VORBEMERKUNGEN ZU TITEL UND INHALT DIESER VO

<u>SS 11</u>: Folgen in $\mathbb{R}$, Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

<u>WS 11/12</u>: Folgen in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$,

Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\left[\text{oder } \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^d \underset{\text{als } \mathbb{R}\text{-VR}}{\cong} \mathbb{R}^{2d}\right]$

also Variable(n) $z = x + iy \in \mathbb{C}$ oder $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

und Funktionswerte $f(z) = u(z) + i v(z) \in \mathbb{C}$ oder

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$$

← das steckt alles in dem laaaaaaangen VO-Titel!

<u>BEM</u>: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber $\mathbb{C}$ hat zusätzlich eine „eigene" Körperstruktur!

Daher ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ „mehr" als nur eine Abb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Auf $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$ gibt es keine (kommutative) Körperstruktur.

$n = 4$: Quaternionen ... Schiefkörper (nicht kommutativ)

$n = 8$: Oktaven ... nicht assoziativ

! Literatur: Ebbinghaus et. al.: Zahlen, Springer-Verlag.

Differentiation: lin. Approximation, Tangente, Tangentialebene

implizite Funktionen: $f(x,y) = 0$ auflösen durch $y = h(x)$?

Kurven, Flächenstücke .... Bogenlänge, Oberfläche ⇝ Integral

§7 KONVERGENZ UND STETIGKEIT IN DER KOMPLEXEN EBENE

<u>erinnere:</u> $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists! (x,y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + iy$,

$x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$; $\bar{z} = x - iy$ konjugiert komplexe Zahl

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Absolutbetrag $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Körper und $\mathbb{R}$ kann als Teilkörper [Unterkörper :-)] von $\mathbb{C}$ aufgefasst werden vermöge (des injektiven Homomorphismus) $x \mapsto x + i\cdot 0$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

(Begriff des Absolutbetrages stimmt dann überein, d. h. $\underbrace{|x + i\cdot 0|}_{\text{Abs.betr. einer kompl. Zahl}} = \sqrt{x^2 + 0^2} = \underbrace{|x|}_{\text{Abs.betr. auf } \mathbb{R}}$, daher keine neue Notation)

<u>7.1. Eigenschaften des Absolutbetrages $|.| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$:</u>

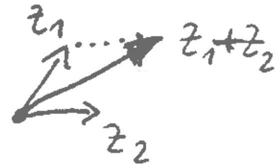
Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $|z| \geq 0$ und weiters: $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(ii) $|\bar{z}| = |z|$ (iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(iv) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

(v) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung



Beweis: sei $z = x + iy$, $z_k = x_k + iy_k$ $(k=1,2)$

(i): $|z| \geq 0$ und $|0| = 0$ klar nach Def. von $|z|$;

$$|z| = 0 \Rightarrow 0 \leq \underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{y^2}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ und } y = 0$$

(ii): klar, weil $|\overline{z}| = \sqrt{x^2+y^2}$

(iii): $\underbrace{|z_1 \cdot z_2|^2} = (z_1 \cdot z_2) \cdot \underbrace{\overline{(z_1 \cdot z_2)}}_{= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = \underbrace{|z_1|^2 \cdot |z_2|^2}$

[$|.| \geq 0$, also Wurzel OK]

(iv) $|Re(z)|^2 = |x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 = |z|^2$; für $Im(z)$ analog

(v) $\underbrace{|z_1 + z_2|^2} = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) =$

$$= \underbrace{z_1 \cdot \overline{z_1}}_{|z_1|^2} + \underbrace{\underbrace{z_2 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2}}_{\overline{(z_1 \cdot \overline{z_2})} + z_1 \overline{z_2}}}_{\underbrace{2 \cdot Re(z_1 \overline{z_2})}_{|\cdot| \underset{(iv)}{\leq} 2 \cdot |z_1 \cdot \overline{z_2}| \underset{(iii),(ii)}{=} 2|z_1| \cdot |z_2|}} + \underbrace{z_2 \cdot \overline{z_2}}_{|z_2|^2} \leq (*)$$

[$w + \overline{w} = 2 \cdot Re(w)$]

$(*) \leq |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = \underbrace{(|z_1| + |z_2|)^2}$, Wurzelziehen...

$\square$

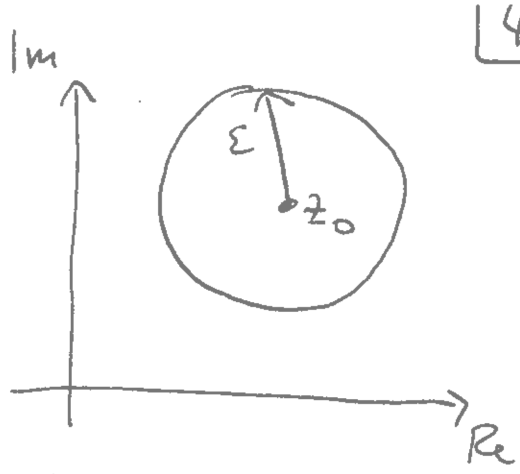
WH: $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

$w + \overline{w} = 2 \cdot Re(w)$, $w - \overline{w} = 2i \cdot Im(w)$

$Re(z \pm w) = Re(z) \pm Re(w)$....

– direkt nachrechnen mittels $z = x + iy$, $w = u + iv$...

7.2. Konvergenz in $\mathbb{C}$:



offene Kreisscheibe vom Radius ε um z_0

DEF: (i) $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \}$$

heißt <u>ε-Umgebung</u> von z_0

(ii) Eine <u>Folge komplexer Zahlen</u> ist eine Abbildung $c : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$; wir schreiben $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n := c(n)$

(iii) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $z_0 \in \mathbb{C}$.
(c_n) <u>konvergiert</u> gegen z_0, $c_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = z_0$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |c_n - z_0| < \varepsilon$$

äquivalent: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n \geq N : \; c_n \in U_\varepsilon(z_0)$

(sieht also formal genau so aus wie in $\mathbb{R}$!)

SATZ: Sei (c_n) Folge in $\mathbb{C}$, dann ist äquivalent:

(i) (c_n) ist konvergent (in $\mathbb{C}$).

(ii) Sowohl $(\mathrm{Re}(c_n))$ als auch $(\mathrm{Im}(c_n))$ konvergieren (in $\mathbb{R}$).

In dem Fall gilt $\boxed{\lim c_n = \lim \mathrm{Re}(c_n) + i \cdot \lim \mathrm{Im}(c_n)}$

Beweis: sei $a_n := \mathrm{Re}(c_n)$, $b_n := \mathrm{Im}(c_n)$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

(i) ⇒ (ii): setze $c := \lim c_n$, $a := \mathrm{Re}(c)$, $b := \mathrm{Im}(c)$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$: $|c_n - c| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Dann gilt für jedes $n \geq n_0$

$$|a_n - a| = |\mathrm{Re}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon$$

und

$$|b_n - b| = |\mathrm{Im}(c_n - c)| \leq |c_n - c| < \varepsilon.$$

Also $a_n \to a$, $b_n \to b$.

(ii) ⇒ (i): setze $a := \lim a_n$, $b := \lim b_n$, $c := a + ib$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\begin{cases} |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \forall n \geq n_0$.

Dann gilt $\forall n \geq n_0$

$$\underbrace{|\underbrace{(a_n + ib_n)}_{c_n} - \underbrace{(a + ib)}_{c}|}_{|c_n - c|} = |(a_n - a) + i(b_n - b)| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad c_n \to c \quad (n \to \infty)$$

□

BEISP.: $c_n = \frac{n}{2n+1} + \frac{i}{n} \to \frac{1}{2} + i \cdot 0 = \frac{1}{2}$,

weil $\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{n} \to 0$

= 3.10.2011 =

KOR: (i) (c_n) konvergent $\Rightarrow \lim \overline{c_n} = \overline{\lim c_n}$

(ii) Folge (c_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn (c_n) eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_0 : |c_n - c_m| < \varepsilon. \qquad (CF)$$

Beweis: (i) $\overline{\lim c_n} = \overline{\lim Re(c_n) + i \lim Im(c_n)} =$

$= \lim Re(c_n) - i \lim Im(c_n) = \lim (Re(c_n) - i Im(c_n)) =$

$= \lim \overline{c_n}$

(ii) (CF) $\Leftrightarrow$ sowohl $(Re(c_n))$ als auch $(Im(c_n))$ sind CF in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(Re(c_n))$ und $(Im(c_n))$ konvergent $\Leftrightarrow$ (c_n) konvergent

$\square$

Rechenregeln für Grenzwerte (Bew. analog zu jenen für Folgen in $\mathbb{R}$)

Wenn $(c_n), (d_n)$ konv. Folgen in $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\lim (c_n + d_n) = \lim c_n + \lim d_n$$

$$\lim (\lambda \cdot c_n) = \lambda \cdot \lim c_n$$

$$\lim (c_n d_n) = (\lim c_n) \cdot (\lim d_n)$$

falls $d_n \neq 0$ für fast allen: $\lim \frac{c_n}{d_n} = \frac{\lim c_n}{\lim d_n}$

7.3. Komplexe Reihen

Seien $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k$ Partialsumme.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ ist <u>konvergent</u>, falls (s_n) konvergiert. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ ist <u>absolut konvergent</u>, falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ konvergiert (in $\mathbb{R}$)

- wie in $\mathbb{R}$: abs. konv. $\Rightarrow$ konv.; abs. Konv. erlaubt Umordnungen
- folgende <u>Konvergenztests</u> gelten analog wie im Reellen: Majorantentest, Wurzeltest, Quotiententest (Bew. gleichlautend)

z.B. <u>QT</u>: $c_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $c_n \neq 0$ für fast alle n;
falls $\exists\, q \in [0,1[\,$: $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq q$ für fast alle n,
dann ist $\sum c_n$ absolut konvergent

<u>7.4. Stetigkeit</u>: $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f: D \to \mathbb{C}$

<u>DEF</u>: f heißt <u>stetig</u> in z_0, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in D: |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

äquivalent mit Umgebungen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: f(U_\delta(z_0) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(z_0)).$$

f heißt stetig auf D, falls stetig in jedem $z_0 \in D$.

wie im reellen Fall gilt: f stetig in z_0 $\Leftrightarrow$ für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$

- die zweite Eig. schreiben wir auch kurz $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

7.5. Die komplexe Exponentialfunktion

erinnere: [VO im SS11, 5.20] $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

nun sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig, betrachte $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

- $z = 0$: Reihe konvergent (Summe $= 1$)
- $z \neq 0$: QT mit $c_n = \frac{z^n}{n!}$ liefert $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$, also absolute Konvergenz

DEF: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$; schreibe auch e^z statt $\exp(z)$

- stimmt auf $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ mit reeller Exp.fkt. überein, daher Notation O.K.

Eigenschaften:

(i) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: $\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)}$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\exp(z) \neq 0$ und $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

(iii) $\lim\limits_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ (iv) $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig

Beweis: (i) $e^{z_1}\cdot e^{z_2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{z_1^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum\limits_{\ell=0}^{n}\frac{z_2^\ell}{\ell!}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{0\le k,\ell\le n}\frac{1}{k!\,\ell!}z_1^k z_2^\ell = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{2n}\sum_{\substack{0\le k,\ell\le n\\ \boxed{k+\ell=p}}}\frac{1}{k!\,\ell!}\underbrace{z_1^k z_2^\ell}_{z_1^k\cdot z_2^{p-k}} =$$

$$\frac{1}{k!\,\ell!} = \frac{1}{k!(p-k)!} = \frac{1}{p!}\cdot\binom{p}{k}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{2n}\frac{1}{p!}\underbrace{\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}z_1^k z_2^{p-k}}_{=(z_1+z_2)^p} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{p=0}^{2n}\frac{(z_1+z_2)^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^p}{p!} = e^{z_1+z_2}$$

(wichtig war hier die absolute Konvergenz)

(ii) $e^z\cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1+\frac{0}{1!}+\frac{0^2}{2!} = 1 \Rightarrow e^z\neq 0$;

setze $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$; $\overline{S_n(z)} = S_n(\overline{z})$, nun $n\to\infty$.

(iii) für $0<|z|\le 1$ gilt $\left|\frac{e^z-1}{z}-1\right| = \left|\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}}{z}-1\right| =$

$$= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}-1\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k!}\right| = |z|\cdot\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{k-2}}{k!}\right| \le$$

$$\le |z|\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|z|^{k-2}}{k!} \le |z|\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} \le |z|\cdot e$$

mit $|z|\to 0$ folgt somit die Behauptung

(iv) $|e^z-1| = \left|\frac{e^z-1}{z}\right|\cdot|z| \underset{[(iii)]}{\to} 1\cdot 0$ für $|z|\to 0$, daher ist exp stetig bei 0

sei $w \neq 0$ und (z_n) Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \to w$ $(n \to \infty)$

$$\Rightarrow 1 = e^0 = \lim_{n\to\infty} e^{z_n - w} \underset{[(i)]}{=} \lim_{n\to\infty} e^{z_n} \cdot e^{-w} = e^{-w} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{z_n}$$

$$\overset{[(i)]}{\Rightarrow} \quad e^w = \lim_{n\to\infty} e^{z_n}, \text{ also exp stetig bei } w \qquad \square$$

7.6. Existenz von Sinus und Cosinus

erinnere: wir hatten im SS11 zunächst angenommen, dass stetige Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existieren mit Eig.: (W1) $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$

(W2) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

(W3) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

(W4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, (W5) $\cos(0) = 1$.

Wir definieren nun $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) := \operatorname{Re}(\exp(ix)) = \operatorname{Re}(e^{ix})$$

und

$$\sin(x) := \operatorname{Im}(\exp(ix)) = \operatorname{Im}(e^{ix})$$

und weisen die Eig. (W1-5) nach.

Stetigkeit folgt aus Satz 7.2 und der Stetigkeit von exp.

(W1), (W5) folgen aus Def., weil $\cos(0) = \operatorname{Re}(e^{i0}) = \operatorname{Re}(1) = 1$, $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$

1) unmittelbar aus Def. folgt die Eulersche Formel

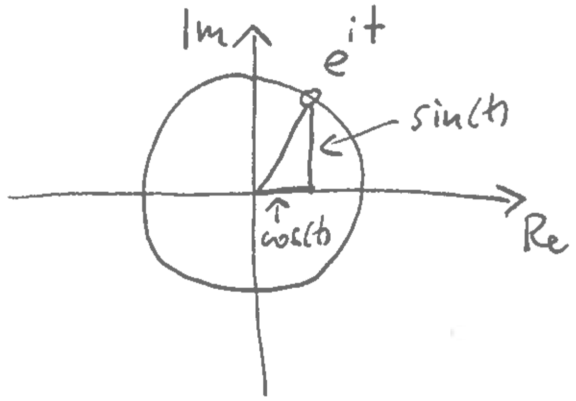
$$\boxed{e^{ix}} \left(= Re(e^{ix}) + i \cdot Im(e^{ix})\right) = \boxed{\cos(x) + i \cdot \sin(x)}$$

2) $\forall t \in \mathbb{R}: |e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{(e^{it})} = e^{it} \cdot e^{-it} = e^0 = 1 \Rightarrow$

$$\boxed{|e^{it}| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

d.h. $\forall t \in \mathbb{R}: 1 = |e^{it}|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$

und wir gewinnen die geometrische Interpretation



$e^{it} \in S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$

Einheitskreis

3) (W2) und (W3) folgen aus $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$, indem auf beiden Seiten Imaginär- bzw. Realteil genommen wird (selbst nachrechnen!)

4) (W4) folgt aus $\frac{\sin(x)}{x} = Re\left(\frac{\cos x - 1}{ix} + \frac{i \sin x}{ix}\right) =$

$= Re\left(\frac{e^{ix} - 1}{ix}\right) \to 1 \quad (x \to 0)$ gemäß 7.5, Eig. (iii) mit $z = ix$

Somit ist die Existenz von sin und cos bewiesen.

(Eindeutigkeit folgt übrigens aus den Taylorentwicklungen und deren Eindeutigkeit.)

7.7. Reihenentwicklung von sin und cos

erinnere: $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, \dots$ d.h.

$$i^n = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 4 \\ i & n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot i$$

daher $\cos x + i \sin x = e^{ix} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot x^n}{n!} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil ergibt

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

beobachte: wegen $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$, $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$ etc... entspricht dies auch den Taylorreihen von cos und sin bei $x_0 = 0$; die Reihen $\sum \frac{z^k}{k!}$, $\sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ etc.. sind spezielle Beispiele von sogenannten Potenzreihen

= 4.10.2011 =