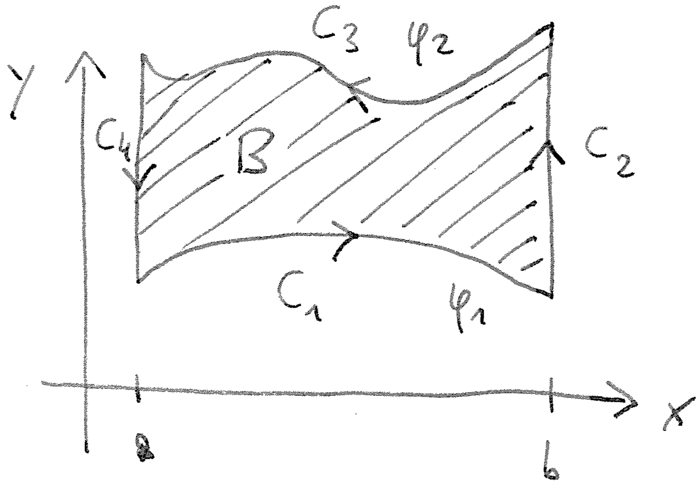
§16 OBERFLÄCHENINTEGRALE UND INTEGRALSÄTZE

16.1. Integralsatz von Gauß-Green in der Ebene

- B sei C^1-Normalbereich bzgl. x-Achse, d.h.

  $B = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, wobei

  $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $\varphi_1 \le \varphi_2$



Rand ∂B ist stückweise C^1-Kurve $C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4$, z.B. C_1 gegeben durch $\gamma_1(t) = \binom{t}{\varphi_1(t)}$ $(t \in [a,b])$

C_3 dargestellt durch $\ominus \gamma_3$, wobei $\gamma_3(t) = \binom{t}{\varphi_2(t)}$ $(t \in [a,b])$,

B liegt beim Durchlaufen von $C = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4$ immer auf der linken Seite ..... ∂B heißt <u>positiv orientiert</u>

<u>LEMMA</u>: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $B \subseteq G$ und $P : G \to \mathbb{R}$ sei stetig diffbar, dann gilt

$$\int_B \partial_y P(x,y)\, d(x,y) = -\int_{\partial B} \binom{P}{0}$$

Beweis: $$\int_B \partial_y P \, d(x,y) \overset{[NB]}{=} \int_a^b \underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \partial_y P(x,y)\, dy}_{\overset{[HSDI]}{=} P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))} \, dx =$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi_2(x))\, dx - \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\, dx =$$

$$= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P(\gamma_3(x)) \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_2'(x) \end{pmatrix}}_{\dot\gamma_3(x)} \right\rangle dx - \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P(\gamma_1(x)) \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(x) \end{pmatrix}}_{\dot\gamma_1(x)} \right\rangle dx$$

$$= \int_{\gamma_3} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_{C_3} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{C_1} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$$

weiters sind $\dot\gamma_2$ und $\dot\gamma_4$ stets vertikal für Wege γ_2 und γ_4, die C_2 bzw. C_4 darstellen, daher $\langle \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} | \dot\gamma_2 \rangle = 0 = \langle \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} | \dot\gamma_4 \rangle$, also muss $\int_{C_4} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \int_{C_2} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$ gelten. Somit insgesamt

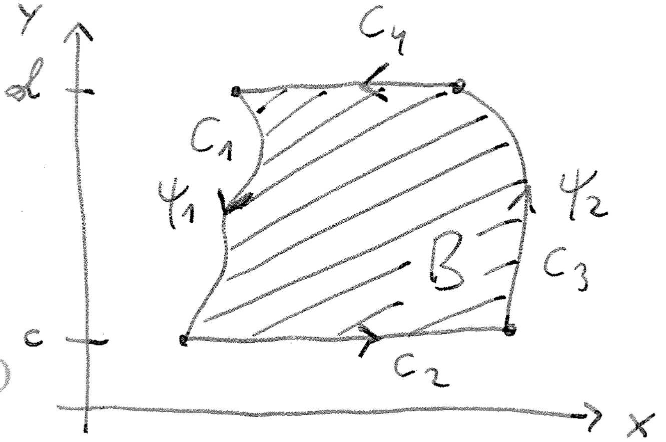
$$-\int_C \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_{C_1} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{C_2} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{C_3} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{C_4} \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \int_B \partial_y P \, d(x,y)$$

$\square$

- analog gilt: wenn B $\mathcal{C}^1$-NB bzgl. y-Achse,

d.h. $B = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ mit $\psi_1 \leq \psi_2$

$\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, und Rand ∂B



positiv orientiert,

$Q : G \to \mathbb{R}$ stetig diffbar,

dann gilt

$$\int_B \partial_x Q \, d(x,y) = \int_{\partial B} \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix}$$

(diesmal kein Minus, weil Durchlaufsinn der y-Achse nun entgegen C_1 und mit C_3)

- <u>SATZ (von Gauß-Green)</u>: Sei B $\mathcal{C}^1$-NB sowohl bzgl. x-Achse als auch bzgl. y-Achse, sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq G$ und $P, Q : G \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann gilt für die positiv orientierte Randkurve ∂B

$$\boxed{\int_{\partial B} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \int_B (\partial_x Q - \partial_y P) \, d(x,y)}$$

Kurvenintegral des Vektorfeldes $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$

Doppelintegral über Normalbereich

Beweis: $\int\limits_{\partial B} \binom{P}{Q} = \int\limits_{\partial B} \left(\binom{0}{Q}+\binom{P}{0}\right) = \int\limits_{\partial B}\binom{0}{Q} + \int\limits_{\partial B}\binom{P}{0} =$

$$= \int\limits_B \partial_x Q \, d(x,y) - \int\limits_B \partial_y P \, d(x,y) = \int\limits_B (\partial_x Q - \partial_y P)\, d(x,y) \qquad \square$$

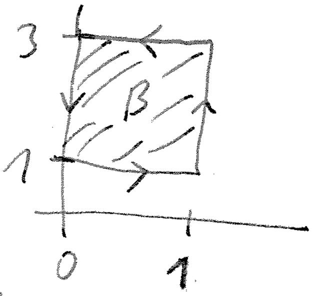
KOR: B $\mathcal{C}^1$-NB bzgl. x und y, ∂B positiv orientiert $\Rightarrow$

$$|B| = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial B}\binom{-y}{x}$$

Bew: $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$ im Satz ergibt

$$\int\limits_{\partial B}\binom{-y}{x} = \int\limits_B \underbrace{(\partial_x(x)-\partial_y(-y))}_{1-(-1)=2}\, d(x,y) = 2\cdot\int\limits_B 1\, d(x,y) = 2\cdot|B| \qquad \square$$

BEISP: $B = [0,1]\times[1,3]$



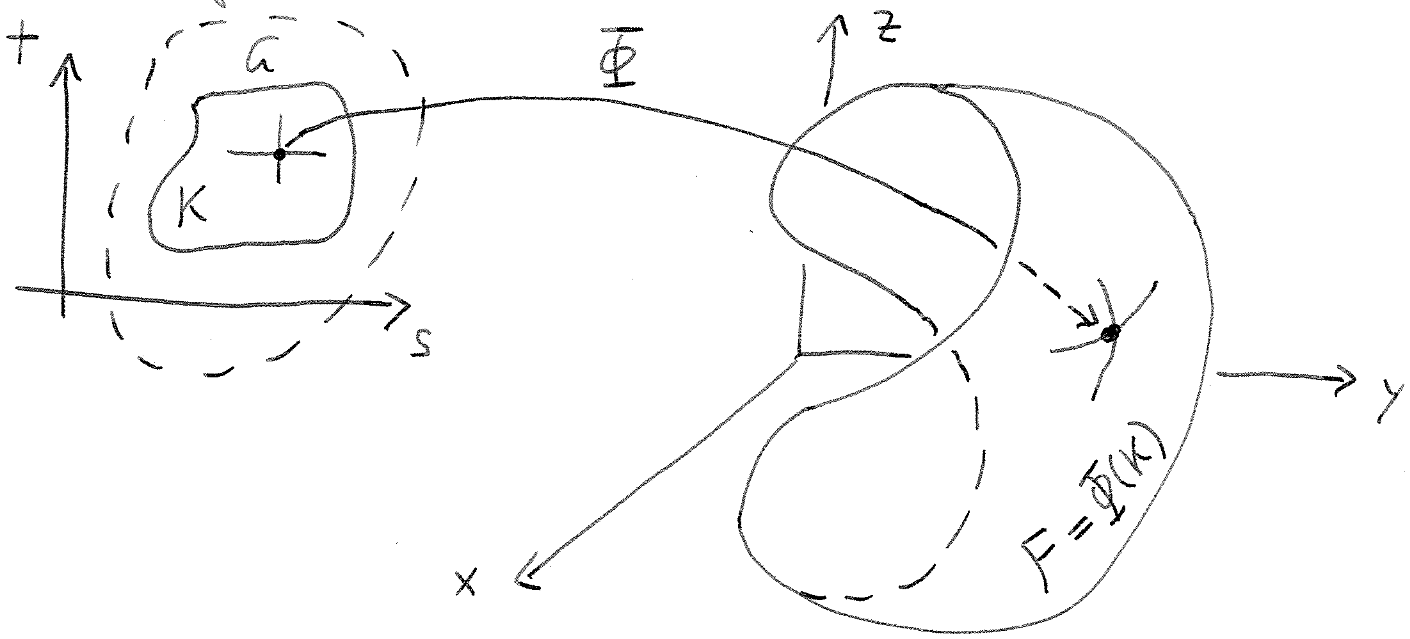
$$\int\limits_{\partial B}\binom{xy}{x-y} = \int\limits_B (\partial_x(x-y) - \partial_y(xy))\, d(x,y) =$$

$$= \int\limits_B (1-x)\, d(x,y) = \int_1^3\int_0^1 (1-x)\, dx\, dy = \int_1^3 -\frac{(1-x)^2}{2}\Big|_0^1 dy =$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}\cdot(3-1) = 1$$

16.2. Flächenstücke im Raum

<u>DEF:</u> Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und messbar, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $K \subseteq G$ und $\Phi : G \to \mathbb{R}^3$ injektiv und stetig diffbar. Dann heißt $F := \Phi(K)$ <u>Flächenstück</u> mit Parameterdarstellung Φ und Parameterbereich K.



sei $\Phi(s,t) = \begin{pmatrix} X(s,t) \\ Y(s,t) \\ Z(s,t) \end{pmatrix}$ und $\partial_s \Phi := \begin{pmatrix} \partial_s X \\ \partial_s Y \\ \partial_s Z \end{pmatrix}$, $\partial_t \Phi := \begin{pmatrix} \partial_t X \\ \partial_t Y \\ \partial_t Z \end{pmatrix}$

intuitiv: $\partial_s \Phi(s,t)$ und $\partial_t \Phi(s,t)$ sind Tangentialvektoren an F im Punkt $\Phi(s,t)$, weil Tangenten an die Kurven $s \mapsto \Phi(s,t)$ bzw. $t \mapsto \Phi(s,t)$;

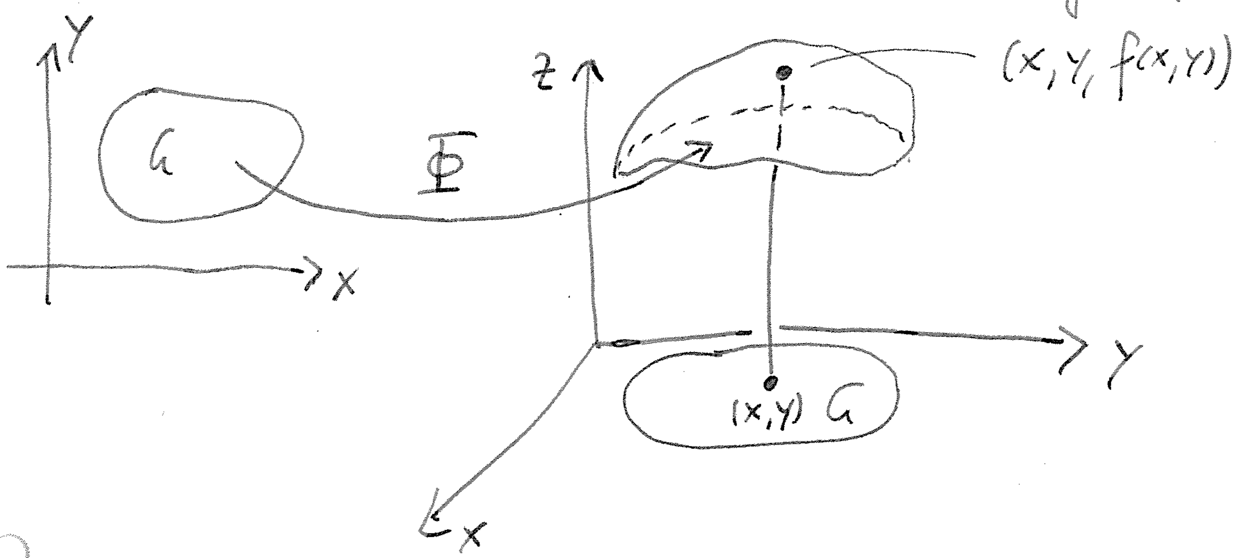
$\partial_s \Phi(s,t) \times \partial_t \Phi(s,t)$ steht daher senkrecht auf die Tangentialebene, also „normal auf F" $\leadsto$

$N(s,t) := \partial_s \Phi(s,t) \times \partial_t \Phi(s,t)$ heißt
<u>Normalenvektor</u> im Punkt $\Phi(s,t)$

<u>BEISP:</u> 1) Funktionsgraph als Flächenstück:

sei $f: G \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $K \subseteq G$ kompakt u. messbar

setze $\Phi(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$; Φ ist injektiv $G \to \mathbb{R}^3$ und stetig diffbar



<u>Normalenvektor</u>

$$N(x,y) = \partial_x \Phi(x,y) \times \partial_y \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Kugelfläche vom Radius R um Ursprung:

$$\Phi(\varphi,\theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

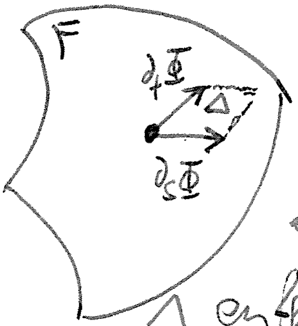
[vgl. Kugelkoord., hier mit fixem Radius R]

$(\varphi,\theta) \in [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

direkte Rechnung $\leadsto$ $N(\varphi,\theta) = R \cdot \cos\theta \cdot \Phi(\varphi,\theta)$

16.3. Oberfläche

Heuristik:



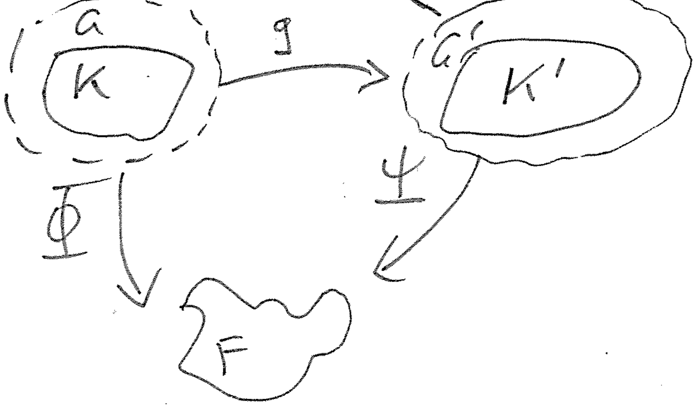
im Kleinen wird das Flächenstück ersetzt durch Parallelogrammfläche Δ aufgespannt von $\partial_s\Phi$ und $\partial_t\Phi$

Fläche von $\Delta = \|\partial_s\Phi \times \partial_t\Phi\| = \|N(s,t)\|$ $\rightsquigarrow$

<u>DEF</u>: F Flächenstück mit Parametrisierung Φ und Parameterbereich K, dann ist der <u>Flächeninhalt</u> bzw. die <u>Oberfläche</u> von F gegeben durch

$$Fl(F) := \int_K \|N(s,t)\| \, d(s,t) = \int_K \|\partial_s\Phi \times \partial_t\Phi\| \, d(s,t)$$

<u>BEM</u>: es ist mittels Substitutionsregel relativ leicht zu sehen, dass obiger Wert für die Oberfläche sich bei zulässigem Wechsel der Parametrisierung nicht ändert (d.h. wenn $F = \Psi(K')$ und



g C^1-Diffeo $G \to G'$ mit $\det Dg(s,t) \neq 0$ $\forall (s,t)$

[vgl. Heuser 2, §208])

BEISP: 1) Kugeloberfläche: Radius R

Φ wie in 16.2, Beisp. 2): $\Phi(\varphi,\theta) = R\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

$S_R := \Phi\left([0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$ hat Oberfläche

$$\mathrm{Fl}(S_R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \|R\cos\theta\cdot\underbrace{\Phi(\varphi,\theta)}_{\text{hat Länge } = R}\|\,d\varphi\,d\theta =$$

hat Länge $= R$, $\cos\theta > 0$

$$= R\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\|\Phi(\varphi,\theta)\|\,d\varphi\,d\theta = R^2\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta =$$

$$= R^2\cdot 2\pi\cdot\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = R^2\cdot 2\pi\cdot(1-(-1)) = 4\pi R^2$$

2) F = Funktionsgraph: $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix}x\\ y\\ f(x,y)\end{pmatrix}$ wie in 16.2, Bsp. 1

$$\mathrm{Fl}(F) = \int_K \left\|\begin{pmatrix}-\partial_x f\\ -\partial_y f\\ 1\end{pmatrix}\right\|\,d(x,y) = \int_K \sqrt{1+(\partial_x f)^2+(\partial_y f)^2}\,d(x,y)$$

= 9.1.2012 =

16.4. Oberflächenintegrale

Sei $F = \Phi(K)$ ein Flächenstück im $\mathbb{R}^3$

1) skalares Feld: für $f : F \to \mathbb{R}$ stetig heißt

$$\int_F f \, d\sigma := \int_K f(\Phi(s,t)) \cdot \| \underbrace{N(s,t)}_{\partial_s \Phi \times \partial_t \Phi} \| \, d(s,t)$$

Oberflächenintegral von f über F

Spezialfall $f = 1$ ergibt Oberfläche von ~~F~~ $Fl(F)$

2) orientiertes Integral eines Vektorfeldes:

setze $$n(s,t) := \begin{cases} \dfrac{N(s,t)}{\|N(s,t)\|} & \text{falls } N(s,t) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } N(s,t) = 0 \end{cases}$$

Normaleneinheitsvektor

sei $v : F \to \mathbb{R}^3$ stetiges Vektorfeld, dann heißt

$$\int_F \langle v | n \rangle \, d\sigma$$ Oberflächenintegral von v über F

(manchmal auch $\int_F v \, d\vec{\sigma}$ geschrieben; $d\vec{\sigma} = n \cdot d\sigma$)

Bem: die hier definierten Oberflächenintegrale ändern sich nicht unter zugelassenem Parameterwechsel (wobei in 2) der Wechsel pos. Det. der Jacobi-Matrix haben muss)

16.5. Integralsatz von Stokes

Rotation eines Vektorfeldes $v=\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}:\mathbb{R}^3\supseteq G\to\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} v := \begin{pmatrix}\partial_y R-\partial_z Q\\ \partial_z P - \partial_x R\\ \partial_x Q-\partial_y P\end{pmatrix} \text{„}=\text{"} \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$$

wieder ein VF

SATZ: Es gelte

(a) $F=\Phi(K)$ ist Flächenstück, wobei Φ sogar C^2 ist und K ein C^1-NB bzgl. beider Achsen im $\mathbb{R}^2$

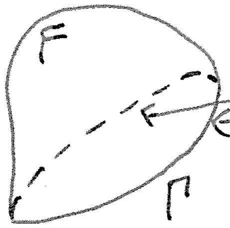
(b) Bild $\Phi(\partial K)$ der pos. orientierten Randkurve ∂K sei durch stückw. stetig diffbaren Weg Γ im $\mathbb{R}^3$ gegeben – „Randkurve von F"

(c) das VF v sei stetig diffbar auf offener Obermenge von F.

Dann gilt

$$\boxed{\int_F \langle \operatorname{rot} v \mid n\rangle \, d\sigma = \int_\Gamma v}$$

Oberflächenintegral von rot v über F; n Normaleneinheitsvektor



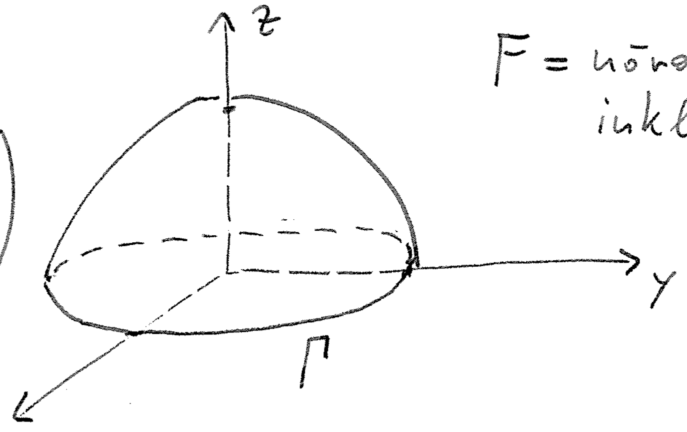
Kurvenintegral über Randkurve von F

[Beweis → Heuser, Satz 209.1]

BEM: $\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen

d.h: wenn $G \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig und $v: G \to \mathbb{R}^3$ $\mathcal{C}^1$, dann gilt: v besitzt Stammfunktion $\iff \operatorname{rot} v = 0$

BEISP:



F = nördliche Hemisphäre inklusive Äquator (Radius = 1)

$$\Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$K = [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]$

Normalenvektor $N(\varphi,\theta) = \cos\theta \cdot \Phi(\varphi,\theta)$

normiert: $n(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi,\theta)$

Randkurve Γ = Einheitskreis in xy-Ebene,

d.h. $\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

sei $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$

es ist $\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x \\ 0-y \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$, somit

$$\int_F \langle \operatorname{rot} v \,|\, n \rangle \, d\sigma = \int_K \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \overbrace{\cos\theta}^{\|N(\varphi,\theta)\|} \cdot \, d(\varphi,\theta) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - \sin^2\varphi\cos^2\theta)\cos\theta \, d\varphi \, d\theta = \ldots \text{ uffh!?} \ldots$$

mittels Integralsatz von Stokes aber einfacher:

$$\int_F \langle \operatorname{rot} v | n\rangle \, d\sigma = \int_\Gamma v = \int_0^{2\pi} \Big\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cos t \sin t \end{pmatrix}}_{v(\Gamma(t))} \Big| \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ +\cos t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dot\Gamma(t)} \Big\rangle \, dt =$$

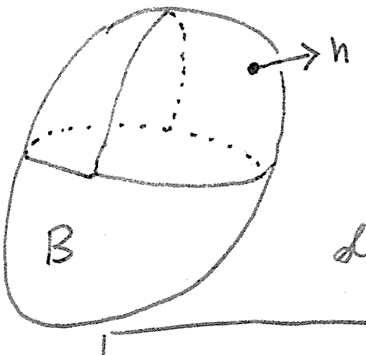
$$= -\int_0^{2\pi} \sin t \, dt = 0$$

16.6. Integralsatz von Gauß [Bew. in Heuser, §§210, 216, 217]

<u>Divergenz eines Vektorfeldes</u> $v = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \supseteq G \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} v := \partial_x P + \partial_y Q + \partial_z R = \text{,,} \Big\langle \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \Big| \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \Big\rangle \text{''} \quad \text{skalare Fkt}$$

<u>SATZ</u>: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $B = \overline{U}$ kompakt (und J.-messbar) mit Eig., dass der Rand ∂B sich als Vereinigung endlich vieler Flächenstücke mit nach außen weisendem Normaleneinheitsvektor n derselben lässt.



Für jedes stetig diffbare Vektorfeld v auf einer offenen Obermenge von B gilt dann

$$\boxed{\int_B \operatorname{div} v \, d(x,y,z) = \int_{\partial B} \langle v | n \rangle \, d\sigma}$$

links: Volumsintegral

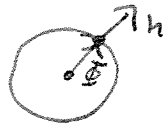
rechts: Oberflächenintegral über Randfläche

BEISP: $U = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<1\}$, somit

$B = \overline{U} = K_1(0)$ … abgeschl. Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$

$$\partial B = S^2 \ldots \text{ mit } \Phi(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad (\varphi,\theta) \in [0,2\pi]\times[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

$n(\varphi,\theta) = \Phi(\varphi,\theta)$ äußerer Norm.einh.vektor



sei $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$, dann ist

$$\int_{S^2} \langle v|n\rangle \, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4\varphi\cos^4\theta + \sin^4\cos^4\theta + \sin^4\theta)\cos\theta \, d\theta\, d\varphi =$$

… etwas unhandlich,

aber einfacher mit Hilfe des Satzes von Gauß:

$$\int_{S^2} \langle v|n\rangle \, d\sigma = \int_B \operatorname{div} v \, d(x,y,z) = \left[\operatorname{div} v = 3x^2+3y^2+3z^2\right]$$

$$= 3\cdot\int_B (x^2+y^2+z^2)\, d(x,y,z) = 3\cdot\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cdot r^2\cdot\cos\theta \, d\theta\, d\varphi\, dr =$$

[Kugelkoord.]

$$= 3\cdot 2\pi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\cdot\int_0^1 r^4\, dr = 6\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{12}{5}\pi$$

= 10.1.2012 =

BEM: die Integralsätze von Gauß-Green, Stokes und Gauß können bei geeigneter Interpretation als Varianten des HSDI für höhere Dimensionen aufgefasst werden. [vgl. Heuser §217]