VORBEMERKUNGEN

(1) DEFIZITE DES RIEMANN-INTEGRALS

(somit auch des Integrals von sogen. Regelfunktionen)

(a) Vertauschung von Limes und Integral

$\mathcal{R}[0,1]$ ..... Riemann-integrierbare Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n \in \mathcal{R}[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$

- $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}[0,1]$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

ABER

- $f_n \to f$ punktweise monoton $\not\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}[0,1]$

Beisp: $[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ (Abzählung),

$f_n(x) = 0$ $(x \notin \{r_1, \dots, r_n\})$, $f_n(r_j) = 1$ $(j = 1, \dots, n)$

$f_n(x) \to f(x)$ punktweise monoton, wobei

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$ (Dirichlet-Funktion)

f nicht R-integrierbar [vgl. Analysis-VO]

BEM: $\exists$ Folge (f_n) stetiger Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $0 \le f_n \le 1$ und $f_n(x) \searrow f(x)$ punktweise monoton fallend, ABER f nicht R-integrierbar (siehe z.B. [[SS05, pp. 38, 39, 41]])

beachte: $0 \le \int_0^1 f_n \le \int_0^1 f_{n+1} \le \ldots$, somit $\left(\int_0^1 f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt in $\mathbb{R}$, also konvergent!

– später in dieser VO (dominierte Konvergenz):
f ist Lebesgue-integrierbar und $L\text{-}\int_{[0,1]} f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$.

(b) Unvollständigkeit bzgl. Integralnormen

$1 \le p < \infty$: $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ induziert Norm auf $\mathcal{R}[0,1]$ modulo $f \sim g :\Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)-g(x)|^p dx = 0$

(beachte: R-int. Fkt. stets beschränkt $\Rightarrow \|f\|_p \le \|f\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1} |f(x)|$)

Aber keiner der normierten Räume $(\mathcal{R}[0,1]/\sim, \|.\|_p)$ ist ein Banachraum! [Beispiele aus Bem. in 1)(a) und für $p=2$ aus Theorie der Fourier-Reihen: Partialsummen immer stetig, Limes in $L^2([0,1])$]

Bem.: explizite Beispiele für L^2-konvergente

Fourier-Reihen mit nicht-R-integrierbarer Grenzfunktion (aus [Stein & Shakarchi, Fourier Analysis, Princeton Lect. An. Vol I, 2003] =: [SS03]
(auf $[0, 2\pi]$ statt $[0,1]$))

- [SS03, p. 83-84] $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{k} e^{-ikx}$

- [SS03, p. 89, Ex. 6] $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e^{ikx}$

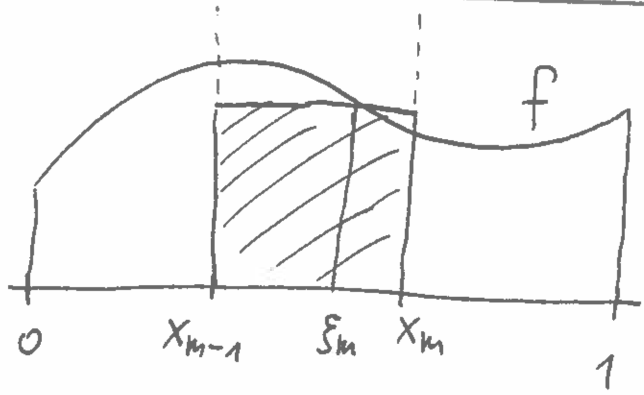
neg. bzw. pos. Frequenzanteile der Sägezahnfunktion

- [SS03, p. 89, Ex. 7] $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\log(k)} \cdot \sin(kx)$ (pktw. konv. $\forall x$)

- [SS03, p. 95, Prob. 1] $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (pktw. konv. $\forall x$)

(2) IDEE DES LEBESGUE-INTEGRALS

Riemann (1854)

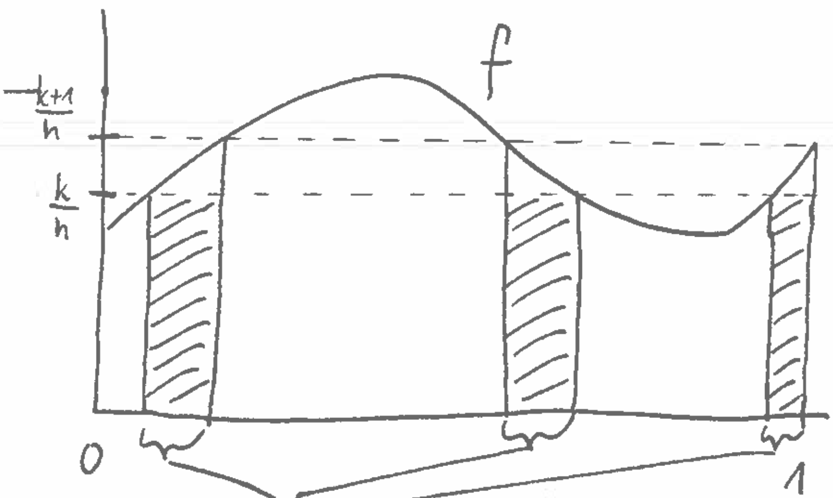


$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_m f(\xi_m)\cdot(x_m - x_{m-1})$$

kann bei stark schwankenden Funkt. unkontrollierbar werden

sehr einfache Zerlegung im Def.bereich

Lebesgue (1902)



sehr einfache Zerlegung des Wertebereichs;

Mengen $E_{k,n}$ der „Gestalt" von f angepasst

$$E_{k,n} = \{x \mid \tfrac{k}{n} \le f(x) < \tfrac{k+1}{n}\}$$

$$\int_{[0,1]} f(x)\,dx \approx \sum_k \frac{k}{n}\cdot Vol(E_{k,n})$$

brauche aber „Volumsbegriff"

? (Inhalt, Maß) für möglichst allgemeine Mengen!

(3) INHALT, MASZ, WAHRSCHEINLICHKEIT

- Grundidee: axiomatische Fassung einer abstrakten Version von Flächeninhalts- und Volumsbestimmungen (Borel, Lebesgue; Vorläufer Jordan) durch Abbildung

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty] \quad \text{mit „Minimaleigenschaften}$$

(Potenzmenge der Menge X)

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (endliche Additivität)

– so ein μ heißt Inhalt (auf $\mathcal{P}(X)$)

- für $X = \mathbb{R}^n$ oft zwei Zusatzwünsche interessant:

(c) $\mu([0,1]^n) = 1$ (Normierung)

(d) $\forall$ Bewegung $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist $\mu \circ B = \mu$ (Bewegungsinvarianz)

Hausdorff (1914): $\nexists$ Inhalt auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit (a), (b), (c), (d), falls $n \geq 3$

(Banach (1923): lösbar für $n = 1,2$, aber nicht eindeutig.)

- Eig. (b) ist zu schwach, um gute Approximationsverfahren zu garantieren $\rightsquigarrow$ Aufgabe von ganz $\mathcal{P}(X)$ als Definitionsbereich; statt dessen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ „geeignetes" System von Teilmengen, ABER dafür

Verstärkung von (b) zur <u>σ-Additivität</u>:

$(b)_\infty$ $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ ⇒

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \left(\text{auch im uneig. Sinn}\right)$$

– so ein μ heißt <u>Maß</u> (auf $\mathcal{A}$)

<u>Bem</u>: Vitali (1905): ∄ Maß auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, das auch (c) und (d) erfüllt; werden aber später das Lebesgue-Maß auf messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ konstruieren, welches durch (c), (d) dann eindeutig wird.

- Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ als Definitionsbereich für ein Maß müssen stabil unter wichtigsten Mengenop. sein ⇝ Begriff σ-Algebra

- Vorteil der abstrakten Formulierung auf beliebigen Mengen ist deren Anwendung für die Grundlegung der <u>Wahrscheinlichkeitstheorie</u> durch Kolmogorov (1933): Ω Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Menge der Ereignisse, P Maß auf $\mathcal{A}$ mit $P(\Omega) = 1$ heißt <u>Wahrscheinlichkeitsmaß</u>.