}_E$ die charakteristische Funktion von E). Dann gilt:

$$\mathbb{1}_E \text{ ist messbar} \iff E \in \mathcal{A}.$$

Beweis: Es ist $\mathbb{1}_E(x) = 1$ für $x \in E$ und $\mathbb{1}_E(x) = 0$ für $x \notin E$, daher gilt

$$\{x \in X\colon \mathbb{1}_E(x) > a\} = \begin{cases} E & 0 \le a < 1 \\ \emptyset & a \ge 1 \\ X & a < 0, \end{cases}$$

was in jedem Fall eine messbare Menge ergibt.

3.) Sei $S\colon X \to \mathbb{R}$ eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen messbarer Mengen, d. h.

$$S(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \mathbb{1}_{E_j}(x),$$

wobei $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ und $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{A}$. Dann ist S messbar (wie man z.B. direkt durch eine einfache Fallunterscheidung sieht; alternativ können wir uns auf die Eigenschaften messbarer Funktionen in 35.5 berufen). Wir nennen S eine *Treppenfunktion*.

35.5. Eigenschaften messbarer Funktionen

1.) Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so ist auch $|f|$ messbar.

Beweis: $\{x\colon |f(x)| < a\} = \{x\colon f(x) < a\} \cap \{x\colon -f(x) < a\}$.

2.) Ist für $k \in \mathbb{N}$ jeweils $f_k\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann sind die Funktionen

$$g(x) := \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \quad \text{und} \quad h(x) := \limsup_{k\to\infty} f_k(x)$$

ebenfalls messbar (analog für inf bzw. lim inf).

Beweis: $\{x\colon g(x) > a\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\{x\colon f_k(x) > a\}}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, also ist g messbar (analog für das Infimum); weiters gilt $h(x) = \inf_m g_m(x)$, wobei $g_m(x) := \sup_{k\ge m} f_k(x)$ messbar ist.

3.) Speziell folgt aus 2.): sind f, g messbar, so sind auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ messbar.

Insbesondere gilt: ist f messbar, so auch

$$f^+ := \max(f, 0) \quad \text{und} \quad f^- := -\min(f, 0). \tag{35.1}$$

4.) Punktweise Limiten messbarer Funktionen sind messbar! (folgt direkt aus 2.).)

5.) Sind $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ messbar und $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, dann definiert

$$h(x) := F(f(x), g(x)) \quad (x \in X)$$

eine messbare Funktion $h\colon X \to \mathbb{R}$. Insbesondere sind $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ und $f \cdot g$ ebenfalls messbar.

Beweis: Es sei $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $G_a := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2\colon F(y,z) > a\}$ ist offen, folglich gibt es (nach demselben Ausschöpfungsargument wie in 34.4, Bemerkung 6.)) eine Folge von Intervallen $\hat{I}_k$ in $\mathbb{R}^2$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $G_a = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \hat{I}_k$.

Sei $\hat{I}_k =]a_k, b_k[\times]c_k, d_k[\quad (k \in \mathbb{N})$; es gilt

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon \{x \in X\colon a_k < f(x) < b_k\} = \underbrace{\underbrace{\{x\colon f(x) > a_k\}}_{\in\mathcal{A}} \cap \underbrace{\{x\colon f(x) < b_k\}}_{\in\mathcal{A}}}_{\in\mathcal{A}}$$

und ebenso $\{x \in X\colon c_k < g(x) < d_k\} \in \mathcal{A}$; somit ist

$$\{x \in X\colon (f(x), g(x)) \in \hat{I}_k\} = \underbrace{\{x\colon a_k < f(x) < b_k\}}_{\text{messbar}} \cap \underbrace{\{x\colon x_k < g(x) < d_k\}}_{\text{messbar}}$$

messbar und folglich auch

$$\{x \in X\colon h(x) > a\} = \{x\colon (f(x), g(x)) \in G_a\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x\colon (f(x), g(x)) \in \hat{I}_k\}$$

messbar. □

35.6. Proposition

Sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann gibt es eine Folge (S_k) von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert, d. h. für alle $x \in X$ gilt $S_k(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$.
Falls $f \geq 0$ ist, so kann (S_k) monoton wachsend und nichtnegativ gewählt werden.

Beweis. Sei zunächst $f \geq 0$; wir definieren für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, und $j = 1, 2, \ldots, k \cdot 2^k$

$$E_{kj} := \Big\{x \in X\colon \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\Big\} \quad \text{und} \quad F_k := \{x \in X\colon f(x) \geq k\}.$$

Es sind $E_{kj}, F_k \in \mathcal{A}$, weil f messbar ist; nun sei

$$S_k(x) := \underbrace{\sum_{j=1}^{k\cdot 2^k} \frac{j-1}{2^k} \cdot \mathbb{1}_{E_{kj}}(x)}_{\substack{\text{in } f^{-1}([0,k[) \text{ feine} \\ \text{Unterteilung des Bildbereichs;} \\ \text{punktweise immer besser}}} + \underbrace{k \cdot \mathbb{1}_{F_k}(x).}_{\substack{\text{in } f^{-1}([k,\infty[) \text{ grobe} \\ \text{Approximation} \\ \text{durch den Wert } k}}$$

Dann folgt nach Konstruktion

$$\forall x \in X\colon \quad S_k(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$$

(ist nämlich $f(x) < \infty$ und k groß, so ist $x \in [0, k[$ und $|S_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^k}$; andernfalls ist $f(x) = \infty = \lim_{k\to\infty} k$).
Weiters ist $S_k(x)$ monoton wachsend (bzgl. k bei festem x).

Für allgemeines f schreiben wir einfach $f = f^+ - f^-$ (es ist ja $f^+, f^- \geq 0$) und verwenden jeweils eine Approximation von f^+, f^- wie oben. □

35.7. Definition

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathcal{A}$.

1.) Für eine Treppenfunktion $S = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j \mathbb{1}_{E_j}$ mit $c_j \geq 0$, $E_j \in \mathcal{A}$ $(j = 1, \ldots, N)$ ist das μ-*Integral* von S über E definiert durch

$$\int\limits_E S \, d\mu = \int\limits_E S(x) \, d\mu(x) := \sum_{j=1}^{N} c_j \, \mu\,(E \cap E_j)\,. \tag{35.2}$$

(Anmerkung: Wir überspringen den [Routine-]Beweis dafür, dass der Wert rechts unabhängig von der Darstellung von S ist, d. h.

$$S = \sum_{l=1}^{M} d_l \, \mathbb{1}_{F_l} = \sum_{j=1}^{N} c_j \, \mathbb{1}_{E_j} \quad \Rightarrow \quad \sum_{l} d_l \, \mu(E \cap F_l) = \sum_{j} c_j \, \mu(E \cap E_j);$$

indem wir z. B. zu Durchschnitten $F_l \cap E_j \in \mathcal{A}$ übergehen …)

2.) Für eine messbare Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f \geq 0$ definieren wir

$$\int\limits_E f \, d\mu = \int\limits_E f(x) \, d\mu(x) \tag{35.3}$$

$$:= \sup\{\int\limits_E S \, d\mu\colon S \text{ ist Treppenfunktion mit } 0 \leq S \leq f\}$$

als μ-*Integral* von f über E; es ist $\int_E f \, d\mu \in [0, \infty]$.

3.) Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $\int_E f^+ \, d\mu < \infty$ <u>oder</u> $\int_E f^- \, d\mu < \infty$, dann setzen wir

$$\int\limits_E f \, d\mu := \int\limits_E f^+ \, d\mu - \int\limits_E f^- \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}} \tag{35.4}$$

(mit den Rechenregeln $\infty - r = \infty$ und $r - \infty = -\infty$).

4.) Ist $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit der Eigenschaft, dass $\int_E f^+ \, d\mu < \infty$ <u>und</u> $\int_E f^- \, d\mu < \infty$, so nennen wir f *auf* E *bezüglich* μ *integrierbar*; es ist dann $\int_E f \, d\mu \in \mathbb{R}$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(E, \mu)$ die Menge der auf E μ-integrierbaren Funktionen.

Bemerkung: Oft wird das oben definierte Integral als Lebesgue-Integral (bezogen auf das Maß μ) bezeichnet – es entstammt ja seinem Entwurf der entsprechenden Theorie für $X = \mathbb{R}^n$ und λ (1902–04; abstraktere Fassung später von Fréchet u. a.).

Wir wollen hier aber den Begriff *Lebesgue-Integral* für $\int_E f\,d\lambda$ reservieren, wo λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist und $E \in \mathcal{M}(\lambda)$ sowie $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $\int_E f^+\,d\lambda < \infty$ oder $\int_E f^-\,d\lambda < \infty$.

Beachte: Zu $\mathcal{L}(E,\lambda)$ gehören nur jene messbaren Funktionen mit $\int_E f^+\,d\lambda < \infty$ und $\int_E f^-\,d\lambda < \infty$.

Im Fall $E = X$ schreiben wir oft einfach $\int f\,d\mu$ statt $\int_X f\,d\mu$.

35.8. Eigenschaften des μ-Integrals (deren Beweise straightforward sind)

Es sei E messbar.

1.) Ist f messbar und gibt es $C > 0$, so dass für alle $x \in E$ gilt $|f(x)| \le C$ (d. h. f ist beschränkt auf E) und gilt $\mu(E) < \infty$, so folgt

$$f \in \mathcal{L}(E,\mu) \quad \text{und} \quad \left|\int_E f\,d\mu\right| \le C \cdot \mu(E)$$

2.) Sind $f, g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ mit $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in E$, so folgt

$$\int_E f\,d\mu \le \int_E g\,d\mu$$

3.) Ist $f \in \mathcal{L}(E,\mu)$ und $c \in \mathbb{R}$, so folgt

$$c \cdot f \in \mathcal{L}(E,\mu) \quad \text{und} \quad \int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu$$

4.) Ist $\mu(E) = 0$ und f messbar, so folgt

$$\int_E f\,d\mu = 0$$

5.) Ist $f \in \mathcal{L}(E,\mu),\ A \in \mathcal{A},\ A \subseteq E$, so folgt

$$f \in \mathcal{L}(A,\mu).$$

35.9. Lemma

Es sei f messbar und $f \geq 0$, weiters (S_k) eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $S_k \geq 0$ und $S_k(x) \to f(x) \quad (k \to \infty)$ punktweise bzgl. $x \in E$ (so eine Folge existiert gemäß 35.6). Dann gilt

$$\int\limits_E f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_E S_k\,d\mu.$$

Beweis. Für alle k ist gemäß den Eigenschaften des Supremums und der Definition des Integrals

$$\int\limits_E S_k\,d\mu \leq \int\limits_E f\,d\mu.$$

Da hier auf der linken Seite eine monoton wachsende Folge von reellen Zahlen steht, folgt daraus (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn)

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_E S_k\,d\mu \leq \int\limits_E f\,d\mu.$$

Sei T eine Treppenfunktion mit $0 \leq T \leq f = \lim_{k\to\infty} S_k$. Wir werden zeigen, dass

$$\int\limits_E T\,d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int\limits_E S_k\,d\mu. \tag{35.5}$$

Dann sind wir fertig, weil daraus

$$\int\limits_E f\,d\mu = \sup\left\{\int\limits_E T\,d\mu \dots\right\} \leq \lim_{k\to\infty} \int\limits_E S_k\,d\mu$$

folgt und somit insgesamt Gleichheit.
Sei $T = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j\,\mathbb{1}_{E_j}$, wobei OBdA $E_1, \dots, E_m$ disjunkt sind.
Sei $\beta > 1,\ k \in \mathbb{N}$ und setze

$$B_k := \{x \in X : \beta\, S_k(x) \geq T(x)\};$$

es folgt $B_{k+1} \supseteq B_k$ und $\forall x \in X\colon \exists N\colon \forall k \geq N\colon x \in B_k$, d. h. also $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k = X$.

Es gilt $\mu(B_k) \nearrow \mu(X) \quad (k \to \infty)$,

denn $X = B_0 \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (B_k \setminus B_{k-1})$ ist eine disjunkte abzählbare Vereinigung, folglich ist

$$\mu(X) = \mu(B_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k \setminus B_{k-1}) = \lim_{N\to\infty} \Big(\mu(B_0) + \sum_{k=1}^{N} (\mu(B_k \setminus B_{k-1}))\Big) = \lim_{N\to\infty} \mu(B_N).$$

Somit gilt also

$$\int_E T\,d\mu = \sum_{j=1}^m c_j\,\mu(E_j \cap E) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^m c_j\,\mu(E_j \cap E \cap B_k) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_E \underbrace{T \cdot \mathbb{1}_{B_k}}_{\leq \beta \cdot S_k} d\mu \leq \beta \cdot \lim_{k\to\infty} \int_E S_k\,d\mu.$$

Nun lassen wir $\beta \to 1$ gehen und erhalten die Behauptung. □

35.10. Proposition

Es seien $f, g \in \mathcal{L}(E,\mu)$, dann ist $f + g \in \mathcal{L}(E,\mu)$ und es gilt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

Beweis. 1. Schritt: Für Treppenfunktionen ist die Additivität klar aus der Definition.

2. Schritt: Sei $f \geq 0$ und $g \geq 0$.
Aus 35.6 folgt die Existenz monoton wachsender Folgen $(S_k), (T_k)$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq S_k(x) \nearrow f(x)$ und $0 \leq T_k(x) \nearrow g(x)$. Daraus folgt

$$f(x) + g(x) = \lim_{k\to\infty} (S_k(x) + T_k(x)) \qquad \text{und} \qquad S_k + T_k \leq S_{k+1} + T_{k+1}$$

und daher gilt

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E (S_k + T_k)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \left(\int_E S_k\,d\mu + \int_E T_k\,d\mu \right)$$

$$= \lim \int_E S_k\,d\mu + \lim \int_E T_k\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

3. Schritt: Sei $f \geq 0$ und $g \leq 0$.
Nun ist $f + g = f - (-g)$, wobei $f \geq 0$ und $-g \geq 0$ gilt. Wir setzen

$$P := \{x : (f+g)(x) \geq 0\} \text{ und } M := X \setminus P.$$

Es ist $f\mathbb{1}_P = (f+g)\mathbb{1}_P + (-g)\mathbb{1}_P$ eine Summe nichtnegativer Funktionen, daher gilt nach Schritt 2 die Gleichung

$$\int_E f\mathbb{1}_P\,d\mu = \int_E (f+g)\mathbb{1}_P\,d\mu + \int_E (-g)\mathbb{1}_P\,d\mu.$$

Analog erhalten wir aus $(-g)\mathbb{1}_M = f\mathbb{1}_M + (-f-g)\mathbb{1}_M$ auch

$$\int_E f\mathbb{1}_M\,d\mu = -\int_E (-f-g)\mathbb{1}_M\,d\mu + \int_E (-g)\mathbb{1}_M\,d\mu.$$

Wir bemerken, dass $(f+g)^+ = (f+g)\mathbb{1}_P$ und $(f+g)^- = (-f-g)\mathbb{1}_M$ gilt, woraus auch die μ-Integrierbarkeit von $f+g$ folgt. Daher ergibt eine Addition der beiden obigen Integralbeziehungen zusammen mit Eigenschaft 35.8, 3.) (für $c=-1$) dann wegen $\mathbb{1}_P + \mathbb{1}_M = 1$ auch

$$\int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu = \int_E (f+g)^+\,d\mu - \int_E (f+g)^-\,d\mu = \int_E (f+g)\,d\mu.$$

4. Schritt: Im allgemeinen Fall schreiben wir wie üblich $f = f^+ - f^-$ und $g = g^+ - g^-$. Dann erhalten wir

$$f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

wobei $f^\pm + g^\pm$ jeweils nichtnegativ sind. Gemäß dem 2. Schritt sind diese Funktionen ebenfalls μ-integrierbar und es gilt $\int_E (f^\pm + g^\pm)\,d\mu = \int_E f^\pm\,d\mu + \int_E g^\pm\,d\mu$.

Daher ist $f+g$ nach Schritt 3 ebenfalls μ-integrierbar über E und

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)\,d\mu &= \int_E (f^+ + g^+)\,d\mu - \int_E (f^- + g^-)\,d\mu \\ &= \int_E f^+\,d\mu + \int_E g^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu - \int_E g^-\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.\end{aligned}$$

□

35.11. Proposition

1.) Ist $f \in \mathfrak{L}(E,\mu)$, so folgt

$$|f| \in \mathfrak{L}(E,\mu) \quad \text{und} \quad \left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu \qquad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

2.) Ist f messbar und $g \in \mathfrak{L}(E,\mu)$ mit $|f| \leq g$, so folgt $f \in \mathfrak{L}(E,\mu)$.

Beweis. ad 1.) Es ist $|f| = f^+ + f^-$ und $f^+, f^- \in \mathfrak{L}(E,\mu)$, also folgt

$|f| \in \mathfrak{L}(E,\mu)$ und $\pm \int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu$, weil $\pm f \leq |f|$ ist.

ad 2.) Es gilt $f^+ \leq |f| \leq g,\ f^- \leq |f| \leq g$, daher folgt $\int_E f^\pm\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu < \infty$.

Somit sind $f^+,\ f^-$ integrierbar, also ist auch f integrierbar.

□

35.12. Der Begriff 'fast überall'

Wir sagen, dass eine Eigenschaft, die abhängig von $x \in X$ besteht oder nicht, *μ-fast überall* (bzw. in der Wahrscheinlichkeitstheorie *fast sicher*) gilt, falls es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ vom Maß null (also $\mu(N) = 0$) gibt, so dass für alle $x \in X \setminus N$ die Eigenschaft zutrifft.

Zum Beispiel: $f = 0$ μ-fast überall $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\exists N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0\colon \forall x \in X \setminus N\colon f(x) = 0$
(bzw.: $\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$ ist eine μ-Nullmenge).

Ist δ_{x_0} das Dirac-Maß im Punkt $x_0 \in X$, dann gilt: $f = 0$ δ_{x_0}-fast überall $\Leftrightarrow f(x_0) = 0$.

Ist μ das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$, dann gilt: $f = 0$ μ-fast überall $\Leftrightarrow f(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Theorem

1.) Ist f messbar und $f \geq 0$, dann gilt:

$$\int_X f\,d\mu = 0 \quad\Leftrightarrow\quad f = 0 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

2.) Sind f, g messbar und $f = g$ μ-fast überall, dann gilt:

$$f \in \mathcal{L}(X, \mu) \qquad\Rightarrow\quad g \in \mathcal{L}(X, \mu) \quad \text{und} \quad \int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu.$$

Beweis

ad 1.) Sei $N := \{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$; es ist $N \in \mathcal{A}$, weil f messbar ist.

Zu zeigen bleibt:

$$\int_X f\,d\mu = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mu(N) = 0$$

$\Rightarrow$: Setze $A_k := \{x \in X\colon f(x) \geq \frac{1}{k}\}$ $\quad (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$;

$$A_k \in \mathcal{A},\ A_k \subseteq A_{k+1} \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = N \overset{\text{[vgl. Bew. 35.9]}}{\Longrightarrow} \mu(N) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Es ist

$$f \geq \frac{1}{k} \cdot \mathbb{1}_{A_k} \quad\Rightarrow\quad 0 = \int_X f\,d\mu \geq \int_X \frac{1}{k} \cdot \mathbb{1}_{A_k}\,d\mu = \frac{1}{k} \cdot \int_{A_k} 1\,d\mu = \frac{1}{k} \cdot \mu(A_k).$$

Daher gilt $\mu(A_k) = 0$ für alle k, also ist $\mu(N) = \lim 0 = 0$.

$\Leftarrow$: Setze $f_k := k \cdot \mathbb{1}_N \quad (k \in \mathbb{N}) \ldots$ Treppenfunktionen

$$\int_X f_k\,d\mu = k \cdot \mu(N) = 0.$$

Das heißt, für $g := \sup_k f_k$ ist $\int_X g\,d\mu = 0$; wegen $0 \le f \le g$ [an jeder Stelle ist $f(x) = 0$ oder schließlich kleiner k oder $f(x) = \infty = \sup_k f_k(x)$] folgt

$$0 \le \int\limits_X f\,d\mu \le \int\limits_X g\,d\mu = 0.$$

ad 2.) Zunächst für $f \ge 0,\ g \ge 0$:

Es ist $N := \{x \in X\colon f(x) \ne g(x)\}$ eine μ-Nullmenge; sei $M := X \setminus N$; betrachte die Funktionen $\underbrace{f \cdot \mathbb{1}_N, g \cdot \mathbb{1}_N}_{= 0 \quad \mu\text{-fast überall}}$, $f \cdot \mathbb{1}_M,\ g \cdot \mathbb{1}_M \ldots$ alle messbar und ≥ 0

$\Rightarrow \int f \cdot \mathbb{1}_N\,d\mu = 0 = \int g \cdot \mathbb{1}_N\,d\mu$

Weiters ist $f \cdot \mathbb{1}_M = g \cdot \mathbb{1}_M$, daher $\int f \cdot \mathbb{1}_M\,d\mu = \int g \cdot \mathbb{1}_N\,d\mu$.

Wegen $f = f \cdot \mathbb{1}_N + f \cdot \mathbb{1}_M$ und $g = g \cdot \mathbb{1}_N + g \cdot \mathbb{1}_M$ folgt

$$\int f\,d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_N\,d\mu + \int f \cdot \mathbb{1}_M\,d\mu = \int g \cdot \mathbb{1}_N\,d\mu + \int g \cdot \mathbb{1}_M\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

Allgemeiner Fall: wir zerlegen wie üblich $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, dann ist μ-fast überall $f^+ = g^+,\ f^- = g^-$ [weil ja $\max(0, f) = \max(0, g)$ μ-fast überall usw.]. Somit folgt

$$\int f^+\,d\mu = \int g^+\,d\mu, \quad \int f^-\,d\mu = \int g^-\,d\mu$$

und daher

$$g \in \mathfrak{L}(X, \mu) \quad \text{und} \quad \int f\,d\mu = \int g\,d\mu.$$

$\square$

36. Konvergenzsätze

36.1. Theorem (monotone Konvergenz, B. Levi[1] 1906)

Es sei (f_k) eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen mit $f_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Dann gilt

$$\int \big(\lim_{k\to\infty} f_k(x) \big)\, d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\, d\mu.$$

Beweis

Setze $\forall x \in X\colon f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ (bei fixem x monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$), dann ist f messbar und $f \geq 0$; wegen $f_k \leq f\ \forall k$ folgt $\int f_k\, d\mu \leq \int f\, d\mu$, daher ist

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu \leq \int f\, d\mu$$

und wir müssen nur noch zeigen, dass auch die umgekehrte Ungleichung gilt.

Sei S eine Treppenfunktion mit $0 \leq S \leq f$ und $\beta > 1$ sowie $B_k := \{x\colon \beta f_k \geq S\}$ $(k \in \mathbb{N})$; es gilt $B_k \in \mathcal{A}$ und

$$B_k \subseteq B_{k+1}, \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = X, \quad \beta f_k \geq S \cdot \mathbb{1}_{B_k}.$$

Weiters ist auch $S \cdot \mathbb{1}_{B_k}$ eine Treppenfunktion und es gilt $S \cdot \mathbb{1}_{B_k}(x) \nearrow S(x) \quad (k \to \infty)$; wie im Beweis von Lemma 35.9 folgt daraus

$$\int S\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int S\, \mathbb{1}_{B_k}\, d\mu \leq \beta \cdot \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu$$

und mit $\beta \to 1$ schließlich

$$\int S\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu.$$

Nach Übergang zum Supremum über alle Treppenfunktionen S mit $0 \leq S \leq f$ erhalten wir also

$$\int f\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\mu.$$

$\square$

36.2. Lemma (von Fatou[2], 1906)

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k \geq 0$ und messbar. Dann gilt

$$\int \big(\liminf_{k\to\infty} f_k(x) \big)\, d\mu(x) \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k(x)\, d\mu(x).$$

[1]Beppo Levi (*14. 5. 1875 Turin; †28. 8. 1961 Rosario, Argentinien) [ˈbeppo ˈleːvi]

[2]Pierre Joseph Louis Fatou (*28. 2. 1878 Lorient; †10. 8. 1929 Pornichet) [ˈpjɛʀ ʃoßɛf faˈtu]

Beweis. Setze $f := \liminf_{k\to\infty} f_k$ und $g_m := \inf_{k\geq m} f_k$ $(m \in \mathbb{N})$. Dann sind f und g_m $(m \in \mathbb{N})$ messbar, $f \geq 0$, $g_m \geq 0$ und es gilt $g_m(x) \nearrow f(x) \quad (m \to \infty)$; aus Theorem 36.1 folgt daher

$$\lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Für $k \geq m$ gilt $g_m \leq f_k$, daher ist $\int g_m \, d\mu \leq \inf_{k\geq m} \int f_k \, d\mu$ und somit

$$\int f \, d\mu \leq \lim_{m\to\infty} \big(\inf_{k\geq m} \int f_k \, d\mu \big) = \liminf_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu$$

□

36.3. Theorem (dominierte oder majorisierte Konvergenz; Lebesgue 1910)

Es sei $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ sowie $f_k\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $k \in \mathbb{N}$ messbar und μ-fast überall gelte $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ (punktweise Konvergenz fast überall). Es gebe eine Funktion $0 \leq g \in \mathcal{L}(X,\mu)$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ μ-fast überall gilt $|f_k| \leq g$. Dann sind alle f_k sowie f μ-integrierbar und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

Bemerkung und Beispiel: die Voraussetzungen dieses Satzes sind in vielen Fällen erfüllt, in denen keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt, und ist daher eine wichtige Erweiterung für Konvergenzschlüsse in der Praxis. Als Beispiel auf $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß betrachte die Funktionenfolge $f_k(x) = 1/(1 + k|x|^{3/2})$ $(k \geq 1)$, die punktweise außerhalb $x = 0$ (daher Lebesgue-fast überall) — aber nicht gleichmäßig — gegen die Nullfunktion strebt. Als dominierende integrierbare Funktion kann $g(x) = 1/(1+|x|^{3/2})$ gewählt werden und wir erhalten $\int_{\mathbb{R}} dx/(1 + k|x|^{3/2}) \to 0$ $(k \to \infty)$.

Beweis. Gemäß 35.12 können wir OBdA die 'μ-fast überall'-Aussagen durch '$\forall x \in X$' ersetzen, weil das an den Integralen nichts ändert.
Es ist $\;0 \leq f_k^+ \leq g, \quad 0 \leq f^+ \leq g, \quad 0 \leq f_k^- \leq g, \quad 0 \leq f^- \leq g$, daher

$$\int f_k^\pm \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f^\pm \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty,$$

also sind alle f_k und f selbst μ-integrierbar.
Wir setzen $g_k := |f| + g - |f_k - f|$. Es ist $\liminf g_k = |f| + g$, daher folgt aus dem Lemma von Fatou 36.2

$$\int (|f| + g) \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int g_k \, d\mu = \int (|f| + g) \, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\mu.$$

Da $\int (|f| + g) \, d\mu < \infty$ ist, folgt

$$0 \leq \limsup_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\mu \leq 0 \quad \text{und somit} \quad \lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| \, d\mu = 0.$$

Weiters ist

$$\left|\int f_k\,d\mu - \int f\,d\mu\right| \le \int |f_k - f|\;d\mu \to 0 \quad (k \to \infty)$$

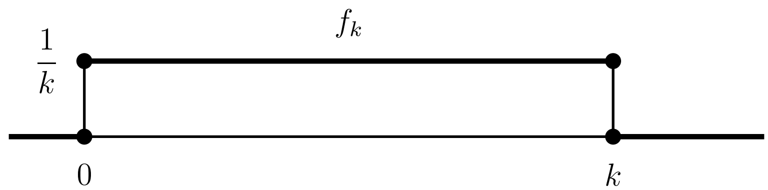
und daher

$$\int\limits_X f_k\,d\mu \to \int\limits_X f\,d\mu \quad (k \to \infty).$$

□

36.4. Beispiel

In Theorem 36.3 ist es essenziell, dass die Folge (f_k) von einer (fixen, von k unabhängigen) integrierbaren Funktion g dominiert wird; andernfalls ist die Aussage i. A. falsch — selbst bei gleichmäßiger Konvergenz! Z. B.: $X = \mathbb{R}$, λ Lebesgue-Maß, $f_k = \dfrac{1}{k} \cdot \mathbb{1}_{[0,\,k]}$



Dann gilt $f_k \to 0$ für $k \to \infty$ gleichmäßig, ABER

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_k\,d\lambda = 1, \text{ während } \int\limits_{\mathbb{R}} \lim f_k\,d\lambda = 0.$$

36.5. Bemerkung

Es sind im Wesentlichen die Konvergenzsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie, die diese zum Grundstein vieler Teilgebiete der Analysis oder angewandten Mathematik werden lässt (Wahrscheinlichkeitstheorie, Harmonische Analyse, Funktionalanalysis, Distributionentheorie [$\sim$ verallgemeinerte Funktionen], partielle Differentialgleichungen usw.); ganz konkret ergibt diese geschmeidigere Integrationstheorie aber auch stark verbesserte Methoden oder Resultate der klassischen Analysis: vgl. etwa die Erweiterung des Riemann-Integrals (siehe Abschn. 37) oder folgende Version der Transformationsformel (vgl. [For84, § 13]):
Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. $f\colon V \to \mathbb{R}$ ist genau dann λ-integrierbar, wenn $(f \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi|$ auf U λ-integrierbar ist. Es gilt in diesem Fall die Formel

$$\int\limits_U f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|\,d\lambda(x) = \int\limits_V f(y)\,d\lambda(y).$$

Überdies dürfen Nullmengen, auf denen Φ kein Diffeomorphismus ist, im Integral vernachlässigt werden, was zum Beispiel einen neuen Beweis für die Zulässigkeit der Verwendung von Polarkoordinaten auf ganz $\mathbb{R}^2$ liefert.

37. Vergleich von Lebesgue- und Riemann-Integral

Wir betrachten nun $E = [a,b] \subseteq \mathbb{R} = X$ und das Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}$; wir verwenden hier die Notation $R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx$ für das Riemann-Integral gemäß Analysis 1.

37.1. Theorem

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann gilt:

1.) Ist f R-integrierbar, dann ist $f \in \mathcal{L}([a,b],\lambda)$ und

$$R\text{-}\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,d\lambda(x).$$

2.) f ist R-integrierbar $\iff$ f ist stetig λ-fast überall.

Beweis

ad 1.) Es gibt reelle Zahlen $c_1 < c_2$ mit $c_1 \leq f(x) \leq c_2$ für alle $x \in [a,b]$.

Da f R-integrierbar ist, gibt es Folgen (φ_k), (ψ_k) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ (im Sinne von Analysis 1, d.h. stückweise konstant auf Teilintervallen einer Zerlegung) mit $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ und

$$R\text{-}\int_a^b \psi_k\,dx \;-\; R\text{-}\int_a^b \varphi_k\,dx \to 0 \quad (k \to \infty).$$

OBdA ist (φ_k) monoton wachsend, (ψ_k) monoton fallend [sonst einfach max bzw. min von allen vorhergehenden nehmen] und $c_1 \leq \varphi_k \leq f \leq \psi_k \leq c_2$.

Für Treppenfunktionen (im Sinne der Riemann-Theorie) gilt

$$R\text{-}\int_a^b T\,dx = \int_{[a,b]} T\,d\lambda \qquad \text{(folgt direkt aus jeweiligen Integraldefinitionen).}$$

Wir setzen φ_k und ψ_k auf $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ durch 0 fort; für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$\exists g(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)$ und $\exists h(x) := \lim_{k\to\infty} \psi_k(x)$,

weil jeweils monoton und $\varphi_k \leq c_2,\ \psi_k \geq c_1$.

g und h sind als punktweise Limiten λ-messbarer Funktionen ebenfalls λ-messbar;

es gilt $\forall x \in [a,b]\colon g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]\colon g(x) = h(x) = 0$;

insbesondere ist $h - g \geq 0$ und somit

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} (h-g)\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} (\psi_k - \varphi_k)\,d\lambda \underset{[36.2,\text{ Lemma von Fatou}]}{\leq}$$

$$\leq \liminf_{k\to\infty} \int (\psi_k - \varphi_k)\; d\lambda = \liminf_{k\to\infty} \left(R\text{-}\int_a^b \psi_k\, dx \;-\; R\text{-}\int_a^b \varphi_k\, dx \right) = 0.$$

Nach Theorem 35.12, 1.) ist daher λ-fast überall $g = h$; es folgt weiter

$$g = f = h \quad \lambda\text{-fast überall in } [a,b]$$

und, dass f λ-messbar (in $[a,b]$) ist [denn $\{x\colon f(x) > c\} = \underbrace{\{x\colon g(x) > c\}}_{\in\mathcal{M}(\lambda)} \cup \underbrace{\text{Nullmenge}}_{\in\mathcal{M}(\lambda)}$].

Für alle $x \in [a,b]$ gilt $|\varphi_k(x)| \leq \underbrace{\max(|c_1|,|c_2|)\cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)}_{\in\mathcal{L}([a,b],\lambda)}$ und $\varphi_k(x) \to g(x)$ ($k \to \infty$), daher ist $g\big|_{[a,b]}$ λ-integrierbar, folglich ist f auf $[a,b]$ λ-integrierbar [wegen 36.3, dominierte Konvergenz!] und schließlich gilt

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{[a,b]} g\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_k\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} R\text{-}\int_a^b \varphi_k(x)\, dx = R\text{-}\int_a^b f(x)\, d(x).$$

ad 2.)

$\Leftarrow$: In obigem Beweis von 1.) bezeichne $N \in \mathcal{M}(\lambda)$ eine Menge mit $\lambda(N) = 0$ und der Eigenschaft, dass $\forall x \in [a,b]\setminus N\colon g(x) = f(x) = h(x)$.

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $M_k \subseteq [a,b]$ jeweils die endliche Menge der Sprungstellen von φ_k oder ψ_k; setze $M := N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, dann ist $\lambda(M) = 0$ (wegen $\lambda(M) = \lambda(N) + \sum_k \lambda(M_k) = 0$).

Behauptung: f ist stetig in $[a,b]\setminus M$

Sei $x_0 \in [a,b]\setminus M$ und $\varepsilon > 0$.
$\exists k \in \mathbb{N}:\; \psi_k(x_0) - \varphi_k(x_0) < \varepsilon$ (weil $\lim \psi_k(x_0) = \lim \varphi_k(x_0)$ ist);
weiters gibt es offene Intervalle $I_k,\; J_k \subseteq [a,b]$ mit $x_0 \in I_k \cap J_k$ und

$$\varphi_k\big|_{I_k} = \varphi_k(x_0), \quad \psi_k\big|_{J_k} = \psi_k(x_0) \qquad (\text{weil } x_0 \notin \bigcup_{l\in\mathbb{N}} M_l \text{ ist}).$$

Die Menge $V := I_k \cap J_k$ ist eine offene Umgebung von x_0 mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in V$ gilt:

$$\varphi_k(x_0) = \varphi_k(x) \leq f(x) \leq \psi_k(x) = \psi_k(x_0).$$

Somit ist $|f(x) - f(x_0)| \leq \psi_k(x_0) - \varphi_k(x_0) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Sei f stetig auf $[a,b] \setminus A$, wobei $\lambda(A) = 0$ ist. Dann gibt es Folgen $(\varphi_k), (\psi_k)$ von Treppenfunktionen (im Sinne der Riemann-Theorie), die zudem OBdA $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$, $\psi_k \geq \psi_{k+1}$ erfüllen, mit $\varphi_k \leq f \leq \psi_k$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k = \underset{*}{\int_a^b} f \qquad \text{(Unterintegral)}$$

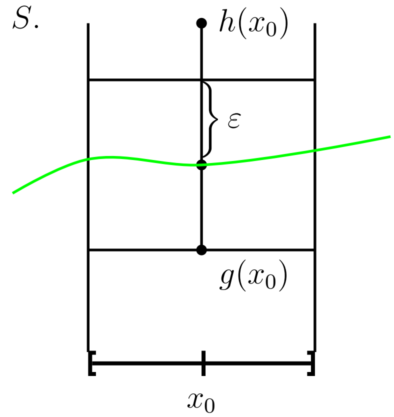
$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \psi_k = \int_a^{b\,*} f \qquad \text{(Oberintegral).}$$

Sei $g(x) := \lim \varphi_k(x)$, $h(x) := \lim \psi_k(x)$; es ist $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und wie in 1.) folgt

$$\int_{[a,b]} g\, d\lambda = \underset{*}{\int_a^b} f, \qquad \int_{[a,b]} h\, d\lambda = \int_a^{b\,*} f.$$

Behauptung: f ist in allen Punkten aus $S := \{x : \ g(x) < h(x)\}$ unstetig.

Beweis indirekt: Angenommen, f ist stetig in $x_0 \in S$.



Sei $\varepsilon := \dfrac{h(x_0) - g(x_0)}{3}$ und $\delta > 0$ so gewählt, dass $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Dann könnte aber im Intervall $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ober- oder unterhalb des ε-Streifens um $f(x_0)$ noch ein besser approximierendes Treppenplateau eingefügt werden.
Dies ist ein Widerspruch, weil die L-Integrale über g bzw. h schon die besten Approximationen (nämlich Unter- bzw. Oberintegral) ergeben.

Daher muss $S \subseteq A$ gelten, also $\lambda(S) = 0$ und λ-fast überall $g\big|_{[a,b]} = h\big|_{[a,b]}$; daher ist schließlich (nach 35.12)

$$\underset{*}{\int_a^b} f = \int_{[a,b]} g\, d\lambda = \int_{[a,b]} h\, d\lambda = \int_a^{b\,*} f$$

und somit f R-integrierbar.

$\square$

37.2. Bemerkung

1.) Theorem 37.1, 1.) besagt, dass das Lebesgue-Integral eine konsistente Erweiterung des Riemann-Integrals ist; es gibt übrigens viele Funktionen, die L-integrierbar, aber nicht R-integrierbar sind (eines der einfachsten Beispiele ist $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ auf $[0, 1]$).

2.) Theorem 37.1, 2.) besagt, dass R-integrierbare Funktionen im Lebesgueschen Sinn nicht zu viele Unstetigkeitsstellen haben dürfen (z. B. ist $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ unstetig in jedem Punkt).

3.) Uneigentliche Riemann-Integrale über *positive* Funktionen lassen sich auch als L-Integrale auffassen (siehe hierzu etwa [Els05]).

Aber Achtung bei oszillierenden Integranden!

Zum Beispiel ist die Funktion $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \mathbb{1}_{[k-1,\,k[}(x)$ ist uneigentlich R-integrierbar über $[0, \infty[$,

denn $R\text{-}\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (und hat den Wet $\log 2$), während die positiven und negativen Anteile unendliche L-Integrale haben

$$\int f^+ \, d\lambda = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty, \qquad \int f^- \, d\lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots = \infty.$$

(Ebenso geht das mit $\frac{\sin x}{x}$, das einen ähnlicher Oszillationseffekt zeigt und im Unendlichen ebenso schwach fällt).

4.) Es gibt Lebesgue-Versionen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung; eine ist z. B. so (siehe [Els05, Kapitel VII, §4]):

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine L-integrierbare Funktion, so definiert $F(x) := \int_a^x f(t)\,d\lambda(t)$ eine (absolut) stetige Funktion und λ-fast überall gilt: die Ableitung $F'(x)$ exisitiert und $F'(x) = f(x)$.

Literaturverzeichnis

[AE01] H. Amann and J. Escher. *Analysis III*. Birkhäuser, Basel, 2001.

[BF96] M. Barner and F. Flohr. *Analysis II*. Walter de Gruyter, Berlin, 1996. 3. Auflage.

[Els05] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. 4. Auflage.

[Fis03] G. Fischer. *Lineare Algebra*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2003. 14. Auflage.

[For84] O. Forster. *Analysis 3*. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1984. 3. Auflage.

[Heu04] H. Heuser. *Analysis 2*. BG Teubner, Stuttgart, 2004. 13. Auflage.

[Kön04] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. 5. Auflage.

[Rud05] W. Rudin. *Analysis*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2005. 3. Auflage.