§17 AUSBLICK AUF DIE KOMPLEXE ANALYSIS

$G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$ $\forall z \in G$

mittels $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir daraus reelle Funktionen $u: G \to \mathbb{R}$, $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$

und $v: G \to \mathbb{R}$, $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$

mit der Eigenschaft

$$\boxed{f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)}$$

(und $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ wird als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ aufgefasst)

Wir setzen $F: G \to \mathbb{R}^2$, $F := \binom{u}{v}$. ["$f = u + i \cdot v$"]

<u>17.1. DEF:</u> f heißt in $z_0 \in G$ <u>komplex differenzierbar</u>, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert.}$$

In diesem Fall heißt der Wert $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ die (komplexe) <u>Ableitung von f bei z_0</u>. Ist f in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex diffbar, dann heißt f <u>komplex diffbar auf G</u> und wir erhalten die <u>Ableitung(sfunktion)</u> $f': G \to \mathbb{C}$ durch $z \mapsto f'(z)$.

17.2. BEM: genau wie im Reellen zeigt man mühelos

(i) f komplex diffbar in z_0 $\Leftrightarrow$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ und $\exists\, r: G \to \mathbb{C}$, sodass

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \alpha \cdot h + r(h),$$

wobei $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ $[h \in \mathbb{C}!]$

In dem Fall ist $\alpha = f'(z_0)$

(ii) f komplex diffbar in z_0 $\Rightarrow$ f stetig in z_0

$[\, f(z_0+h) = f(z_0) + \alpha \cdot h + r(h) \to f(z_0) + 0 \quad (h \to 0)\,]$

Wir wollen nun die komplexe Differenzierbarkeit von $f: G \to \mathbb{C}$ mit Hilfe der zugeordneten Funktion $F: G \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$ beschreiben:

17.3. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

sei $f: G \to \mathbb{C}$ komplex diffbar in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$

und $f'(z_0) = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

$\exists\, r: G \to \mathbb{C}$, $r = r_1 + i r_2$, wobei r_1, r_2 reellwertig, sodass

$$\underbrace{f(z_0+h) - f(z_0)}_{\substack{f(x_0+h_1+i(y_0+h_2)) \\ -f(x_0+iy_0)}} = f'(z_0)\cdot h + r(h) = [h = h_1 + i h_2]$$

$$= (\alpha+i\beta)\cdot(h_1+ih_2) + \underbrace{r_1(h_1+ih_2)}_{=:\tilde{r}_1(h_1,h_2)} + i\,\underbrace{r_2(h_1+ih_2)}_{=:\tilde{r}_2(h_1,h_2)}$$

daher gilt

$$u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0) + i\big(v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0,y_0)\big) =$$

$$= f(x_0+h_1+i(y_0+h_2)) - f(x_0,y_0) = \alpha h_1 - \beta h_2 + i(\beta h_1 + \alpha h_2) +$$

$$+ \tilde{r}_1(h_1,h_2) + i\,\tilde{r}_2(h_1,h_2)$$

[Re, Im separat]

$$\Rightarrow u(x_0+h_1, y_0+h_2) - u(x_0,y_0) = \left\langle \begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} \right\rangle + \tilde{r}_1(h_1,h_2)$$

und

$$v(x_0+h_1, y_0+h_2) - v(x_0,y_0) = \left\langle \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix} \right\rangle + \tilde{r}_2(h_1,h_2),$$

wobei $\left| \dfrac{\tilde{r}_j(h_1,h_2)}{\left\|\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right\|} \right| = \dfrac{|r_j(h)|}{|h|} \leq \dfrac{|r(h)|}{|h|} \to 0 \ (h \to 0)$

somit ist u bzw. v diff'bar bei (x_0,y_0) und

$$Du(x_0,y_0) = (\partial_x u(x_0,y_0), \partial_y u(x_0,y_0)) = (\alpha, -\beta)$$

und

$$Dv(x_0,y_0) = (\partial_x v(x_0,y_0), \partial_y v(x_0,y_0)) = (\beta, \alpha),$$

d.h. $DF(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$; wegen $DF = \begin{pmatrix}\partial_x u & \partial_y u\\ \partial_x v & \partial_y v\end{pmatrix}$

also insbesondere:

$$(*) \quad \partial_x u(x_0,y_0) = \partial_y v(x_0,y_0), \quad \partial_y u(x_0,y_0) = -\partial_x v(x_0,y_0)$$

umgekehrt seien u, v diffbar und es gelte (*),

dann kann obige Rechnung rückwärts gelesen werden und ergibt, dass f komplex diffbar in $z_0 = x_0 + iy_0$ ist und

$$f'(x_0+iy_0) = \underbrace{\partial_x u(x_0,y_0)}_{\alpha} + i\,\underbrace{\partial_x v(x_0,y_0)}_{\beta} \qquad (**)$$

Zusammenfassend gilt daher folgender

<u>SATZ</u>: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ mit zugeordneter Abb. $F = \binom{u}{v}: G \to \mathbb{R}^2$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist komplex diffbar auf G

(ii) F ist diffbar auf G [d.h. u und v diffbar auf G]

und es gelten die <u>Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen</u>

[Cauchy 1814, Riemann 1851]

$$\boxed{\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v}$$

<u>BEM</u>: es ist in dem Fall auch $f': G \to \mathbb{C}$ <u>stetig</u>

$\iff u, v$ <u>stetig diffbar</u>,

weil $f' = \partial_x u + i\partial_x v$ gilt [vgl. (**)]

17.4. DEF: $f: G \to \mathbb{C}$ heißt <u>holomorph</u> auf G, wenn sie komplex differenzierbar mit stetiger Ableitung $f': G \to \mathbb{C}$ ist.

Also gilt gemäß 17.3: f holomorph
[Euler 1777]

$$\Updownarrow \qquad [\text{„}f = u + iv\text{"}]$$

u, v sind <u>stetig</u> diffbar <u>und</u> es gelten die Cauchy-Riemann-DGL

17.5. BEISP:

1) betrachte $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

$z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$: $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$

$$\partial_x u = e^x \cos y = \partial_y v, \quad \partial_y u = -e^x \sin y = -\partial_x v$$

und part. Abl. stetig $\Rightarrow$ f holomorph und

$$f'(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

2) $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot z^{2k+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

ist holomorph mit $h'(z) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} =: \cos(z)$

3) $g(z)=\bar{z}$, d.h. $g(x+iy)=x-iy$

$u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$

$\partial_x u = 1 \neq -1 = \partial_y v$, also C.R.-DGL nicht erfüllt

$\Rightarrow$ g nicht komplex diffbar!

17.6. BEM: Goursat hat 1884 schon bemerkt, dass jede komplex diffbare Funktion sogar automatisch holomorph sein muss (und weiters sogar unendlich oft komplex diffbar ist)

17.7. Komplexe Wegintegrale

- wir identifizieren $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ etwas salopp mit dem Weg $t\mapsto\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$; Begriffe wie (stückweise) stetig diffbar etc. übertragen sich somit auf komplexe Weg $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ und $\dot\gamma(t)=\dot x(t)+i\dot y(t)$ entspricht $\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix}$ usw.

- für $g:[a,b]\to\mathbb{C}$ stetig mit $g(t)=g_1(t)+ig_2(t)$ definieren wir einfach das Integral durch

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b g_1(t)\,dt + i\cdot\int_a^b g_2(t)\,dt$$ (genügt, g_1 und g_2 integrierbar)

DEF: sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (stückweise) stetig diffbar und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, wobei $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $\gamma([a,b]) \subseteq G$.
Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, dt$$

das Wegintegral von f längs γ.

Mittels $f(\xi + i\eta) = u(\xi,\eta) + i \cdot v(\xi,\eta)$ und $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ schreibt sich das konkret auch so

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{u(x(t),y(t)) + i v(x(t),y(t))} \cdot (\dot x(t) + i \dot y(t))\, dt =$$

$$= \int_a^b \Big(u(x(t),y(t)) \cdot \dot x(t) - v(x(t),y(t))\, \dot y(t) + i\, u(x(t),y(t)) \cdot \dot y(t) + i\, v(x(t),y(t)) \cdot \dot x(t) \Big)\, dt$$

$$= \int_a^b \Big(u(x(t),y(t)) \cdot \dot x(t) - v(x(t),y(t)) \cdot \dot y(t) \Big)\, dt +$$

$$+ i \int_a^b \Big(u(x(t),y(t)) \cdot \dot y(t) + v(x(t),y(t)) \cdot \dot x(t) \Big)\, dt =$$

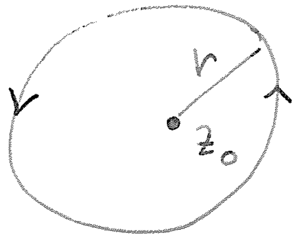
$$= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} \right\rangle + i \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} \right\rangle = \boxed{\int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \cdot \int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}}$$

[als Wege im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst]

<u>BEISP:</u> $\gamma(t) = z_0 + re^{it} = z_0 + r(\cos t + i \sin t)$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ beschreibt pos. or.

Kreis vom Radius r um z_0



$\dot\gamma(t) = r \cdot (-\sin t + i \cdot \cos t) = ire^{it}$

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \cdot ire^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi i$$

allg. für $m \in \mathbb{Z}$: $\displaystyle\int_\gamma (z - z_0)^m\, dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^m ire^{it}\, dt =$

$$= ir^{m+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{itm} e^{it}\, dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{it(m+1)}\, dt =$$

$$= ir^{m+1} \cdot \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos((m+1)t)\, dt}_{①} + i \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin((m+1)t)\, dt}_{②} \Big)$$

$$② = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 0\, dt, & m = -1, \\ \frac{1}{m+1} \int_0^{2\pi(m+1)} \sin\tau\, d\tau, & m \neq -1 \end{cases} = 0, \quad ① = \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1\, dt, & m = -1, \\ \frac{1}{m+1} \int_0^{2\pi(m+1)} \cos\tau\, d\tau, & m \neq -1 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi, & m = \\ 0, & m \neq - \end{cases}$$

d.h. insgesamt

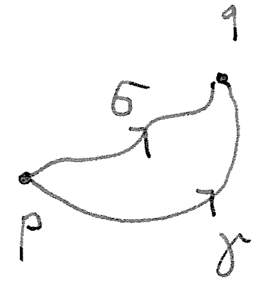
$$\int_\gamma (z - z_0)^m\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1. \end{cases}$$

17.8. Integralsatz von Cauchy: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.
Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen stückw. diffbaren Weg γ in G.

Bem: Somit ist das Integral über f stets wegunabhängig, denn für Wege γ und σ von p nach q ist $\overbrace{\gamma \oplus (\ominus\sigma)}^{\gamma \ominus \sigma}$ ein geschlossener Weg.



Daher

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f - \int_\sigma f + \int_\sigma f = \int_{\gamma\ominus\sigma} f + \int_\sigma f = 0 + \int_\sigma f = \int_\sigma f.$$

Beweis des Satzes: Sei $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

f holomorph $\Rightarrow$ C.R.DGL: $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$
und u, v sind C^1

$\Rightarrow$ die beiden VF $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ erfüllen die Integrabilitätsbedingungen auf G, also $\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = 0$

$$\overset{17.7}{\Rightarrow} \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = 0 + i\cdot 0 = 0$$

$\square$

17.9. SATZ: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig mit wegunabhängigem Integral.
Für beliebiges festes $a \in G$ definieren wir $F_0: G \to \mathbb{C}$ durch

$$F_0(z) := \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$$, wobei γ ein stückw. stetig diffbarer Weg von a nach z ist.

Dann gilt:

(i) F_0 ist holomorph und $F_0' = f$,
d.h. F_0 ist eine holomorphe Stammfunktion für f

(ii) Ist $F: G \to \mathbb{C}$ eine beliebige Stammfunktion für f, d.h. F komplex diffbar und $F' = f$, dann gilt für jeden stückw. C^1-Weg γ von a nach q in G:

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = F(q) - F(a).$$

– also eine komplexe Version des HSDI !

Beweis: sei wie üblich $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$;
(i) Integrale über VF $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ sind wegunabhängig $\Rightarrow$

$\varphi(x,y) := \int_\gamma \binom{u}{-v}$, $\psi(x,y) = \int_\gamma \binom{v}{u}$ $(z = x+iy)$ def. reellwertige Stammfkt.

$\varphi, \psi : G \to \mathbb{R}$ für $\binom{u}{-v}$ bzw. $\binom{v}{u}$, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi &= u \\ \partial_y \varphi &= -v \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \partial_x \psi &= v \\ \partial_y \psi &= u \end{aligned} \qquad [\text{insbes. } \varphi, \psi\ C^1]$$

$\Rightarrow$ $\partial_x \varphi = \partial_y \psi$ und $\partial_y \varphi = -\partial_x \psi$, das sind die Cauchy-Riemann-DGL für φ und ψ

$\Rightarrow$ $x+iy \mapsto \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ ist holomorph.

wegen $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \binom{u}{-v} + i \int_\gamma \binom{v}{u} = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$

ist also $F_0(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ und somit F_0 holomorph

weiters $F_0' = \partial_x \varphi + i\partial_x \psi = u + iv = f$

(ii) wegen $F' = F_0' \Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : F = F_0 + c$ [wie im Reellen]

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = F_0(q) = F_0(q) - \underbrace{F_0(a)}_{0} = (F(q)-c) - (F(a)-c) = F(q) - F(a)$$

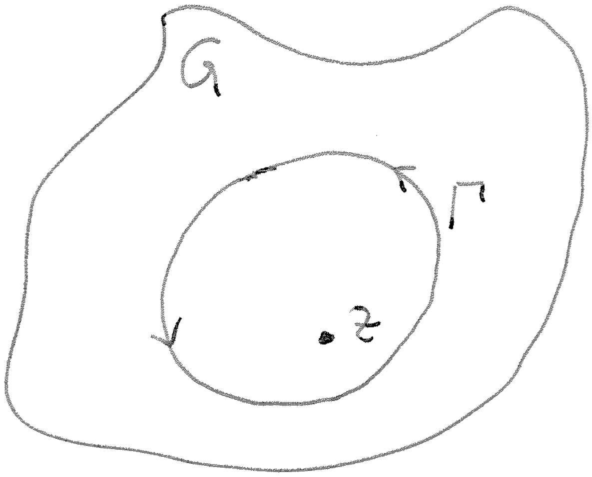
$\square$

17.10. Cauchysche Integralformel

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.

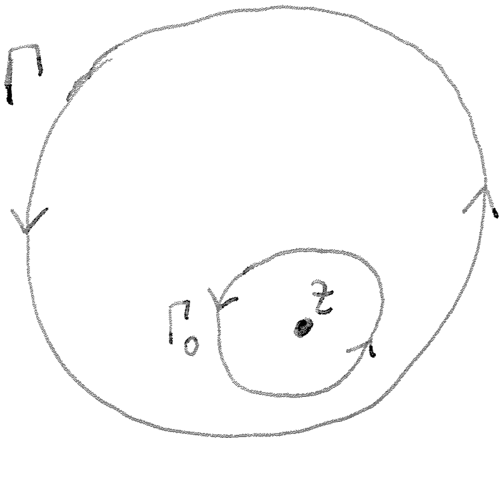
Γ sei positiv orientierter Kreis innerhalb G, dann gilt für jedes z innerhalb Γ die Formel

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}$$



Diese Formel besagt eigentlich, dass die Werte einer holomorphen Funktion im Inneren einer Kreisscheibe schon allein durch die Werte am Randkreis bestimmt sind.

<u>Beweis:</u> sei z innerhalb Γ beliebig, aber fest; wähle kleinen pos. orientierten Kreis Γ_0 mit Mittelpunkt z, sodass Γ_0 noch innerhalb Γ liegt:



$\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ ist holomorph auf $G \setminus \{z\}$

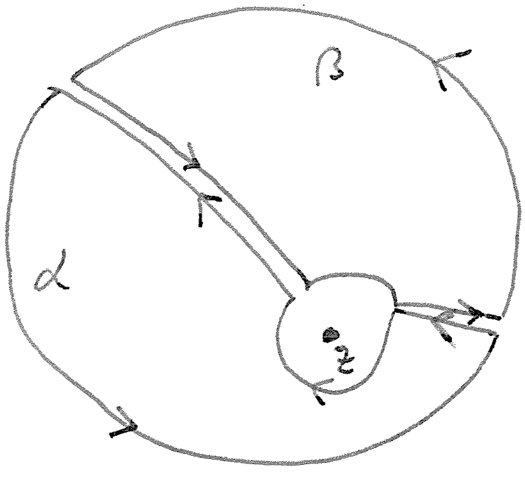
es gilt

$$(*) \quad \boxed{\int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta,}$$

Weil

$$\int_\Gamma - \int_{\Gamma_0} = \int_{\Gamma \ominus \Gamma_0} = \int_{\alpha \oplus \beta} = \int_\alpha + \int_\beta \underset{\uparrow}{=} 0 + 0 = 0,$$

wobei



und α bzw. β jeweils in sternförmige Holomorphiegebiete von $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ gelegt werden können.

Ebenso gilt $\boxed{\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\Gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (**)}$

Somit können wir schreiben

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z) + f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = [(*) \text{ und } (**)]$$

$$= \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot \underbrace{\int_{\Gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{\substack{\shortparallel\ [\text{Beisp. } 17.7.] \\ 2\pi i}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= f(z) + \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta}^{=:\, h(z)}$$; noch z.z.: $\underline{h(z) = 0}$

sei $\varepsilon > 0$ beliebig:

- $\exists \delta > 0 \ \forall \zeta$ mit $|\zeta - z| < \delta$ gilt $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$
  [Stetigkeit von f]

- wähle Radius r der Kreislinie Γ_0 um z so klein, dass $r < \delta$ gilt

dann ist $\forall \zeta \in \Gamma_0$: $\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| < \frac{\varepsilon}{r}$ und weiter

$$|h(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \underbrace{\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right|}_{< \frac{\varepsilon}{r}} d\zeta <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot \text{Länge}(\Gamma_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} h(z) = 0$$

□

17.11. Potenzreihen definieren holomorphe Funktionen

sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe $(z_0 \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C} \ \forall k)$

mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f: U_R(z_0) \to \mathbb{C}$

[offenen Kreis vom Radius R um z_0]

die dadurch gegebene Funktion

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (|z - z_0| < R).$$

Sei $z_1 \in U_R(0)$ und $z_1 \neq z$: $(z - z_0)^k = ((z - z_1) + (z_1 - z_0))^k \overset{[\text{Binom. Lehrsatz}]}{=}$

$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (z_1 - z_0)^{k-l} \cdot (z - z_1)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} (z_1 - z_0)^{k-l} (z - z_1)^l$$

$\left[\binom{k}{l} = 0 \text{ für } l > k\right]$

daher gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} (z_1 - z_0)^{k-l} (z - z_1)^l$$

[abs. Konv.]

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{k}{l} (z_1 - z_0)^{k-l} (z - z_1)^l =$$

$\left[\binom{k}{l} = 0 \text{ für } k < l\right]$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=l}^{\infty} a_k \binom{k}{l} (z_1 - z_0)^{k-l} \right)}_{=: b_l} \cdot (z - z_1)^l = \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z - z_1)^l$$

neu Entwicklungs-punkt z_1, Koeff. b_l

$$\Rightarrow \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} b_l (z - z_1)^l - b_0}{z - z_1} = \frac{b_1 (z - z_1) + b_2 (z - z_1)^2 + \ldots}{z - z_1}$$

$$= b_1 + b_2 (z - z_1) + b_3 (z - z_1)^2 + \ldots \longrightarrow b_1 \quad (z \to z_1)$$

$\Rightarrow$ f komplex diffbar in z_1 und

$$f'(z_1) = b_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \binom{k}{1} (z_1 - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (z_1 - z_0)^{k-1}$$

z_1 beliebig in $U_R(0)$ $\rightsquigarrow$ f ist komplex differbar auf $U_R(0)$ und $f': U_R(0) \to \mathbb{C}$ gegeben durch Potenzreihe $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1}$,

d.h. gliedweise abgeleitete Reihe;

Prop. 8.2 $\Rightarrow$ Konv.radius der abgel. Reihe wieder R

$\Rightarrow$ f' stetig auf $U_R(0)$

$\Rightarrow$ f holomorph auf $U_R(0)$.

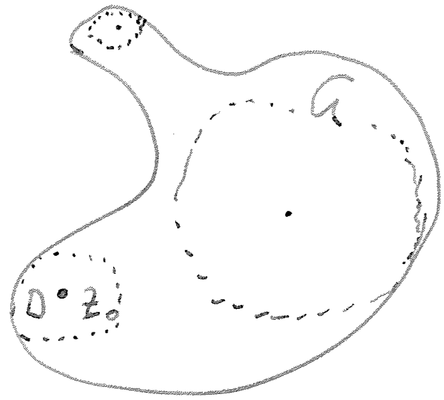
D.h. jede Potenzreihe stellt auf ihrem (offenen) Konvergenzkreis eine holomorphe Funktion dar!

Wir werden zeigen, dass davon sogar eine Art Umkehrung gilt: holomorphe Funktionen lassen sich zumindest in genügend kleinen Kreisscheiben immer in eine Potenzreihe entwickeln.

Erinnere: dies war für unendlich oft reell differbare Funktionen nicht immer möglich.

17.12. ENTWICKLUNGSSATZ: $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Sei D die größte offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0, sodass $D \subseteq G$. Dann gibt es eine eindeutige Potenzreihenentwicklung

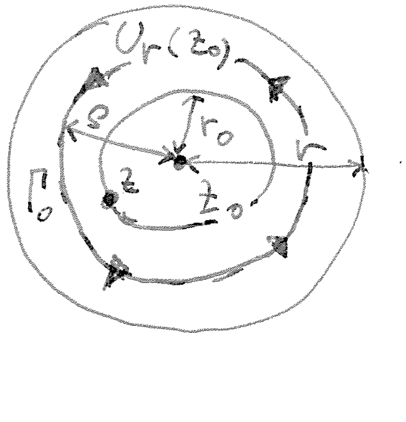
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in D.$$



Beweis: sei $r>0$ so gewählt, dass $U_r(z_0) \subseteq G$

für $z \in U_r(z_0)$ gilt $r_0 := |z-z_0| < r$

sei $\rho > 0$ mit $r_0 < \rho < r$ und Γ_0 die ~~Kreis~~ positiv orientierte Kreislinie vom Radius ρ um den Mittelpunkt z_0.



Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$\forall \zeta \in \Gamma_0: \quad \frac{|z-z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{r_0}{\rho} < 1 \quad \text{und}$$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} =$$

$$= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n$$

f sktig, Kreislinie Γ_0 kompakt $\Rightarrow \exists M \geq 0: |f(\zeta)| \leq M \quad \forall \zeta \in \Gamma_0$

daher $\forall \zeta \in \Gamma_0$:

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n \right| \leq \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot r_0^n = \frac{M}{\rho} \cdot \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} \cdot \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^n$ konvergent, weil $\frac{r_0}{\rho} < 1$

Satz von Weierstraß [komplexe Fassung] $\Rightarrow$

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n$ ist gleichmäßig

konvergent (als Fkt.reihe bzgl. ζ-Variable);

daher darf $\sum_{n=0}^{\infty} \ldots$ mit $\int_{\Gamma_0}$ vertauscht werden und

ergibt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right)}_{=: a_n} \cdot (z-z_0)^n;$$

Eindeutigkeit aus Identitätssatz für Potenzreihen $\square$

17.13. KOR: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt:

(i) f ist unendlich oft komplex diffbar

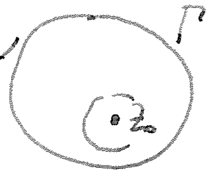
(ii) für jeden positiv orientierten Kreis $\Gamma \subseteq G$ und z_0 innerhalb Γ gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

Cauchysche Ableitungsformeln

Beweis: (i) Argumentation von 17.7. sukzessive auf $f, f', f'', \ldots$ anwenden [wegen 17.12. ist f je durch eine Potenzreihe gegeben]

(ii) es ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und der Beweis von 17.12. zeigt für einen kleinen Kreis Γ_0 um z_0 (innerhalb Γ):



$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \underset{\text{[wie im Bew. von 17.10]}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

andererseits gilt wegen Potenzreihendarstellung

$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, woraus die Behauptung folgt

$\square$