10.8. Rechenregeln für die Differentiation

(i) Linearkombinationen: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar

$\Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha f + \beta \cdot g$ ist diffbar $G \to \mathbb{R}^m$ und

$$\boxed{D(\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha \cdot Df(\xi) + \beta \cdot Df(\xi)} \qquad (\xi \in G)$$

Beweis:

für $\|h\|$ klein $\begin{cases} f(\xi+h) - f(\xi) = Df(\xi) \cdot h + r_1(h), & r_1(h) = o(\|h\|) \\ g(\xi+h) - g(\xi) = Dg(\xi) \cdot h + r_2(h), & r_2(h) = o(\|h\|) \end{cases}$

$$\Rightarrow (\alpha f + \beta g)(\xi+h) - (\alpha f + \beta g)(\xi) = \alpha \cdot f(\xi+h) - \alpha \cdot f(\xi) + \beta \cdot g(\xi+h) - \beta g(\xi)$$

$$= \alpha \cdot Df(\xi) + \beta \cdot Dg(\xi) + \underbrace{\alpha \cdot r_1(h) + \beta \cdot r_2(h)}_{=: r(h)}$$ und

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \alpha \cdot \frac{r_1(h)}{\|h\|} + \lim_{h \to 0} \beta \cdot \frac{r_2(h)}{\|h\|} = 0$$

$\square$

(ii) Kettenregel: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g: G \to \mathbb{R}^p$ diffbar,

$A \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $f: A \to \mathbb{R}^m$ diffbar, $g(G) \subseteq A$

$$\left[\; G \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \right]$$

$\Rightarrow$ $f \circ g: G \to \mathbb{R}^m$ diffbar und es gilt $\forall \xi \in G$

$$\boxed{D(f \circ g)(\xi) = Df(g(\xi)) \cdot Dg(\xi)}$$

links: $(m \times n)$-Matrix

rechts: Produkt einer $(m \times p)$-Matrix $[Df(g(\xi))]$ mit einer $(p \times n)$-Matrix $[Dg(\xi)]$

Beweisskizze: für $\|h\|$ klein gilt

$$(f\circ g)(\xi+h)-(f\circ g)(\xi)=f(g(\xi+h))-f(g(\xi))=\left[\begin{array}{l}\eta=g(\xi)\\ \bar h=g(\xi+h)-g(\xi)\\ g(\xi+h)=\eta+\bar h\end{array}\right]$$

$$=Df(\underbrace{g(\xi)}_{\eta})\cdot(\underbrace{g(\xi+h)-g(\xi)}_{\bar h})+r_1(\underbrace{g(\xi+h)-g(\xi)}_{\bar h})=$$

$$=Df(g(\xi))\cdot\left(Dg(\xi)^h+r_2(h)\right)+r_1(\bar h)=$$

$$=Df(g(\xi))\cdot Dg(\xi)^h+\underbrace{Df(g(\xi))\cdot r_2(h)+r_1(\bar h)}_{(*)}$$

bleibt z.z., dass $\frac{(*)}{\|h\|}\to 0\quad(h\to 0)$ [siehe z.B. Heuser 2, §165]

$\square$

BEISP: 1) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(\xi,\eta)=(0,1)$

$$g(x,y)=\begin{pmatrix}x-y\\ x\cdot y\end{pmatrix},\quad f(x,y)=\begin{pmatrix}x+y\\ 3x+2y\\ y\end{pmatrix};\quad g(0,1)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Dg(x,y)=\begin{pmatrix}1&-1\\ y&x\end{pmatrix},\quad Dg(0,1)=\begin{pmatrix}1&-1\\ 1&0\end{pmatrix}$$

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\ 3&2\\ 0&1\end{pmatrix}=Df(g(0,1))=Df(-1,0)\quad\Rightarrow$$

$$D(f\circ g)(0,1)=Df(-1,0)\circ Dg(0,1)=\begin{pmatrix}1&1\\ 3&2\\ 0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\ 1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\ 5&-3\\ 1&0\end{pmatrix}$$

$[f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3]$

2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar; $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

es ist $Dg(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix}}_{g'(t)}$ $[\forall t \in \mathbb{R}]$ und $Df(x) = (D_1 f(x), \dots, D_n f(x))$ $[\forall x \in \mathbb{R}^n]$

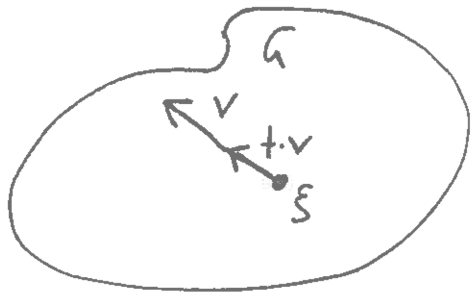
und

$$(f \circ g)'(t) = Df(g(t)) \cdot Dg(t) = D_1 f(g(t)) \cdot g_1'(t) + \dots + D_n f(g(t)) \cdot g_n'(t)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} D_1 f \\ \vdots \\ D_n f \end{pmatrix}(g(t)), \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \operatorname{grad} f(g(t)), g'(t) \rangle$$

10.9. Richtungsableitungen

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$,
$v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$, $\xi \in G$



DEF: Falls der Grenzwert

$D_v f(\xi) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + t \cdot v) - f(\xi)}{t}$ existiert, heißt diese Zahl die Richtungsableitung von f im Punkt ξ in Richtung v.

Entspricht also Änderung von $f(\xi)$ in Richtung v.

$\boxed{!}$ Spezialfall $v = e_j$ ergibt partielle Ableitung,

d.h. $D_{e_j} f(\xi) = D_j f(\xi)$.

Bem: Existenz aller Richtungsabl. garantiert nicht Diffbarkeit [Heuser 2; Aufg. 166.3]

SATZ: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ diffbar, $\xi \in G$.

(i) $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1 \Rightarrow \exists\ D_v f(\xi)$ und es gilt

$$D_v f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle$$

Insbesondere gilt: $\operatorname{grad} f(\xi) = 0 \Rightarrow D_v f(\xi) = 0 \ \forall v$

(ii) Sei $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$, dann wird das Maximum aller Richtungsableitungen $D_v f(\xi)$ $(v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1)$ für $v = \frac{\operatorname{grad} f(\xi)}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|}$ angenommen und der Wert ist $\|\operatorname{grad} f(\xi)\|$.

D.h. $\operatorname{grad} f(\xi)$ gibt die Richtung des stärksten Anstiegs von f an und seine Norm ist gerade dieser stärkste Anstieg.

Beweis: (i) Setze $g(t) := \xi + t \cdot v \Rightarrow Dg(t) = g'(t) = v$ und

$$D_v f(\xi) = (f \circ g)'(0) = Df(\underbrace{g(0)}_{\xi}) \cdot Dg(0) = \langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle$$

(ii) $\forall v, \|v\| = 1: \ |D_v f(\xi)| = |\langle \operatorname{grad} f(\xi), v \rangle| \leq$ [CS-Ungl.]

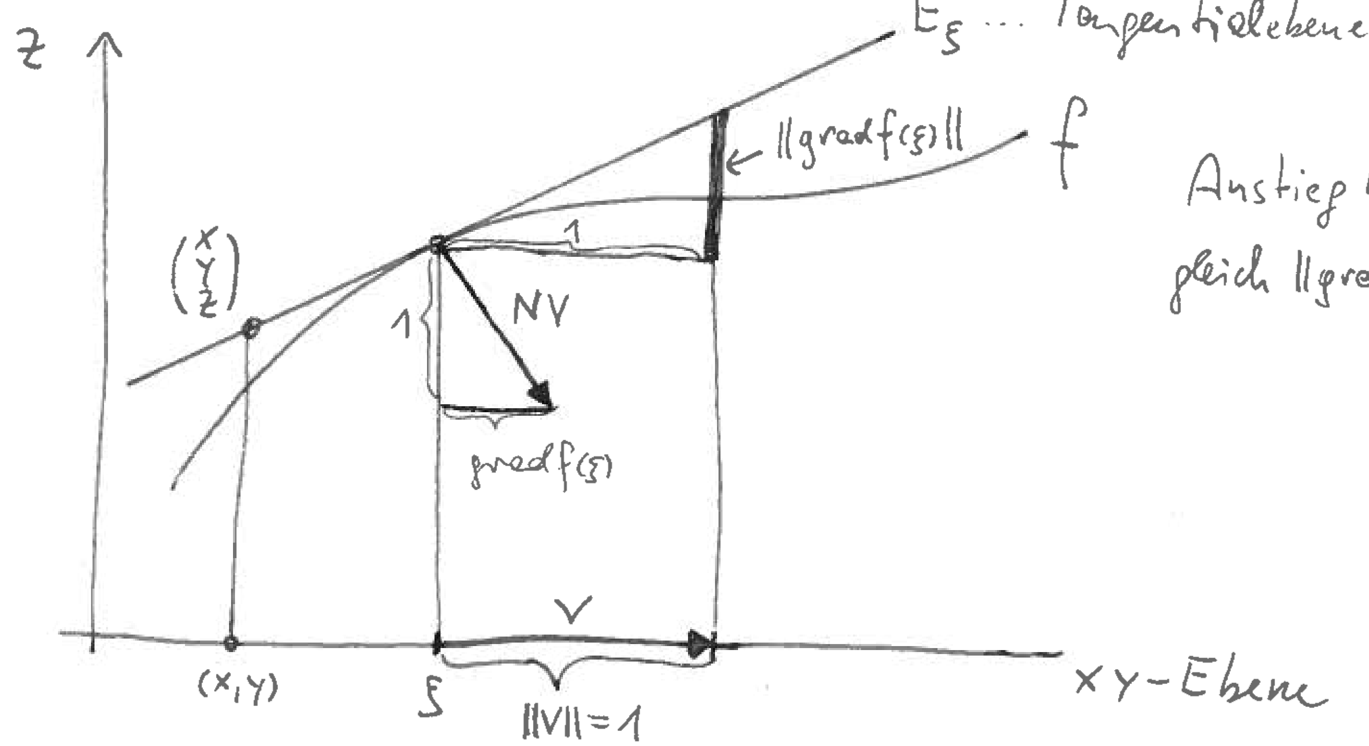
$\leq \|\operatorname{grad} f(\xi)\| \cdot \|v\| = \|\operatorname{grad} f(\xi)\|$ und für

$v = \frac{\operatorname{grad} f(\xi)}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|}$ ergibt sich $D_v f(\xi) = \frac{\langle \operatorname{grad} f(\xi), \operatorname{grad} f(\xi) \rangle}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|} =$

$$= \frac{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|^2}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|} = \|\operatorname{grad} f(\xi)\| \qquad \square$$

10.10. Anwendung: Tangentialebene: $\xi \in G$, wobei

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ differenzierbar; vertikaler Schnitt des Graphen $\Gamma(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ über der Geraden $t \mapsto \xi + t \cdot v$ mit $v = \frac{\operatorname{grad} f(\xi)}{\|\operatorname{grad} f(\xi)\|}$ sieht so aus



Anstieg bei ξ gleich $\|\operatorname{grad} f(\xi)\|$

ein Normalvektor im Punkt $(\xi_1, \xi_2, f(\xi_1, \xi_2))$ ist gegeben durch $NV = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(\xi) \\ -1 \end{pmatrix}$ $[\operatorname{grad} f(\xi) \in \mathbb{R}^2]$

Hessesche Normalform für E_ξ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\xi \iff \left\langle NV, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \\ f(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f(\xi) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \binom{x}{y} - \binom{\xi_1}{\xi_2} \\ z - f(\xi) \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \iff$$

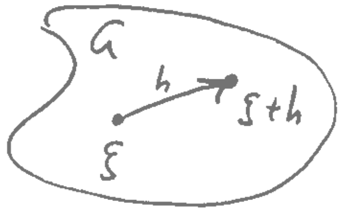
$$\left\langle \operatorname{grad} f(\xi), \begin{pmatrix} x - \xi_1 \\ y - \xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle - (z - f(\xi)) = 0 \iff$$

$$\boxed{z = f(\xi_1,\xi_2) + \left\langle \operatorname{grad} f(\xi_1,\xi_2), \begin{pmatrix} x-\xi_1 \\ y-\xi_2 \end{pmatrix} \right\rangle} \qquad (*)$$

$E_\xi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \text{ erfüllen Gl. } (*)\}$ heißt <u>Tangentialebene</u> an den Graphen von f im Punkt $(\xi_1, \xi_2, f(\xi_1,\xi_2))$.

10.11. Mittelwertsatz und Taylorapproximation

(i) $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$, $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass die gesamte Strecke von ξ nach $\xi + h$ innerhalb G liegt



$f: G \to \mathbb{R}$ diffbar, dann gilt

$$\exists\, \theta \in [0,1]: \; f(\xi+h) - f(\xi) = Df(\xi + \theta \cdot h) \cdot h \qquad (**)$$

[Bew. z.B. in Heuser 2, 167.1]

! $(**)$ gilt i.A. nicht für Funktionen $G \to \mathbb{R}^m$ mit $m > 1$.

Aber es gilt für allgemeines $m \in \mathbb{N}$ mit ξ, h wie oben folgende <u>Version des Mittelwertsatzes in höheren Dimensionen:</u>

f stetig diffbar $\Rightarrow \exists\, M \geq 0: \boxed{\|f(\xi+h) - f(\xi)\| \leq M \cdot \|h\|}$,

wobei M durch Schranken aller $|D_j f_i|$ abgeschätzt werden kann.

Folgerung: $Df(x) = 0 \;\forall x \in U_\varepsilon(\xi) \Rightarrow f$ auf $U_\varepsilon(\xi)$ konstant.

= 31.10.2011 =