Gegenbeispiel von Peano 1884 [∃ früheres Beisp. von Thomae bzw. Heine ~1870; Notices AMS August 2011]

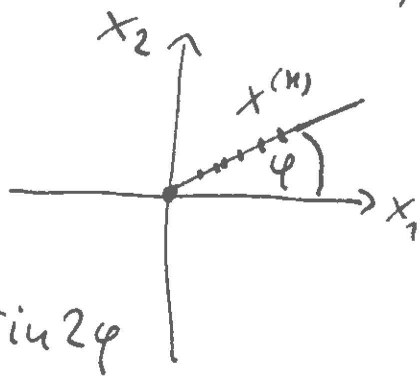
$$f(x_1,x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1\cdot x_2}{x_1^2+x_2^2} & (x_1,x_2)\neq(0,0) \\ 0 & (x_1,x_2)=(0,0) \end{cases}$$

- $f(x_1,0)=0 \ \forall x_1$, $f(0,x_2)=0 \ \forall x_2$, daher ist f separat stetig bei 0
- f ist stetig in allen Punkten $(x_1,x_2)\neq(0,0)$, weil dort durch rationale Funktion ohne Nennernullstelle gegeben
- <u>f ist nicht stetig bei $(0,0)$</u>: betrachte spezielle Folgen $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)})$ mit $x^{(n)}\to 0$ $(n\to\infty)$

sei $\varphi\in[0,2\pi[$ fix und (r_n) Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $r_n\neq 0 \ \forall n$;

setze $x_1^{(n)} := r_n\cdot\cos\varphi$, $x_2^{(n)} := r_n\cdot\sin\varphi$

$x_1^{(n)}, x_2^{(n)} \to 0 \Rightarrow x^{(n)}\to(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$



$$f(x^{(n)}) = \frac{r_n^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{r_n^2} = \cos\varphi\cdot\sin\varphi = \underbrace{\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi}_{\text{unabhängig von } n}$$

speziell für $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ergibt sich $\underline{\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)}$

Also in Satz 9.10 niemals Komponentenfunktion f_j mit einzelnen Variablen x_ℓ verwechseln!!

9.12. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig, dann gilt:

(i) im Fall $m=1$, also $f: K \to \mathbb{R}$: f ist beschränkt und nimmt sowohl Max. als auch Min. an, d.h. $\exists\, \xi, \eta \in K$ mit Eig., dass

$$f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta) \quad \forall x \in K$$

(ii) f ist gleichmäßig stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ (unabh. von $x \in K$) mit Eig.: $x, y \in K$, $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Beweise dieser Aussagen können mittels Satz von Bolzano-Weierstraß (Kor (ii) in 9.4) analog zu entsprechenden Beweisen im eindim. Fall geführt werden [vgl. etwa Skriptum zur Einf. i.d. Analysis von G.H, 5.9 und 5.10]

Beachte dafür, dass K als kompakte Menge beschränkt und abgeschlossen ist.

§10 DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN

10.1. Partielle Ableitungen

sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: G \to \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in G$

- die Abb. $x_1 \mapsto f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ist zumindest auf einem kleinen offenen Intervall $I_1 \ni \xi_1$ definiert (weil G offen ist und daher [ein offener Würfel um ξ] in offenen Kugel innerhalb G liegt),

und f heißt in ξ partiell nach x_1 differenzierbar, falls die Ableitung der Fkt. $x_1 \mapsto f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ bei $x_1 = \xi_1$ existiert; Notation $\boxed{D_1 f(\xi_1, \dots, \xi_n)}$ für diese part. Ableitung

(auch gebräuchlich: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\partial_{x_1} f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ etc.)

- analog: wenn $x_k \mapsto f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, x_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ bei $x_k = \xi_k$ diffbar ist, heißt f in ξ partiell nach x_k differenzierbar und Notation für die Ableitung

$$\boxed{D_k f(\xi_1, \dots, \xi_n)} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

Also: k-te partielle Ableitung durch „Festhalten aller anderen Variablen" und übliches Differenzieren in der k-ten Var.

BEISP: (oft nützlich, Variablen mit verschiedenen Buchstaben zu bezeichnen)

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(s,t) = s \cdot e^t + \sin(st)$

$D_1 f(s,t) = e^t + t \cdot \cos(st)$

$D_2 f(s,t) = s e^t + s \cdot \cos(st)$

2) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + xy^2 + 2z^3$

$D_1 g(x,y,z) = 2x + y^2$

$D_2 g(x,y,z) = 2xy$ $\qquad$ $D_3 g(x,y,z) = 6z^2$

10.2. Höhere partielle Ableitungen: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen; falls $f: G \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt von G nach jeder Variable partiell differenzierbar ist, so erhalten wir n Funktionen

$D_1 f: G \to \mathbb{R}, \dots, D_n f: G \to \mathbb{R}$

- ist $D_k f$ bei $\xi \in G$ nach x_j partiell differenzierbar, dann ergibt dies die partielle Ableitung zweiten Ordnung

$$\boxed{D_j D_k f(\xi_1, \dots, \xi_n)} \qquad (1 \leq k, j \leq n)$$

– es gibt also bis zu n^2 mögliche part. Abl. 2. Ordnung.

- falls $D_j D_k f$ in allen Punkten existiert und selbst bei ξ nach x_ℓ partiell diffbar ist, dann erhalten wir part. Abl. 3. Ordn. $D_\ell D_j D_k f(\xi_1, \dots, \xi_n)$

...
...
usw
....

$\boxed{?}$ Ist bei gemischten Ableitungen, z.B. $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$, die Reihenfolge der Differentiationen wesentlich?

D.h. gilt z.B. $D_1 D_2 f(\xi) \overset{?}{=} D_2 D_1 f(\xi)$ $\boxed{?}$

<u>Achtung</u>: im Allgemeinen muss hier nicht Gleichheit gelten!
[siehe z.B. Heuser 2, Aufg. 162.4; historische Gegenbeispiele von Schwarz 1873 und Peano 1884 z.B. in Hairer-Wanner IV.4.

Aber in vielen praktisch wichtigen Fällen stimmt das doch:

<u>SATZ</u> (<u>von Schwarz</u> oder Euler [in 2 Var.]): $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

(i) $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar und partielle Ableitungen $D_j D_k f : G \to \mathbb{R}$ <u>stetig</u> $\forall j,k \in \{1, \dots, n\}$

$$\Longrightarrow \boxed{D_j D_k f = D_k D_j f} \qquad (1 \leq j, k \leq n)$$

(ii) $f : G \to \mathbb{R}$ m-mal part. diffbar und alle Abl. der Ordnungen $\leq m$ <u>stetig</u> $\Longrightarrow$ part. Abl. der Ordn. $\leq m$ unabhängig von der Reihenfolge

Beweis: (ii) ergibt sich induktiv aus (i)

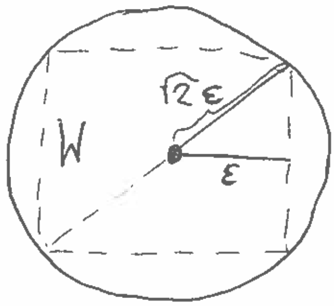
(i): genügt, dies für Funktion von zwei Variablen zu zeigen (OBdA nämlich $x = x_j$, $y = x_k$ und alle anderen Ver. werden eh festgehalten)

D.h. es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(\xi, \eta) \in G$ beliebig,

$f: G \to \mathbb{R}$ 2-mal part. diffbar und alle Abl.

$$D_1 f,\ D_2 f,\ D_1^2 f,\ \underbrace{D_1 D_2 f,\ D_2 D_1 f}_{\text{[müssen es eig. nur von diesen wissen...]}},\ D_2^2 f : G \to \mathbb{R} \ \underline{\text{stetig}}$$

z.z.: $D_1 D_2 f(\xi, \eta) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)$.



Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $U_{\sqrt{2}\varepsilon}((\xi,\eta)) \subseteq G$;

denn ist $W := [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \times [\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon] \subseteq U_{\sqrt{2}\varepsilon}((\xi,\eta)) \subseteq G$

seien $\alpha, \beta \neq 0$ mit $|\alpha|, |\beta| < \varepsilon$; $[\xi - |\alpha|, \xi + |\alpha|] \times [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|] \subseteq W$;

1) setze $\varphi(x) := f(x, \eta + \beta) - f(x, \eta)$ für $x \in [\xi - |\alpha|, \xi + |\alpha|]$

MWS der Diff. $\Rightarrow \exists\, x_1 \in [\xi - |\alpha|, \xi + |\alpha|]$:

$$\varphi(\xi + \alpha) - \varphi(\xi) = \alpha \cdot \varphi'(x_1) = \alpha \cdot \underbrace{\left(D_1 f(x_1, \eta + \beta) - D_1 f(x_1, \eta)\right)}_{\circledast}$$

setze $\psi_1(y) := D_1 f(x_1, y)$ für $y \in [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|] \Rightarrow$

$\circledast = \psi_1(\eta + \beta) - \psi_1(\eta)$; MWS der Diff. $\Rightarrow$

$\exists\, y_1 \in [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|]$: $\circledast = \beta \cdot \varphi_1'(y_1) = \beta \cdot D_2 D_1 f(x_1, y_1)$

$$\Rightarrow \quad \underline{\varphi(\xi+\alpha) - \varphi(\xi) = \alpha \cdot \beta \cdot D_2 D_1 f(x_1, y_1)} \qquad (\text{Gl.} 1)$$

2) setze $\psi(y) := f(\xi+\alpha, y) - f(\xi, y)$ für $y \in [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|]$

wie in 1) gilt nun: $\exists\, x_2 \in [\xi - |\alpha|, \xi + |\alpha|]$, $y_2 \in [\eta - |\beta|, \eta + |\beta|]$ mit

$$\underline{\psi(\eta+\beta) - \psi(\eta)} \overset{[\text{MWS}]}{=} \beta \cdot \psi'(y_2) = \beta \cdot \Big(\underbrace{D_2 f(\xi+\alpha, y_2) - D_2 f(\xi, y_2)}_{\to [\text{MWS}]}\Big) \overset{[\text{MWS}]}{=}$$

$$\underline{= \alpha \cdot \beta \cdot D_1 D_2 f(x_2, y_2)} \qquad (\text{Gl.} 2)$$

3) es ist $\underline{\varphi(\xi+\alpha) - \varphi(\xi)} =$

$= f(\xi+\alpha, \eta+\beta) - f(\xi+\alpha, \eta) - f(\xi, \eta+\beta) + f(\xi, \eta) =$

$= f(\xi+\alpha, \eta+\beta) - f(\xi, \eta+\beta) - \big(f(\xi+\alpha, \eta) - f(\xi, \eta)\big) =$

$= \underline{\psi(\eta+\beta) - \psi(\eta)}$, daher gemäß (Gl.1), (Gl.2)

$$\alpha \cdot \beta \cdot D_1 D_2 f(x_2, y_2) = \alpha \cdot \beta \cdot D_2 D_1 f(x_1, y_1) \overset{[\alpha, \beta \neq 0]}{\Longrightarrow}$$

$$\underline{D_1 D_2 f(x_2, y_2) = D_2 D_1 f(x_1, y_1)}$$

4) $(\alpha, \beta) \to (0,0) \Rightarrow (x_2, y_2) \to (\xi, \eta)$ und $(x_1, y_1) \to (\xi, \eta)$

$$\xrightarrow{\boxed{D_1 D_2 f,\ D_2 D_1 f \text{ stetig!}}} \boxed{D_1 D_2 f(\xi, \eta) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)} \qquad \square$$

24.10.2011

10.3. Interpretation der partiellen Ableitung

sei $G =]a,b[\times]c,d[$ .... offenes Rechteck im $\mathbb{R}^2$

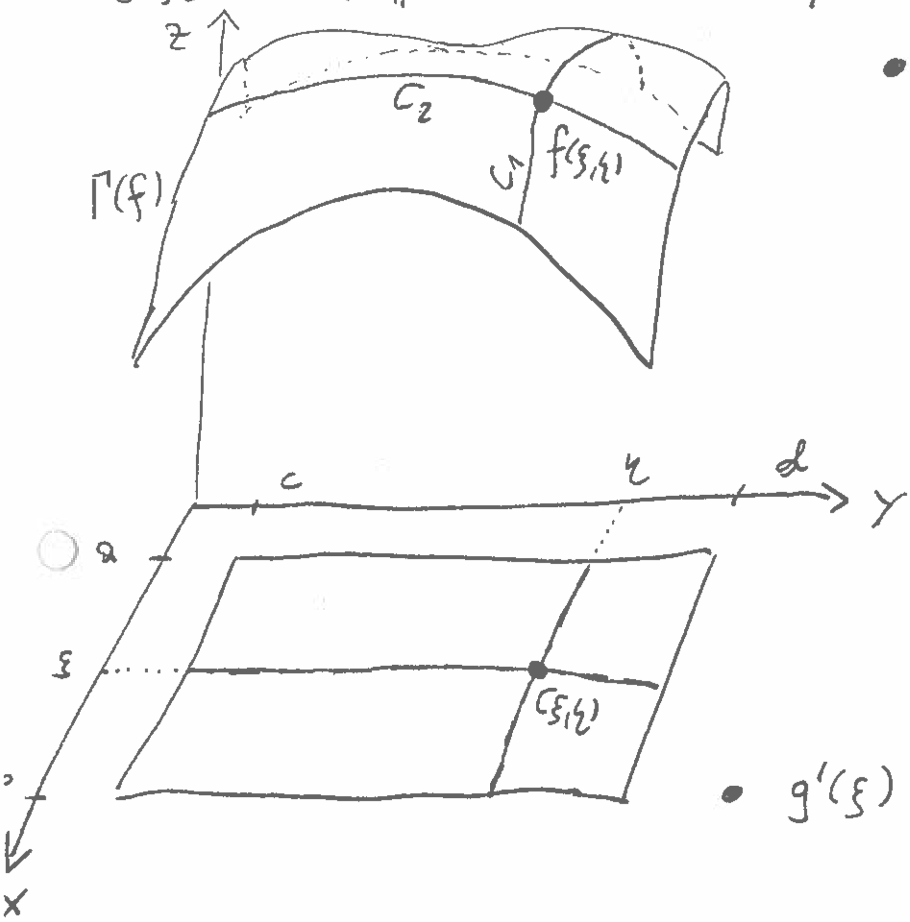
$f: G \to \mathbb{R}$ partiell diffbar, $(\xi, \eta) \in G$ fix

partielle Funktionen $g: x \mapsto f(x,\eta)$, $h: y \mapsto f(\xi, y)$

Graph von f ist

$$\Gamma(f) := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in G,\ z = f(x,y) \}$$

beschreibt „Fläche" über G



- g beschreibt Kurve C_1, die durch Schnitt mit der Ebene $y = \eta$ (parallel zur xz-Ebene) entsteht
- h beschreibt Kurve C_2, die durch Schnitt mit der Ebene $x = \xi$ (parallel zur yz-Ebene) entsteht
- $g'(\xi) = D_1 f(\xi,\eta)$ .... Anstieg von C_1 im Punkt $(\xi, \eta, f(\xi,\eta))$
- $h'(\eta) = D_2 f(\xi,\eta)$ ... Anstieg von C_2 im Punkt $(\xi, \eta, f(\xi,\eta))$

Bem: die Information aus $D_1 f$, $D_2 f$ beschränkt sich auf die (sehr speziell gewählten!) Koordinatenrichtungen und sagt ohne Zusatzbedingungen nichts über andere Richtungen aus.

10. 4. Differenzierbarkeit

- erinnere: wir hatten im SS11 eine Charakterisierung der Diffbarkeit für Fkt. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt

f diffbar in ξ $\Leftrightarrow$ $\exists a \in \mathbb{R}$: $f(\xi+h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h)$

für klein h und mit $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

beobachte: hier ist $h \mapsto a \cdot h$ eine lineare Abb. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Differenzfunktion $h \mapsto f(\xi+h) - f(\xi)$ approximiert; es ist $a = f'(\xi)$.

- dieser Aspekt der Diffbarkeit im Sinne der linearen Approximierbarkeit von $f(\xi+h) - f(\xi)$ lässt sich am einfachsten auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

DEF: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$, $f: G \to \mathbb{R}^m$.

f heißt differenzierbar in ξ, wenn gilt:

$\exists$ lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\exists$ Umgebung U von ξ mit $U \subseteq G$ und $\exists\, r: U_0 := \{h \in \mathbb{R}^n \mid \xi + h \in U\} \to \mathbb{R}^m$, sodass

[$U_0 = U - \{\xi\}$, U_0 ist Umg. von 0]

$$\boxed{\begin{aligned} & f(\xi+h) - f(\xi) = A \cdot h + r(h) \qquad \forall h \in U_0 \\ & \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \end{aligned}}$$

Die lineare Abb. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entspricht (bzgl. der Standardbasen $e_1 = (1,0,\dots,0)$ etc...) einer $(m \times n)$-Matrix
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{?}$ Ist A in obiger Def. eindeutig? Wie kann sie bestimmt werden?

<u>LEMMA</u>: Sei $f: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in ξ gemäß obiger Def. und sei $f = (f_1, \dots, f_m)$ [Komponentenfkt. $f_j: G \to \mathbb{R}$]. Dann ist jedes f_j $(j = 1, \dots, m)$ partiell diffbar in ξ und es gilt

$$A = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\xi) & \cdots & D_n f_1(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(\xi) & \cdots & D_n f_m(\xi) \end{pmatrix} =: Df(\xi).$$

[d.h. $a_{ij} = D_j f_i(\xi)$]

Kurz: f diffbar $\Rightarrow$ f_j partiell diffbar und $A = Df$.

A ist also eindeutig und gegeben durch die sogenannte <u>Jacobi-Matrix</u> $Df(\xi)$ und wird <u>Ableitung</u> von f bei ξ genannt.

Beweis: sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$; $r = (r_1, \dots, r_m)$ [Komp. fkt.] in Def. der Diffbarkeit

Die Gleichung $f(\xi+h)-f(\xi)=A\cdot h+r(h)$ bedeutet in Komponenten $\forall j\in\{1,\dots,m\}$

$$f_j(\xi+h)-f_j(\xi)=a_{j1}\cdot h_1+\dots+a_{jn}\cdot h_n+r_j(h)$$

und $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$ ergibt $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r_j(h)}{\|h\|}=0.$

Speziell mit $h=s\cdot e_k$, $s\in\mathbb{R}$ [d.h. variiert nur in k. Koord.] ergibt sich mit $\rho_j(s):=r_j(s\cdot e_k)$ nun

$$\lim_{s\to 0}\frac{\rho_j(s)}{|s|}=\lim_{s\to 0}\frac{r_j(se_k)}{\|s\cdot e_k\|}=0 \quad \text{sowie}$$

$$f_j(\xi+s\cdot e_k)-f_j(\xi)=a_{jk}\cdot s+\rho_j(s)$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{s\mapsto f_j(\xi+se_k)}_{\xi_1,\dots,\xi_{k-1}\text{ und }\xi_{k+1},\dots,\xi_n\text{ fixiert und }x_k=\xi_k+s}$ differbar bei $s=0$ mit Ableitung a_{jk}

$\Rightarrow$ f_j partiell differbar in ξ nach x_k und $D_kf_j(\xi)=a_{jk}$

$\square$

Spezialfälle: $n=1, m=1$ $\rightsquigarrow$ SS 11, WS 10/11

$n=1$, m beliebig: OBdA U offenes Intervall um ξ und

$$f:U\to\mathbb{R}^m,\quad f(t)=(f_1(t),\dots,f_m(t))\qquad t\in U\subseteq\mathbb{R}$$

$$Df(t)=\begin{pmatrix}D_1f_1(t)\\ \vdots\\ D_1f_m(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1'(t)\\ \vdots\\ f_m'(t)\end{pmatrix}\quad \text{Spaltenvektor, }(m\times 1)\text{-Matrix}$$

<u>n beliebig, m=1:</u> $f: G \to \mathbb{R}$ skalarwertige Funktion

$Df(\xi) = (D_1 f(\xi), \dots, D_n f(\xi))$ … Zeilenvektor, $(1\times n)$-Matrix

$$f(\xi+h) - f(\xi) = D_1 f(\xi)\cdot h_1 + \dots + D_n f(\xi)\cdot h_n + r(h) =$$

$$= \langle \underbrace{Df(\xi)^t}_{\text{transponiert, Spaltenvektor}}, h \rangle + r(h)$$

Notation: $\operatorname{grad} f(\xi) := Df(\xi)^t$ heißt <u>Gradient</u> von f bei ξ

also: $$\boxed{f(\xi+h) - f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), h\rangle + r(h)}$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$

<u>BEM:</u> einfache Überlegungen zeigen für $f: G \to \mathbb{R}^m$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$, dass folgende Aussagen äquivalent sind

(i) f ist diffbar in ξ

(ii) $\forall j \in \{1, \dots, m\}$: $f_j: G \to \mathbb{R}$ ist diffbar in ξ

(iii) $\exists A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, sodass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - A\cdot h}{\|h\|} = 0.$

<u>BEISP:</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, also $f(x) = B\cdot x$ mit $(m\times n)$-Matrix B

$\forall \xi\ \forall h$: $f(\xi+h) - f(\xi) = B(\xi+h) - B\xi = B\cdot h$, d.h. Def. erfüllt mit $A = B$ und $r(h) = 0\ \forall h$; es ist $Df(\xi) = B\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

10.5. SATZ: Wenn $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $\xi \in G$ ist, dann ist f auch stetig in ξ.

Beweis: sei $x^{(k)} \to \xi$ in $\mathbb{R}^n$; setze $h^{(k)} := x^{(k)} - \xi \Rightarrow$

$h^{(k)} \to 0$ und $f(x^{(k)}) - f(\xi) = f(\xi + h^{(k)}) - f(\xi) =$

$$= Df(\xi) \cdot h^{(k)} + r(h^{(k)}) \to Df(\xi) \cdot 0 + 0 = 0$$

[$Df(\xi)$ lineare Abb., also stetig]

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = f(\xi); \text{ also } f \text{ stetig in } \xi \qquad \square$$

10.6. BEM: oben gezeigt f diffbar $\Rightarrow$ f partiell diffbar

Achtung! Existenz der partiellen Ableitungen garantiert nicht Diffbarkeit, d.h.

i.A.: f part. diffb. $\not\Rightarrow$ f diffb.

[siehe z.B. Heuser 2, Aufg. 164.2 bzw. 162.4:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist part. diffb., aber nicht diffbar in $(0,0)$]

[f nicht mal stetig, vgl. Cauchy's Irrtum!]

- falls aber zusätzlich die partiellen Ableitungen stetig sind, dann folgt auch Diffbarkeit

10.7. SATZ: Wenn $f : \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}$ partiell diffbar ist und alle partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f : G \to \mathbb{R}$ stetig sind, dann ist f diffbar auf G [in jedem Punkt].

<u>BEM</u>: unter den Bedingungen von Satz 10.7 gilt dann auch, dass $\xi \mapsto Df(\xi)$ stetig ist; wir sagen daher einfach f sei <u>stetig differenzierbar</u> oder eine <u>C^1-Funktion</u>, wenn f partiell diffbar <u>und</u> alle part. Abl. stetig sind. Es gilt insgesamt:

$$
\begin{tikzcd}
\text{(part.) stetig diffbar} \arrow[r, Rightarrow, "{[10.7]}"'] & \text{diffbar} \arrow[r, Rightarrow, "{[10.5]}"'] \arrow[l, bend right, "\cancel{}\,④"'] \arrow[d, Rightarrow, "{[10.4]}"'] & \text{stetig} \arrow[l, bend right, "\cancel{}\,②"'] \\
& \text{partiell diffbar} \arrow[u, bend right, "\cancel{}\,③"'] \arrow[ur, "\cancel{}\,①"'] &
\end{tikzcd}
$$

[①: siehe 10.6 und Cauchy's Irrtum; ②: <u>n=1</u>: Beisp. $x \mapsto |x|$; ③: siehe 10.6;
④: <u>n=1, Beisp:</u> $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist diffbar und f' unstetig bei 0]

Beweis von Satz 10.7 für den Fall $n=2$:

sei $(\xi,\eta) \in G$ und $W = [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \times [\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon] \subseteq G$

für (α,β) mit $|\alpha|, |\beta| < \varepsilon$ gilt $(\xi,\eta) + (\alpha,\beta) \in W$

$$f((\xi,\eta)+(\alpha,\beta)) - f(\xi,\eta) =$$

$$\underbrace{f(\xi+\alpha,\eta+\beta) - f(\xi,\eta+\beta)}_{\substack{[\text{MWS der Diff.}] \\ \| \\ \alpha \cdot D_1 f(x_1, \eta+\beta)}} + \underbrace{f(\xi,\eta+\beta) - f(\xi,\eta)}_{\substack{[\text{MWS der Diff}] \\ \| \\ \beta \cdot D_2 f(\xi, y_1)}} = ⊛$$

mit passenden Zwischenstellen $x_1 \in [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|]$, $y_1 \in [\eta-|\beta|, \eta+|\beta|]$

$$\circledast = \alpha \cdot D_1 f(x_1, \eta+\beta) + \beta \cdot D_2 f(\xi, y_1) =$$

$$= \alpha \cdot D_1 f(\xi,\eta) + \beta \cdot D_2 f(\xi,\eta) +$$

$$+ \underbrace{\alpha \cdot \underbrace{\left(D_1 f(x_1,\eta+\beta) - D_1 f(\xi,\eta)\right)}_{=: r_1(\alpha,\beta)} + \alpha \cdot \underbrace{\left(D_2 f(\xi, y_1) - D_2 f(\xi,\eta)\right)}_{=: r_2(\alpha,\beta)}}_{=: r(\alpha,\beta)} =$$

$$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(D_1 f(\xi,\eta), D_2 f(\xi,\eta)\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + r(\alpha,\beta)}$$

und $\dfrac{|r(\alpha,\beta)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq \dfrac{|\alpha| \cdot |r_1(\alpha,\beta)| + |\beta| |r_2(\alpha,\beta)|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq$ [Cauchy-Schwarz-Ungleichung]

$$\leq \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot \sqrt{r_1^2(\alpha,\beta) + r_2^2(\alpha,\beta)}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sqrt{r_1^2(\alpha,\beta) + r_2^2(\alpha,\beta)}$$

mit $(\alpha,\beta) \to (0,0)$ folgt $x_1 \to \xi$, $y_1 \to \eta$, $\eta+\beta \to \eta$,

daher auch $r_1(\alpha,\beta), r_2(\alpha,\beta) \to 0$,

weil $D_1 f$ und $D_2 f$ stetig sind

$\Rightarrow$ f differbar in (ξ,η), weil $\dfrac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ ($h \to 0$ in $\mathbb{R}^2$)

$\square$

(Der Fall für beliebiges n benötigt nur Anpassung der Notation.)