§8 POTENZREIHEN

Wir hatten voriges Semester Taylorreihen betrachtet, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-x_0)^k$, wobei $c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

– nun allgemeiner für beliebige $c_k \in \mathbb{C}$

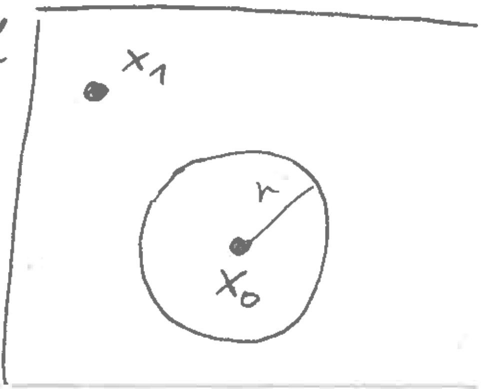
8.1. DEF: Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$, dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x-x_0)^k$ Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 (wir fassen x als komplexe Variable auf).

Wir studieren das Konvergenzverhalten von Potenzreihen in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{C}$, d.h. es geht eigentlich um Folgen von komplexen Polynomfunktionen der Form $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot (x-x_0)^k$.

8.2. PROP: Sei $\sum c_k (x-x_0)^k$ Potenzreihe und $x_1 \in \mathbb{C}$ ($x_1 \neq x_0$) habe die Eigenschaft, dass $\sum c_k (x_1-x_0)^k$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < |x_1 - x_0|$ und

$$K(x_0, r) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| \leq r\}$$

(abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius r um x_0)



Denn gilt:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $x \in K(x_0, r)$

(ii) die (formal gliedweise abgeleitete) Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k \cdot (x-x_0)^{k-1}$ konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig für $x \in K(x_0, r)$.

Beweis: (i) setze $f_n(x) := c_n \cdot (x-x_0)^n$; für $\underline{x \in K(x_0,r)}$ gilt

$$|f_n(x)| = |c_n| \cdot |x-x_0|^n = |c_n| \cdot |x_1 - x_0|^n \cdot \left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^n,$$

wobei $\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|} \le \frac{r}{|x_1-x_0|} =: \theta < 1$.

$\sum c_k (x_1-x_0)^k$ ist (lt. Annahme) konv. $\Rightarrow$ $c_n \cdot (x_1-x_0)^n \to 0$ $(n \to \infty)$,

insbesondere $\exists M > 0: |c_n| \cdot |x_1-x_0|^n \le M \quad \forall n$

$$\Rightarrow |f_n(x)| = |c_n| \cdot |x_1-x_0|^n \left(\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|}\right)^n \le M \cdot \theta^n \quad \forall n \; \forall x \in K(x_0, r)$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty := \sup_{x \in K(x_0,r)} |f_n(x)| \le M \cdot \theta^n;$$

$\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \theta^n$ ist konv. $\xRightarrow[\text{Weierstraß [kompl. Version]}]{\text{Satz von}}$ $\sum f_n$ abs. u. glm. konv. auf $K(x_0, r)$

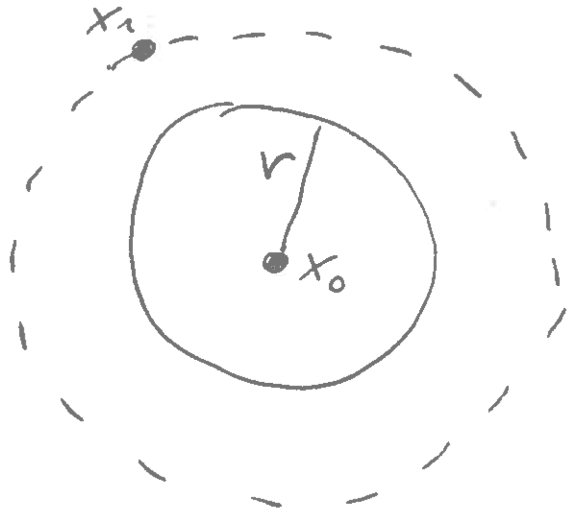
(ii) ähnlich wie (i) für $g_n(x) := c_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$ $\leadsto$ $\|g_n\|_\infty \le n \cdot M \cdot \theta^{n-1}$ und $\sum n \cdot \theta^{n-1}$ konv. nach QT $[\theta < 1]$ $\square$

8.3. BEM: zwischen Punkten $x \in \mathbb{C}$ mit

$|x-x_0| = r < |x_1 - x_0|$ und $x = x_0$ gibt es keine „Konvergenzlücken";

auf jedem abgeschl. Kreis $K(x_0, r)$ glm. konv.;

somit konvergiert die Potenzreihe zumindest



für jeden Punkt x aus

$D := \{ x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| < |x_1 - x_0| \}$ .... offene Kreisscheibe um x_0 mit Radius $|x_1 - x_0|$

wir erhalten eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

bei Euler 1745 zunächst „alle" Funktionen von dieser Form

f ist stetig: jeder Punkt $x \in D$ ist in einer passenden abg. Kreisscheibe $K(x_0, r)$ mit $|x - x_0| < r < |x_1 - x_0|$ enthalten und auf $K(x_0, r)$ konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig und jede Partialsumme ist als Polynom stetig

(komplexe Versionen der Sätze über glm. Konv. analog ...).

Umgekehrt kann man fragen: Welche Funktionen $f: D \to \mathbb{C}$ lassen sich als Potenzreihen darstellen?

$\rightsquigarrow$ analytische Funktionen

$\boxed{?}$ Können wir einen „maximalen Konvergenzkreis" für eine gegebene Potenzreihe bestimmen

8.4. DEF: Sei $\sum c_n \cdot (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe, dann heißt

$$R := \sup \left\{ r \in [0,\infty[\;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \text{ konvergiert für } x \in K(x_0,r) \right\}$$

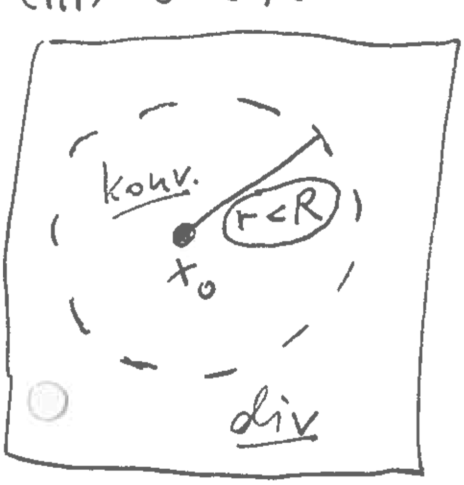
Konvergenzradius. Es gilt $0 \leq R \leq \infty$.

8.5. PROP: Sei R der Konvergenzradius von $\sum c_n (x-x_0)^n$, dann gilt:

(i) $R=0 \Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert nur für $x = x_0$

(ii) $R=\infty \Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert $\forall x \in \mathbb{C}$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $K(x_0,r)$, $0 \leq r < \infty$

(iii) $0 < R < \infty \Rightarrow$ Potenzreihe konvergiert $\forall x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| < R$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder abgeschl. Kreisscheibe $K(x_0,r)$ mit $0 \leq r < R$. Die Reihe ist divergent $\forall x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| > R$.



(Bem: für Randpunkte $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| = R$ i.A. keine Aussage!)

(iv) $\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$ (Hadamard-Formel)

mit Interpretation $R=0$, falls $\limsup = \infty$,
und $R=\infty$, falls $\limsup = 0$.

Beweis: (i) und (ii) unmittelbar aus Def. 8.4 und Bem. 8.3.

(iii) • sei $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| < R$; Def. von R in 8.4 $\Rightarrow$
$\exists x_1 \in \mathbb{C}$ mit $|x_1-x_0| > |x-x_0|$: $\sum c_n (x_1-x_0)^n$ konv.
$\xRightarrow{[\text{Prop. } 8.2]}$ Pot.Reihe konv. glm. auf $K(x_0,r)$ $\forall r: 0<r<|x_1-x_0|$,
insbesondere daher konv. im Punkt x.

Wegen Def. von R als Supremum kann x_1 so gewählt werden, dass $|x_1-x_0|$ beliebig nahe (unterhalb) R ist; somit glm. Konv. auf jedem $K(x_0,r)$ mit $0<r<R$.

• sei $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-x_0| > R$: indirekt, wäre $\sum c_n (x-x_0)^n$ konv., dann könnte $r_1 > R$ gewählt werden mit Eig., dass $\sum c_n (y-x_0)^n$ konv. für $y \in K(x_0,r_1)$ ↯
Wid. zur Def. von R

(iv) Ü-Aufgabe (Hinweis Wurzeltest)

□

8.6. PROP: Falls $\left(\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gilt

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|}$$

Beweis: QT für $a_n := c_n(x-x_0)^n$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|\cdot\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

sei $\rho := \lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, dann gilt $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|\cdot\rho$,

also konv. für $|x-x_0|<\frac{1}{\rho}$, div. für $|x-x_0|>\frac{1}{\rho}$.

Daher muss $R=\frac{1}{\rho}$ gelten. □

8.7. BEISP:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n$, d.h. $x_0=0$, $c_0=0$, $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n\geq 1)$

(Taylorreihe für $\log(1+x)$; 5.20.2))

$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n}\to 1$, daher $R=1$

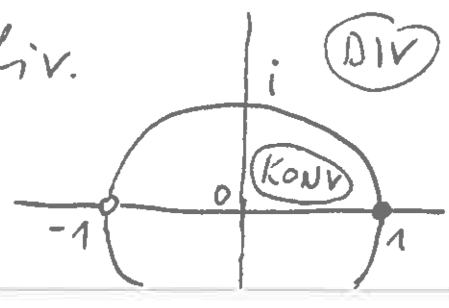
also: konv. $\forall x$ mit $|x|<1$, glm. konv. auf $K(0,r)$, $0<r<1$

div. $\forall x$ mit $|x|>1$

$\boxed{?}$ Konvergenz in den Randpunkten $\{x\in\mathbb{C}\mid |x|=1\}=S^1$

$\underline{x=1}$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konv. nach Leibniz-Krit.

$\underline{x=-1}$: $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(-1)^n = -\sum\frac{1}{n}$ div.



(man kann zeigen: konv. $\forall x\in S^1\setminus\{-1\}$)

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n \qquad (x_0 = 0,\ c_n = n!)$

$$R = \lim \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0,$$

dh. $\forall x \neq 0$ div.

[Bem: Hadamard-Formel $\Rightarrow \limsup (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$, weil $R = 0$]

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \left(x_0 = 0,\ c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!}, & n \text{ gerade} \end{cases}\right)$

das ist die cos-Reihe; (abs.) konv. $\forall x \in \mathbb{R}$ [7.7.]

$\Rightarrow R = \infty \Rightarrow$ konv. $\forall x \in \mathbb{C}$;

ebenso $R = \infty$ für exp- und sin-Reihe.

<u>Bem:</u> somit sind nun auch sin, cos zu Funkt. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erweitert, nämlich durch

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

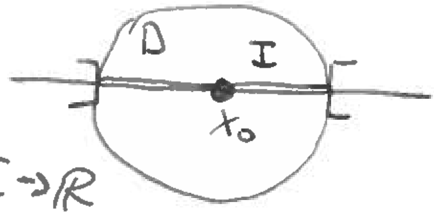
8.8. Die Summenfunktion einer Potenzreihe

Sei $\sum c_n \cdot (x - x_0)^n$ Potenzreihe mit $R > 0$

Bem. 8.3 und Prop. 8.5: $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ definiert eine stetige Funktion $f: D \to \mathbb{C}$, wobei $D := \{x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| < R\}$.

Falls $c_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt, dann ergibt die Einschränkung $f|_{D \cap \mathbb{R}}$ eine Funktion

$I := D \cap \mathbb{R} =]x_0 - R, x_0 + R[\to \mathbb{R}$



– wir schreiben für diese Fkt. wieder $f : I \to \mathbb{R}$

<u>SATZ</u>: Sei $\sum c_n (x-x_0)^n$ Pot.reihe mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $c_n \in \mathbb{R}\ \forall n$ und $I =]x_0 - R, x_0 + R[$, R Konv.radius und $R > 0$, $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \quad (x \in I)$.

Dann gilt:

(i) f ist ∞ oft differenzierbar [Notation $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$]

(ii) $\forall x \in I$: $\quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1} \quad \left[= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1} \right]$

(iii) $\forall a, b \in I$ gilt: $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b$,

insbesondere ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion für f auf I

= 10.10.2011 =

Beweis: $\forall r$ mit $0 < r < R$ sind beide Reihen

$\sum c_n (x-x_0)^n$ und $\sum n c_n (x-x_0)^{n-1}$ glm. konv.

auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ [Prop. 8.2 und 8.5]

[Satz 6.8 (SS11)]
$\Longrightarrow$ f stetig diffbar und Formel für f', also (ii).

sukzessive Anwendung von (ii) liefert (i).

(iii) folgt direkt aus Satz 6.6. (und glm. Konv. nach Prop. 8.2 oder 8.5

$\square$

<u>KOR</u>: Sei f wie im obigen Satz, dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

D.h. die Taylorreihe von f ist gleich der Potenzreihe, insbesondere sind die Koeffizienten einer Potenzreihe stets eindeutig (wie bei Polynomen!).

Beweis: sukzessive Anwendung von (ii) im Satz ergibt

$$f^{(n)}(x_0) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \cdot k(k-1)\cdots(k-n+1)\cdot(x-x_0)^{k-n}.$$

Für $x = x_0$ folgt $f^{(n)}(x_0) = c_n \cdot n!$

$\square$

BEISP: 1) wir hatten in 5.20.2): $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$

$\forall x \in [0,1]$

wir zeigen nun mittels obigem Satz, dass die Entwicklung auch für $x \in]-1,1[$ gilt, insgesamt also in $]-1,1]$.

8.7.1): $R=1$; setze $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n \quad (x \in]-1,1[)$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \underset{\substack{\uparrow \\ [\text{geom. Reihe}]}}{=} \frac{1}{1+x}$$

$\Rightarrow \forall t \in]-1,1[$:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(x)\,dx = 0 + \int_0^t \frac{dx}{1+x} = \log(1+t)$$

2) $\boxed{?}$ Taylorreihenentwicklung für arctan auf $]-1,1[$:

setze $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \underset{\substack{\uparrow \\ [\text{geom. Reihe}]}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^{2k}$$

Konv.radius $R = \frac{1}{\limsup |(-1)^k|^{\frac{1}{2k}}} = 1$

[beachte $c_{2k+1} = 0$, $c_{2k} = (-1)^k$] $\Rightarrow$

$$\forall t \in]-1,1[: \underbrace{\arctan(t)} = f(t) = f(0) + \int_0^t f'(x)\,dx =$$

$$= 0 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \int_0^t x^{2k}\,dx = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{t^{2k+1}}{2k+1}}$$

3) Binomische Reihe: wir zeigen eine „Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes", nämlich

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in]-1,1[: \boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k}$$

1. Fall: $\alpha = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = 0$ für $k > n \Rightarrow$

rechte Seite ist Polynom und Beh. folgt aus bin. LS.

2. Fall: $\alpha \notin \mathbb{N}_0$; es ist $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \neq 0 \ \forall k$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{|\alpha-k|} = 1 \Rightarrow$$ Reihe hat Konv.radius $R = 1$

setze $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, $g:]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$g'(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1}}_{①} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(k+1)\binom{\alpha}{k+1}}_{= (\alpha-k)\cdot\binom{\alpha}{k}} \cdot x^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha-k)\binom{\alpha}{k} x^k}_{③}$$

$$\Rightarrow (1+x)\,g'(x) = ③ + x \cdot ① =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha-k)\binom{\alpha}{k} x^k + \underbrace{x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k} x^{k-1}}_{= \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{\alpha}{k} x^k} =$$

$$= \underset{[k=0]}{\alpha \cdot \binom{\alpha}{0} \cdot x^0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\big((\alpha-k)+k\big)}_{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k =$$

$$= \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha \cdot g(x) \text{ , d.h. } \underbrace{(1+x)\cdot g'(x) = \alpha \cdot g(x)}_{\circledast \ [\text{DGL}]}$$

betrachte $h(x) := (1+x)^{-\alpha} \cdot g(x) \quad (-1 < x < 1)$

$$\Rightarrow h'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} \cdot g(x) + (1+x)^{-\alpha} \cdot g'(x) =$$

$$= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} \cdot \underbrace{\left(g(x) - \tfrac{1}{\alpha}(1+x)\,g'(x)\right)}_{\circledast:\ =0} = 0$$

$\Rightarrow h$ konstant; $h(0) = g(0) = \binom{\alpha}{0} = 1 \Rightarrow$

$1 = (1+x)^{-\alpha} \cdot g(x)$ bzw. $g(x) = (1+x)^{\alpha}$, d.h.

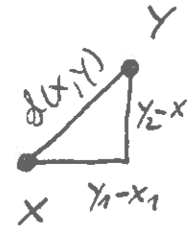
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^{\alpha}$$

§9 KONVERGENZ UND STETIGKEIT IM $\mathbb{R}^n$ [Topologie des $\mathbb{R}^n$]

9.1. Normen und Abstände

euklidischer Abstand zwischen zwei Punkten $x=(x_1,x_2)$ und $y=(y_1,y_2)$ im $\mathbb{R}^2$ gemäß Pythagoras bekanntlich

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$



- analog im $\mathbb{R}^3$; $d(x,0)=\|x\|$ .... Länge des Vektors

Wir definieren nun allgemein im $\mathbb{R}^n$ die <u>euklidische Norm</u> $\|.\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ durch

$$\|x\|=\|(x_1,\dots,x_n)\|:=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

und die <u>euklidische Metrik</u> $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ durch

$$d(x,y):=\|x-y\| \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

<u>Eigenschaften:</u> $\forall x,y\in\mathbb{R}^n, \forall \lambda\in\mathbb{R}$ gilt

(N1) $\|x\|\geq 0$; weiters: $\|x\|=0 \iff x=0$

(N2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$

(N3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ ... Dreiecksungleichung

[aus Lin. Alg. bekannt; (N1-2) leicht z.z., (N3) aus Cauchy-Schwarz-Ungleichung siehe 9.2 ...

<u>Folgerungen für die Metrik d:</u> $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$ gilt

(M1) $d(x,y) \geq 0$; weiters: $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.... Dreiecksungleichung

[sehr einfach, dies direkt aus (N1–3) zu zeigen]

<u>BEM</u>: (i) eine Abb. $\|.\|: V \to \mathbb{R}$ von einem $\mathbb{R}$-VR mit Eig. (N1–3) heißt <u>Norm</u>; $(V, \|.\|)$ normierter VR

(ii) eine Menge M mit Abb. $d: M \times M \to \mathbb{R}$, die (M1–3) erfüllt,

[Fréchet 1906] heißt <u>metrischer Raum</u> und d <u>Metrik</u> auf M.

(iii) Jede Norm definiert auch eine zugeordnete Metrik durch $d(x,y) := \|x-y\|$. Aber nicht jede Metrik stammt von einer Norm.

(iv) Beispiele weiterer Normen auf $\mathbb{R}^n$: $p \in [1,\infty[$ fest

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{; speziell } \|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

und $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ [quasi $p = \infty$]

$\|.\|_p$ heißt <u>p-Norm</u>; 2-Norm = euklid. Norm.

[Eig. (N1), (N2) jeweils leicht zu zeigen; (N3) folgt aus der sogenannten Hölder-Ungleichung (Heuser 1, 59.2 und 59.3)

9.2. Skalarprodukt(e)

(Standard-)Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

mit
$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

x heißt orthogonal auf y, $x \perp y$, falls $\langle x, y \rangle = 0$

Eigenschaften: [alle leicht z.z.]

(i) $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist bilinear, d.h. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

und $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$

(also: $\forall z$ ist $v \mapsto \langle v, z \rangle$ und $v \mapsto \langle z, v \rangle$ linear)

(ii) $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist symmetrisch: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(iii) $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist positiv definit: $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

und weiters: $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $(\|x\|_2 =)\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Bem: allg. sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit Abb. $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, die Eig. analog zu (i), (ii), (iii) erfüllt, dann spricht man von einem euklidischen VR $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ [vgl. Lin. Alg. u. Geom.]

– erinnere auch an Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

[Bem: $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ $\Updownarrow$ $\{x, y\}$ lin. abhängig]

=11.10.2011=