

Begleitblatt 2 zur VO *Grundbegriffe der Topologie* (SS 10)

[Wir versammeln hier jene zusätzlichen Begriffe und Überlegungen, die den kurzen Beweis des Satzes von Tychonoff in der VO (Thm.5.10) ermöglichen.]

1) Definition: Es sei X eine Menge. Ein Filter \mathcal{F} auf X heißt *Ultrafilter*, falls es keinen echt feineren Filter auf X gibt. (D.h.: für jeden Filter \mathcal{G} auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gilt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.)

2) Lemma: Ein Filter \mathcal{F} auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $E \subseteq X$ gilt, dass entweder $E \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus E \in \mathcal{F}$ zutrifft.

Beweis. Sei zunächst \mathcal{F} ein Ultrafilter und $E \subseteq X$. Für jedes $F \in \mathcal{F}$ betrachten wir die beiden folgenden Aussagen: (i) $F \cap E \neq \emptyset$, (ii) $F \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. (Dabei trifft natürlich für jedes einzelne F mindestens eine der beiden Aussagen zu.) Wir behaupten: $(\forall F \in \mathcal{F} : (i))$ oder $(\forall F \in \mathcal{F} : (ii))$. Andernfalls existieren $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ mit folgenden Eigenschaften: für F_1 gilt (i), aber nicht (ii), und für F_2 gilt (ii), aber nicht (i). Daher ist $F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_2 \cup ((X \setminus E) \cap E) = (F_1 \cap (X \setminus E)) \cup (F_2 \cap E) = \emptyset$ im Widerspruch zu den Filtereigenschaften. Somit können wir oBdA annehmen, dass (i) für alle Filtermengen aus \mathcal{F} zutrifft. Das Mengensystem $\mathcal{G} := \{G \subseteq X \mid \exists F \in \mathcal{F} : F \cap E \subseteq G\}$ ist dann ein Filter (leicht zu zeigen!), der feiner als \mathcal{F} ist. Weiters ist $E \in \mathcal{G}$ (weil $E \supseteq F \cap E$). Da \mathcal{F} ein Ultrafilter ist, muss $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ gelten und somit $E \in \mathcal{F}$.

Für die Umkehrung nehmen wir nun an, dass für jede Teilmenge $E \subseteq X$ entweder $E \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus E \in \mathcal{F}$ gilt. Ist \mathcal{G} ein feinerer Filter als \mathcal{F} und $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, so muss daher $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gelten. Aber $A \in \mathcal{G}$ und $X \setminus A \in \mathcal{G}$ ist im Widerspruch zu den Filtereigenschaften von \mathcal{G} . \square

3) Definition: Es sei X eine Menge. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X heißt *Ultranetz*, falls für jede Teilmenge $E \subseteq X$ gilt: (x_i) ist schließlich in E oder (x_i) ist schließlich in $X \setminus E$.

4) Aus 2) und 3) folgt unmittelbar: Der Übersetzungsprozess zwischen Filtern und Netzen gemäß VO 3.22 führt Ultranetze in Ultrafilter über und umgekehrt.

5) Lemma L1: Es sei X eine Menge.

- (i) Jeder Filter auf X ist in einem feineren Ultrafilter enthalten.
- (ii) Jedes Netz in X besitzt ein Teilnetz, das ein Ultranetz ist.

Beweis. (i) Sei \mathcal{F} ein Filter auf der Menge X . Es bezeichne \mathcal{S} die Menge aller Filter auf X , die feiner als \mathcal{F} sind. Wegen $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ ist \mathcal{S} nicht leer und die Mengeninklusion \subseteq liefert eine partielle Ordnung auf \mathcal{S} . Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{S}$ eine Kette bezüglich (\mathcal{S}, \subseteq) , so ist $\mathcal{T} := \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathcal{K}} \mathcal{E}$ ein Filter (leicht zu zeigen), also eine Oberschranke von \mathcal{K} in \mathcal{S} . Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element \mathcal{G} in (\mathcal{S}, \subseteq) . Dieses ist somit ein Ultrafilter, der \mathcal{F} enthält.

(ii) Sei (x_i) ein Netz in X und bezeichne \mathcal{F} den (gemäß VO 3.22) von (x_i) erzeugten Filter auf X . (Erinnere: für $j \in I$ ist $B_j := \{x_i \mid i \geq j\}$ und $\mathcal{F} := \{F \subseteq X \mid \exists j \in I : B_j \subseteq F\}$.) Zu \mathcal{F} existiert wegen (i) ein feinerer Ultrafilter \mathcal{G} . Wir übersetzen \mathcal{G} nun zurück in ein Teilnetz von (x_i) . (Die vereinfachte Konstruktion aus VO 3.22 reicht nun nicht aus, sondern muss zusätzlich an die Indexmenge I angepasst werden.)

Wir definieren auf $H := \{(i, G) \in I \times \mathcal{G} \mid i \in I, G \in \mathcal{G}, x_i \in G\}$ die Relation $(i, G) \leq_H (i', G') \Leftrightarrow i \leq i'$ und $G \supseteq G'$. Dadurch wird (H, \leq_H) zur gerichteten Menge, denn (R1,2) sind klar und (R3) folgt so: zu $h_1 = (i_1, G_1) \in H$ und $h_2 = (i_2, G_2) \in H$ wähle zunächst $i_0 \in I$ mit $i_0 \geq i_1, i_2$ und setze $G_3 := G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$; wegen $B_{i_0} := \{x_i \mid i \geq i_0\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ist $B_{i_0} \cap G_3 \neq \emptyset$, daher gibt es $i_3 \geq i_0$ mit $x_{i_3} \in G_3$; mit $h_3 := (i_3, G_3)$ ist dann (R3) erfüllt. Die Abbildung $\varphi: H \rightarrow I, (i, G) \mapsto i$ ist monoton und konfinal (leicht zu zeigen!) und definiert somit mittels $y_h := x_{\varphi(h)}$ ein Teilnetz $(y_h)_{h \in H}$ von $(x_i)_{i \in I}$. Es bleibt zu zeigen, dass (y_h) ein Ultranetz ist.

Sei $E \subseteq X$. Wegen der Ultrafiltereigenschaft von \mathcal{G} dürfen wir oBdA annehmen, dass $E \in \mathcal{G}$ gilt. Fixiere $i_0 \in I$ beliebig, dann ist wegen $B_{i_0} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ wieder $B_{i_0} \cap E \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $j_0 \in I$ mit $x_{j_0} \in B_{i_0} \cap E$. Wir setzen $h_0 := (j_0, E)$, dann gilt für jedes $h \geq h_0$ nach Konstruktion $y_h \in E$. Somit ist (y_h) schließlich in E . \square

6) Lemma L2: Bilder von Ultranetzen sind Ultranetze, d.h. sind X und Y Mengen, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und (x_i) ein Ultranetz in X , dann ist $(f(x_i))$ ein Ultranetz in Y .
(Ebenso für Ultrafilter.)

Beweis. Sei $B \subseteq Y$, dann ist (x_i) als Ultranetz schließlich in $f^{-1}(B)$ oder in $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$. Somit ist $(f(x_i))$ schließlich in B oder in $Y \setminus B$. \square

7) Lemma L3: Es sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

X ist kompakt \iff jedes Ultranetz in X konvergiert in X . (Ebenso für Ultrafilter.)

Beweis. (\Rightarrow) Sei (x_i) ein Ultranetz in X . Wegen der Kompaktheit von X , hat (x_i) jedenfalls einen Häufungspunkt x in X [VO, Thm.5.3(iii)]. Als Ultranetz muss (x_i) dann aber gegen x konvergieren, weil das Netz ja in jeder Umgebung U des HP x immer wieder ist und gleichzeitig schließlich in U oder $X \setminus U$ sein muss.

(\Leftarrow) Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein beliebiges Netz in X . Nach Lemma L1(ii) (Punkt 5) oben besitzt (x_i) ein Teilnetz $(y_h)_{h \in H}$, das ein Ultranetz ist. Es sei $y_h = x_{\varphi(h)}$ mit monotoner, konfinaler Abbildung $\varphi: (H, \leq_H) \rightarrow (I, \leq)$.

Nach Voraussetzung ist (y_h) konvergent, sagen wir gegen $y \in X$. Dann muss y ein HP von (x_i) sein, wie sich leicht aus der Definition des Teilnetzes ergibt: sei $U \in \mathcal{U}(y)$, dann existiert ein $h_0 \in H$, sodass $y_h \in U$ für alle $h \geq_H h_0$; zu jedem $i \in I$ gibt es ein $h \in H$ mit $i \leq \varphi(h)$ und $h_0 \leq_H h$; für $j := \varphi(h)$ gilt dann $x_j = x_{\varphi(h)} = y_h \in U$; somit ist $(x_i)_{i \in I}$ immer wieder in U . \square

8) Bemerkung: Lemmata L1-3 liefern die wesentlichen Bausteine für den Beweis des Satzes von Tychonoff [VO Thm. 5.10] und stützen sich in Form des Lemmas von Zorn auf das Auswahlaxiom [vgl. Beweis von Lemma L1]. Für endlich viele Faktoren im kartesischen Produkt kann der Satz von Tychonoff auch ohne Rückgriff auf das Auswahlaxiom bewiesen werden, wie z.B. in [Čap07, 5.6] für den Fall von zwei Faktoren ausgeführt. Der allgemeine Satz von Tychonoff impliziert seinerseits sogar das Auswahlaxiom, wie Kelley in einer kurzen Arbeit 1950 gezeigt hat (vgl. [Kel50]).

Literatur

- [Čap07] A. Čap. *Grundbegriffe der Topologie*. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, 2007.
[Kel50] J. L. Kelley. The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice. *Fund. Math.*, 37:75–76, 1950.