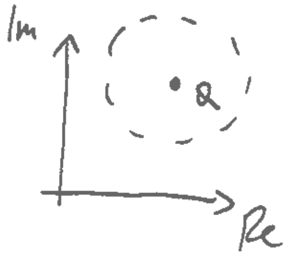
9.3. Umgebungen und offene Mengen

erinnere an Begriff der ε-Umgebung

- in $\mathbb{R}$ (SS11):

$U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$

- in $\mathbb{C}$ (§7):



(offene) Kreisscheibe um a

$U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < \varepsilon\}$

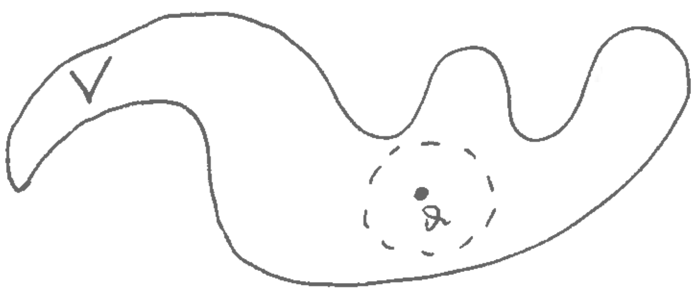
(ohne Randkreis)

– nun also für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < \varepsilon\}$ .... <u>ε-Umgebung von a</u>

(n-dim. offene Kugel vom Radius $\varepsilon > 0$ um a)

<u>DEF</u>: (i) Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Eine Menge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>Umgebung von a</u>, falls gilt: $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq V$



„Es gibt eine ε-Schutzkugel um a ganz innerhalb von V."

(ii) Eine Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>offen</u>, falls W eine Umgebung all ihrer Punkte ist, d.h.

$\forall x \in W \ \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq W.$

(iii) Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls die Menge $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

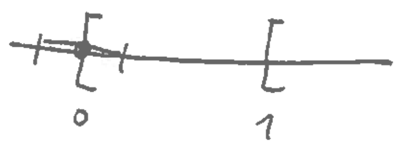
<u>BEISP:</u> 1) $n=1$: • $]2,4[$, $]0,\infty[$, $]0,1[\cup]1,2[$ .... offen

• $[3,4]$, $[0,\infty[$ abgeschlossen, weil

$\mathbb{R}\setminus[3,4] =]-\infty,3[\cup]4,\infty[$ offen und

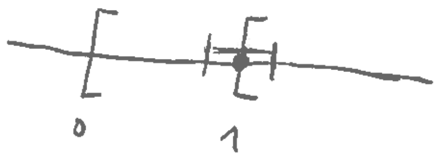
$\mathbb{R}\setminus[0,\infty[=]-\infty,0[$ offen

• $[0,1[$ ist weder offen noch abgeschlossen!

nicht offen, weil nicht Umg. von 0: 

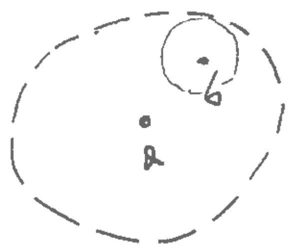
nicht abg., weil $\mathbb{R}\setminus[0,1[=]-\infty,0[\cup[1,\infty[$ nicht offen ist,

weil nicht Umg. von 1



2) $U_\varepsilon(a)$ immer offen in $\mathbb{R}^n$: sei $b \in U_\varepsilon(a)$ beliebig

$\Rightarrow \|b-a\| < \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_1 := \varepsilon - \|b-a\| > 0$

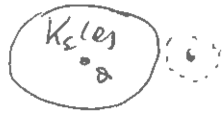


$\forall y \in U_{\varepsilon_1}(b)$ gilt nun

$\|y-a\| \le \|y-b\| + \|b-a\| < \varepsilon_1 + \|b-a\| = \varepsilon$,

d.h. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schutzkugel um } b \text{ innerhalb } U_\varepsilon(a)}}{U_{\varepsilon_1}(b)} \subseteq U_\varepsilon(a)$

3) $K_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \le \varepsilon\}$ abgeschlossen



Eigenschaften: (Bew. leicht und formal)

(i) U Umgebung von a und $V \supseteq U \Rightarrow V$ Umg. von a

(ii) V_1, V_2 Umg. von $a \Rightarrow V_1 \cap V_2$ Umg. von a

(iii) Vereinigung von $\underbrace{\text{beliebig vielen}}_{\text{(also auch } \infty \text{ viele)}}$ offenen Mengen ist offene Menge.

(iv) Durchschnitt von endlich vielen offenen Menge ist offen.

mittels Regeln von de Morgan: (iii)' Durchschnitt bel. vielen abg. M stets abg.

(iv)' Vereinigung endlich vielen abg. Mengen stets abg.

9.4. Konvergenz von Vektorfolgen

Eine Folge in $\mathbb{R}^n$ ist eine Abb. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$;
wir schreiben $x^{(k)} := x(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ [oft auch $x_k = x(k)$, aber das spießt sich mit Komponentenschreibweise]
und $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ bzw. $(x^{(k)})_i$

in Komponenten $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n \; \forall k \in \mathbb{N}$

<u>DEF:</u> Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ <u>konvergiert</u> gegen $a \in \mathbb{R}^n$,

falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N$: $\underbrace{x^{(k)} \in U_\varepsilon(a)}_{\text{d.h. } \|x^{(k)} - a\| < \varepsilon}$

Notation: $a = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$; $x^{(k)} \to a$.

<u>SATZ:</u> $(x^{(k)})$ Folge in $\mathbb{R}^n$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a \iff \forall j \in \{1, \dots, n\}: \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

Beweis: ($\Rightarrow$) $\forall j \in \{1, \dots, n\}$: $|x_j^{(k)} - a_j| \leq \|x^{(k)} - a\| \to 0 \quad (k \to \infty)$

$$\left[|c_j| = \sqrt{|c_j|^2} \leq \sqrt{|c_1|^2 + \dots + |c_j|^2 + \dots + |c_n|^2} \right]$$

($\Leftarrow$) sei $\varepsilon > 0$; zu $j = 1, \dots, n$ $\exists N_j$: $|x_j^{(k)} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$;

setze $N := \max(N_1, \dots, N_n)$ und sei $k \geq N$:

$$\|x^{(k)} - a\| = \Big(\underbrace{|x_1^{(k)} - a_1|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}} + \dots + \underbrace{|x_n^{(k)} - a_n|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}} \Big)^{\frac{1}{2}} < \left(n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon,$$

daher $x^{(k)} \to a \quad (k \to \infty)$ $\square$

Also: Vektorfolge konvergiert genau dann, wenn jede Komponentenfolge konvergiert.

<u>BEISP:</u>
$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{k})^k \\ 1 \\ (-1)^k / k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} e \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \to \infty)$$

KOR: (i) $(x^{(k)})$ konvergiert in $\mathbb{R}^n$

$$\Updownarrow$$

$(x^{(k)})$ ist eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, \ell \geq N: \ \|x^{(m)} - x^{(\ell)}\| < \varepsilon$$

(ii) Satz von Bolzano-Weierstraß: Sei $(x^{(k)})$ beschränkt, d.h. $\exists R > 0: \forall k \in \mathbb{N}: \ x^{(k)} \in K_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| \leq R\}$.

Dann besitzt $(x^{(k)})$ eine konvergente Teilfolge.

Beweisskizze:

(i) konv. $\Leftrightarrow$ kompon.weise konv. $\Leftrightarrow$ komp.weise C.F. $\Leftrightarrow$ C.F

leicht z.z.

(ii) $\forall j \in \{1, \dots, n\}: \ |x_j^{(k)}| \leq R \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1\. Komp. beschränkt $\overset{[B.-W.\ SS11]}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Teilfolge, die in 1. Komp. konv.

2\. Komp. beschr. $\Rightarrow$ $\exists$ Teilfolge der Teilfolge, die in der 1. und 2. Komponente konvergent ist

$\cdots\cdots>$ $\exists$ Teilfolge, die in jeder Komp. konv.

$\Rightarrow$ $\exists$ Teilfolge, die im $\mathbb{R}^n$ konv. $\square$

BEISP: $x^{(k)} = \left(\cos \frac{k\pi}{8}, \sin \frac{k\pi}{8}\right)$, $(x^{(k)})$ beschränkt, weil $\|x^{(k)}\| = 1$

Teilfolge $x^{(16\ell)} = (\cos(2\ell\pi), \sin(2\ell\pi)) = (1, 0)$ ist konvergent

<u>9.5. SATZ</u>: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt:

A ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}^n$ mit $c = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$,

wobei $\underline{x^{(k)} \in A}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, gilt $\underline{c \in A}$.

D.h. A genau dann abgeschlossen, falls Limiten konvergenter Folgen aus A selbst zu A gehören.

Beweis: ($\Rightarrow$) indirekt, ang. $c \notin A$, d.h. $c \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

$\mathbb{R}^n \setminus A$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(c) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$;

$c = \lim x^{(k)}$, $x^{(k)} \in A \Rightarrow \exists N: x^{(k)} \in U_\varepsilon(c)$ $\forall k \geq N$

$\lightning$ Wid., weil dann $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ($k \geq N$),

und gleichzeitig $x^{(k)} \in A$ $\forall k$

($\Leftarrow$) wir zeigen, dass $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist

indirekt, ang. $\exists a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ $\forall \varepsilon > 0: U_\varepsilon(a) \not\subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \underbrace{U_{\frac{1}{k}}(a) \cap A}_{} \neq \emptyset$

wähle $x^{(k)}$ $\Rightarrow$ $(x^{(k)})$ ist Folge in A mit

$x^{(k)} \to a$ $(k \to \infty)$

$\Rightarrow a \in A$ $\lightning$ Wid, weil $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$

$\square$

<u>9.6. BEM</u>: $B \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt

$\overline{B} := \{c \in \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ Folge } (x^{(k)}), x^{(k)} \in B, c = \lim x^{(k)}\}$ der <u>Abschluss</u> von B,

$\overline{B}$ ist gemäß 9.5 stets abgeschlossen

Bsp: $\overline{U_r(x_0)} = K_r(x_0)$

Kreisrand kommt dazu

$U_r(x_0)$ $\qquad$ $K_r(x_0)$

$\|x - x_0\| < r$ $\qquad$ $\|x - x_0\| \leq r$

= 17.10.2011 =

9.7. Kompakte Teilmengen

DEF: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>kompakt</u>, wenn jede Folge $(x^{(k)})$ in K [d.h. $x^{(k)} \in K \;\forall k \in \mathbb{N}$] eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt $a \in K$ konvergiert.

BEISP: $n=1$, $a<b$, $K=[a,b]$ ist kompakt, denn für Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $x_j \in [a,b] \;\forall j$ gilt: $a \leq x_j \leq b \;\forall j$

- (x_j) beschränkt $\Rightarrow \exists$ konv. Teilfolge $(x_{j_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$
- $\forall \ell$: $a \leq x_{j_\ell} \leq b \Rightarrow \lim\limits_{\ell\to\infty} x_{j_\ell} \in [a,b] = K$.

(Kompaktheit ist ein zentraler Begriff der höheren Analysis, Topologie, Differentialgeometrie .....)

SATZ (von Heine-Borel): Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt:

K ist kompakt $\Leftrightarrow$ K ist beschränkt und abgeschlossen

Beweis: $\Rightarrow$ Beh. 1: K ist abgeschlossen

sei $(x^{(k)})$ Folge in K mit $c = \lim x^{(k)}$; z.z.: $c \in K$

K kompakt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x^{(k_\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $a := \lim\limits_{\ell \to \infty} x^{k_\ell} \in K$;

weil ursprüngliche Folge konv., muss $a = c$ sein

$\Rightarrow \quad c = a \in K$

$\overset{9.5.}{\Rightarrow}$ K abg.

Beh. 2: K ist beschränkt $\quad [\text{d.h. } \exists R > 0 : K \subseteq K_R(0)]$

indirekt, ang. nicht beschränkt

$\Rightarrow \exists$ Folge $(x^{(k)})$ in K mit $\|x^{(k)}\| \to \infty \; (k \to \infty)$

$\Rightarrow \nexists$ konv. Teilfolge von $(x^{(k)})$ $\lightning$ Wid. zur Kompaktheit von K

$\Leftarrow$ sei $(x^{(k)})$ eine Folge in K

K beschränkt $\Rightarrow (x^{(k)})$ beschränkt $\xRightarrow[\text{Weierstraß, 9.5}]{\text{Bolzano-}}$

$\exists$ konv. Teilfolge $(x^{(k_\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$; sei $a := \lim\limits_{\ell \to \infty} x^{(k_\ell)}$

K abgeschlossen $\Rightarrow a \in K$; d.h. Teilfolge konvergiert gegen einen Punkt in K

$\Rightarrow$ K kompakt

BEISP: $U_\varepsilon(a)$ nicht kompakt, weil nicht abg.;

$K_\varepsilon(a)$ kompakt; $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ nicht kompakt in $\mathbb{R}^2$, weil unbeschränkt

9.8. DEF: sei $A \in \mathbb{R}^n$ und $f: A \to \mathbb{R}^m$ und $a \in A$.

f heißt <u>stetig in a</u>, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \underbrace{\forall x \in A: \|x - a\| < \delta}_{\forall x \in U_\delta(a) \cap A} \Rightarrow \underbrace{\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon}_{f(x) \in U_\varepsilon(f(a))}.$$

äquivalent:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0: \; f(U_\delta(a) \cap A) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$$

9.9. SATZ: f stetig in a

$$\Updownarrow$$

für jede Folge $(x^{(k)})$ in A mit $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ gilt auch
$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(a).$$

Beweis: (analog zum eindim. Fall)

($\Downarrow$) sei $(x^{(k)})$ Folge in A mit $x^{(k)} \to a$, z.z.: $f(x^{(k)}) \to f(a)$

sei $\varepsilon > 0$; wähle $\delta > 0$: $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

wähle $N \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq N \;\; \|x^{(k)} - a\| < \delta$

$\Rightarrow \forall k \geq N: \|f(x^{(k)}) - f(a)\| < \varepsilon$,

also gilt $\lim f(x^{(k)}) = f(a)$

($\Uparrow$) indirekt, ang. f nicht stetig in a $\Rightarrow$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \; \exists x^{(k)} \in A, \; \|x^{(k)} - a\| < \frac{1}{k}$, aber $\|f(x^{(k)}) - f(a)\| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \; x^{(k)} \to a \; (k \to \infty)$, aber $f(x^{(k)}) \not\to f(a)$ ↯ $\square$

<u>9.10. SATZ</u>: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \; \forall x \in A$, $a \in A$. Dann gilt:

f stetig in a $\Longleftrightarrow$ $\forall j \in \{1, \dots, m\}$: f_j ist stetig in a.

$f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$ heißen die <u>Komponentenfunktionen</u> von f.

Beweis: sei $(x^{(k)})$ Folge in A mit $a = \lim x^{(k)}$, dann gilt gemäß Satz 9.4:

$$f(x^{(k)}) \to a \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, m\}: \; f_j(x^{(k)}) \to f(a_j)$$

Daher gemäß Satz 9.9.: f stetig in a $\Longleftrightarrow$ jedes f_j stetig in a $\square$

<u>9.11. BEISP</u>: 1) $c \in \mathbb{R}^m$ fix, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = c \; \forall x \in \mathbb{R}^n$ ist stetig

2) $1 \leq j \leq n$, $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \to x_j$ (j-te Projektion) ist stetig nach 9.4 und 9.9

3) mittels 9.9 leicht zu zeigen, dass mit f und $g : A \to \mathbb{R}^m$

und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ stets auch $\lambda f + \mu g : A \to \mathbb{R}^m$ stetig

und, falls $m = 1$, auch $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ stetig,

und, falls $m = 1$ und $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$, auch $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ stetig

insbesondere ist jedes Polynom von n Variablen stetig,

z.B. $p(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^4 x_2^3 - 5x_2^3 x_3 + 4x_1 x_2^2 x_3^3$

= 18.10.2011 =

4) $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $f(A) \subseteq B$

und $g : B \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow g \circ f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig

(Bew. mittels 9.9. wie im 1-dim. Fall)

z.B. $\sqrt{\cdot} : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ (Wurzel) stetig, $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$q(x) = 1 + x_1^2 + x_2^4 + \ldots + x_n^{2n}$ stetig, $q(\mathbb{R}^n) \subseteq [0, \infty[$

$$\Rightarrow f(x) := \sqrt{q(x)} = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^{2j}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ stetig } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

5) <u>Wo Cauchy 1821 irrte:</u> sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Eig.,

dass die partiellen Abbildungen $x_1 \mapsto f(x_1, 0)$ und $x_2 \mapsto f(0, x_2)$ jeweils stetig bei $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ sind (als Abb. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

[<u>separat</u> stetig]

$\boxed{!}$ Dann muss f trotzdem nicht stetig bei $(x_1, x_2) = (0,0)$ sein! [Cauchy behauptete dies in einem Buch 1821 fälschlich.]