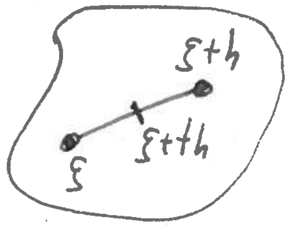
(ii) Taylorapproximation in zwei Variablen:

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\xi = (x_0, y_0) \in G$, $h = (h_1, h_2)$ so, dass die ganze Strecke $\{ \xi + t \cdot h \mid 0 \le t \le 1 \}$ in G liegt



Sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion
[2mal stetig differbar]

betrachte $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) := f(\xi + t \cdot h) = f(x_0 + th_1, y_0 + th_2)$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(1)}_{f(\xi+h)} = \underbrace{\varphi(0)}_{f(\xi)} + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \text{Restglied} \quad \left[\begin{array}{c}\text{Satz von}\\ \text{Taylor}\end{array}\right]$$

- $\varphi'(t) = Df(\xi + th) \cdot h$, insbes. $\underline{\varphi'(0) = Df(\xi) \cdot h = \langle \operatorname{grad} f(\xi), h \rangle}$
- $\varphi''(t) = \frac{d}{dt}\left(D_1 f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) \cdot h_1 + D_2 f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) \right) =$

$$= D_1^2 f(\xi + th) \cdot h_1^2 + \underbrace{D_2 D_1 f(\xi + th) \cdot h_1 \cdot h_2 + D_1 D_2 f(\xi + th) \cdot h_1 h_2}_{\equiv} + D_2^2 f(\xi + th) \cdot h_2^2$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} D_1^2 f & D_1 D_2 f \\ D_2 D_1 f & D_2^2 f \end{pmatrix}}_{=: H(f)} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$=: H(f) \ldots$ <u>Hesse-Matrix</u>, symmetrisch

$H(f)(x) := \left(D_i D_j f(x) \right)_{i,j}$

$\rightsquigarrow$

$$\boxed{f(\xi + h) = \underbrace{f(\xi) + \langle \operatorname{grad} f(\xi), h \rangle}_{\text{[lin. Approx.; Tangentialebene]}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \langle H(f)(\xi) \cdot h, h \rangle}_{\text{quadratische Form}} + \text{Rest}}$$

und $\frac{\text{Rest}}{\|h\|^2} \to 0 \quad (h \to 0)$ [Bew. z.B. Heuser 2, §168]

§11 IMPLIZITE FUNKTIONEN UND UMKEHRSATZ

11.1. Höhenlinien als Niveaumengen

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f: G \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $c \in \mathbb{R}$

$$N_f(c) = \{(x,y) \in G \mid f(x,y) = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

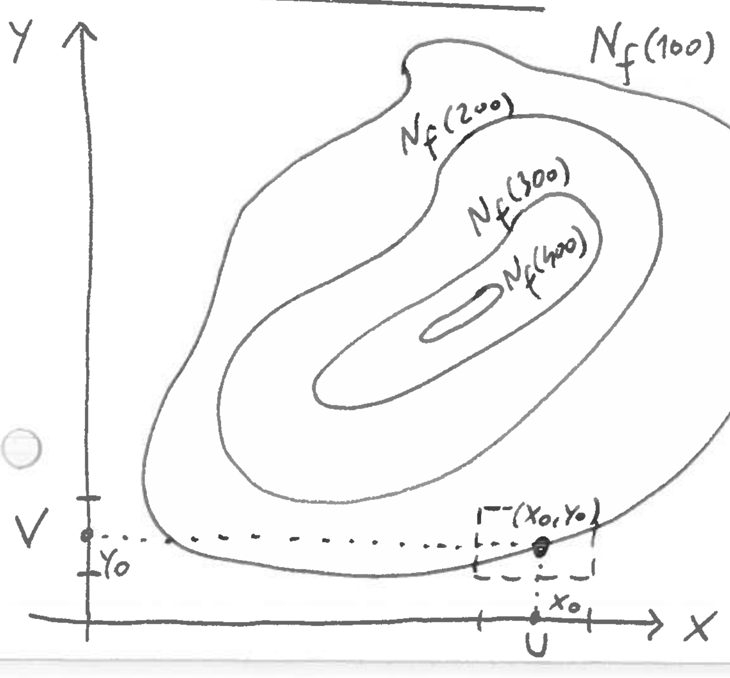
heißt <u>Niveaumenge</u> von f zum Wert c

Bem: (i) $c \notin f(G)$ [c kommt nicht als Funktionswert unter f vor]

$$\Rightarrow N_f(c) = \emptyset$$

(ii) f konstant gleich $c \Rightarrow N_f(c) = G$

<u>Intuitiv</u>: wenn (der Graph von) f eine Gebirgslandschaft beschreibt (mit $f(x,y)$ als Höhe über dem Punkt $(x,y) \in G$), dann entspricht $N_f(c)$ in geographischen Karten einer <u>Höhenlinie</u>.



$\boxed{?}$ Kann die Höhenlinie nahe $(x_0, y_0) \in N_f(c)$ durch eine Funktion $h: U \to V$ dargestellt werden? D.h.:

$$f(x,y) = c \quad (\forall (x,y) \in U \times V)$$

$$\Updownarrow \; ?$$

$$y = h(x)$$

- falls $\operatorname{grad} f(x,y) = \binom{0}{0}$ $\forall (x,y)$ nahe (x_0,y_0), dann ist
  f in Umgebung von (x_0,y_0) konstant und $N_f(c)$ daher sicher keine Kurve, sondern leer oder enthält eine ganze Scheibe um (x_0,y_0)

Daher nehmen wir für die weitere Untersuchung der Frage prinzipiell an, dass

(*) $\boxed{\operatorname{grad} f(x_0,y_0) \neq 0}$ gilt

- falls obige Frage mit 'ja' beantwortet werden kann,

d.h.

$$(**)\left\{\begin{array}{l}\exists \text{ Umg. } U \text{ von } x_0\ \exists \text{ Umg. } V \text{ von } y_0\ \exists h: U \to V, \\ \text{sodass } \forall (x,y) \in U \times V:\ f(x,y) = c \Leftrightarrow y = h(x),\end{array}\right.$$

dann haben wir also die „Gleichung $f(x,y)=c$ nach y aufgelöst" und die Funktion h ist, falls sie auch eindeutig ist, „durch die Gleichung $f(x,y)=c$ implizit gegeben".

- <u>notwendige Bedingung für die Existenz einer diffbaren Funktion h, die (**) erfüllt:</u>

sei $f(x,h(x)) = c$ $\forall x \in U$ ..... wir leiten nach x ab und erhalten

$$\forall x \in U: \quad 0 = D_1 f(x, h(x)) + D_2 f(x, h(x)) \cdot h'(x) \qquad (***)$$

Beh: $\boxed{D_2 f(x_0, y_0) \neq 0}$

Bew: es ist $h(x_0) = y_0$; wäre $D_2 f(x_0, y_0) = 0$, dann ergäbe $(***)$ sofort $D_1 f(x_0, y_0) = 0$ und daher

$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ↯ Wid. zu $(*)$ □

Insbesondere folgt nun aus $(***)$ sofort auch

$$\boxed{h'(x) = -\frac{D_1 f(x, y)}{D_2 f(x, y)}}$$

11.2. SATZ (über implizite Funktionen): Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f: G \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $c \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in G$ mit

$f(x_0, y_0) = c$ und $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) Falls $D_2 f(x_0, y_0) \neq 0$, dann $\exists$ Umg. U von x_0 und V von y_0, $\exists\, h: U \to V$ stetig diffbar und eindeutig mit Eig.:

$$\forall (x, y) \in U \times V: \quad f(x, y) = c \iff y = h(x).$$

(ii) Falls $D_1 f(x_0, y_0) \neq 0$, dann $\exists$ Umg. U von x_0 und V von y_0, $\exists\, g: V \to U$ stetig diffbar und eindeutig mit Eig.:

$$\forall (x, y) \in U \times V: \quad f(x, y) = c \iff x = g(y).$$

Weiters gilt im Fall (i) $h'(x) = -\dfrac{D_1 f(x,h(x))}{D_2 f(x,h(x))}$

und im Fall (ii) $g'(y) = -\dfrac{D_2 f(g(y),y)}{D_1 f(g(y),y)}$.

Beweisskizze: genügt, (i) zu zeigen ((ii) entsteht aus (i) durch passende Umbenennung der Variablen)

OBdA: $D_2 f(x_0,y_0) > 0$
(sonst $-f$ nehmen)

$\rightsquigarrow$ nahe (x_0,y_0) bleibt $D_2 f(x,y) \geq \gamma > 0$ $\rightsquigarrow$

$\underbrace{\forall x \text{ nahe } x_0}_{\text{sei } U \text{ pass. Umg. von } x_0}$, ist $\underbrace{y \mapsto f(x,y)}_{\text{auf geeigneter Umg. } V \text{ von } y_0}$ str. mon. wachsend und $f(x_0,y_0) = c$

Daher gilt: $\forall x \in U \; \exists! \, y \in V: \; f(x,y) = c$;
setze $h(x) := y$.

Dies ergibt $h: U \to V$ mit Eig.: $f(x,y) = c \iff y = h(x)$.

Noch z.z.: h diffbar in jedem $\xi \in U$.

Sei $\eta := h(\xi)$; ähnlich wie im Bew. von Satz 10.7. erhalten wir durch Anwendung des MWS der Diff.: $\exists x_1$ zw. x und ξ, sodass

$$\underbrace{f(x,h(x))}_{c} - \underbrace{f(\xi,h(\xi))}_{c} = D_1 f(x_1,h(x)) \cdot (x-\xi) + \underbrace{D_2 f(\xi,h(x_1))}_{\geq \gamma > 0} \cdot (h(x)-h(\xi)) \quad \Rightarrow$$

$$h(x)-h(\xi) = -\underbrace{\frac{D_1 f(x_1, h(x))}{D_2 f(\xi, h(x_1))}}_{\text{beschränkt, weil } D_1 f \text{ stetig und } D_2 f \geq \gamma.} \cdot (x-\xi) \to 0 \quad (x \to \xi)$$

$\Rightarrow$ h stetig

und weiters für $x \neq \xi$:

$$\frac{h(x)-h(\xi)}{x-\xi} = -\frac{D_1 f(x_1, h(x))}{D_2 f(\xi, h(x_1))}$$ konvergent für $x \to \xi$,

weil h stetig, $x_1 \to \xi$ und $D_1 f, D_2 f$ stetig sind.

Es ergibt sich $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{h(x)-h(\xi)}{x-\xi} = -\frac{D_1 f(\xi, h(\xi))}{D_2 f(\xi, h(\xi))}$

(folgt aber auch analog zu 11.1, sobald Diffbarkeit erkannt)

Eindeutigkeit von h folgt aus strenger Monotonie von $y \mapsto f(x,y)$ auf hinreichend kleiner Umgebung.

$\square$

11.3. BEM: in der Praxis meist $y(x)$ statt $h(x)$ geschrieben; Berechnung der Ableitungen $y'(x)$ (und auch $y''(x)$ etc.) aus der Gleichung $f(x, y(x)) = c$ heißt oft implizites Differenzieren [Descartes 1637; Beweise erst ab 1884 durch Peano und andere]

11.4. BEISP: $G =]0,\infty[^2$, $f: G \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y + \log(xy)$

$(x_0,y_0) = (1,1)$, $c = 2$ $[\ f(x_0,y_0) = f(1,1) = 1+1+\log 1 = 2\ ]$

wir wollen die Gl. $x + y + \log(xy) = 2$ nahe $x=1, y=1$
nach y (als Fkt. von x) auflösen

$$D_2 f(x,y) = 0 + 1 + \frac{1}{xy}\cdot x = 1 + \frac{1}{y}, \quad D_2 f(1,1) = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ stetig diffbare Fkt. $x \mapsto y(x)$ nahe $x = 1$ (eind.)
mit Eig. $x + y(x) + \log(x \cdot y(x)) = 2$;

$$y'(x) = -\frac{D_1 f(x,y(x))}{D_2 f(x,y(x))} = -\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{y(x)}}, \text{ speziell } y'(1) = -\frac{2}{2} = -1$$

11.5. BEM – allg. Fall von q Gleichungen mit $p+q$ Variablen:

$G \subseteq \mathbb{R}^p$, $H \subseteq \mathbb{R}^q$ offen, $f: G\times H \to \mathbb{R}^q$ stetig diffbar,
$(\xi,\eta) \in G \times H$ mit $f(\xi,\eta) = 0$ und $\left(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(\xi,\eta)\right)_{\substack{i=1,\dots,q\\ j=1,\dots,q}}$ invertierbar

$\Rightarrow \exists$ Umg. U von ξ, V von η $\exists h: U \to V$ stetig diffbar:
$h(\xi) = \eta$ und $f(x,h(x)) = 0 \quad \forall x \in U$.

[Bew: siehe Heuser 169.1, 170.1, 170.2]

(OBdA: $f(x,y) = 0$ statt $f(x,y) = c$, weil sonst einfach
$\tilde{f} = f - c$ genommen werden kann; $D_j \tilde{f} = D_j f \dots$) 7.11.2011

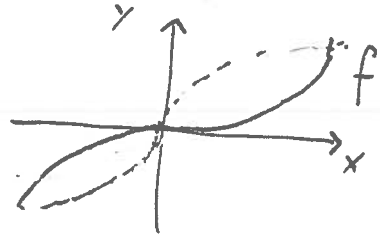
11.6. Problem der differenzierbaren Umkehrfunktion

- $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $H \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f: G \to H$ diffbar und bijektiv

$\boxed{?}$ Ist $f^{-1}: H \to G$ diffbar?

- i.A. NEIN – Bsp: $G = H =]-1,1[$, $f:]-1,1[\to]-1,1[$, $f(x) = x^3$ hat Umkehrfkt.

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y^{\frac{1}{3}} & 0 \le y < 1, \\ -|y|^{\frac{1}{3}} & -1 < y < 0 \end{cases}$$



f^{-1} nicht diffber bei $y = 0$

- $\left[h > 0: \frac{f^{-1}(h) - f^{-1}(0)}{h} = \frac{f^{-1}(h)}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} \to +\infty \ (h \to 0) \right]$

- falls JA, dann $n = m$ und $Df(x)$ invertierbar $\forall x \in G$:

$$(1)\ \forall x \in G: (f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad (2)\ \forall y \in H: (f \circ f^{-1})(y) = y$$

$\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow}$ $(*)$: $D(f^{-1})(f(x)) \cdot Df(x) = I_n$, $(**)$: $Df(f^{-1}(y)) \cdot D(f^{-1})(y) = I_m$

- erinnere: $Df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, $D(f^{-1})(y): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear

$Df(x)$ injektiv: $v \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)v = 0 \Rightarrow \underline{0} = D(f^{-1})(f(x)) \cdot Df(x)v \underset{(*)}{=} \underline{v}$,

also $n \le m$

$D(f^{-1})(y)$ injektiv: folgt analog mittels $(**)$, also $m \le n$

$\Rightarrow n = m$ und somit $Df(x)$ bijektiv, also invertierbar und $\boxed{D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}}$.

- Invertieren von f $\Leftrightarrow$ Auflösen von $f(x) = y$ nach x

$\Leftrightarrow$ Auflösen von $F(x,y) := f(x) - y = 0$ nach x (als Fkt. von y)

SATZ: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar und $a \in G$ mit Eig., dass $\underline{Df(a) \text{ invertierbar}}$.

Dann $\exists$ offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$: f bildet U bijektiv auf V ab [wir bezeichnen diese Abb. zur Vereinfachung wieder mit $f: U \to V$] und $f^{-1}: V \to U$ ist stetig diffbar mit

$$\underline{D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}} \quad \forall x \in U$$

Beweisskizze: $x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y \iff \underbrace{f(x) - y}_{=: F(x,y)} = 0$

$F(x,y)$ in Umg. von $(a, f(a))$ nach x auflösbar, falls

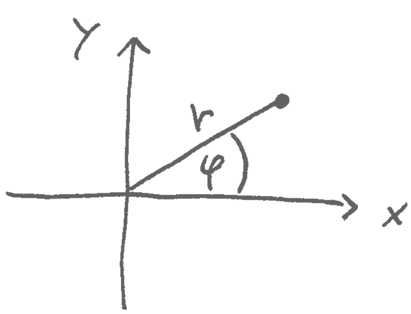
$$\underbrace{\partial_x F(a, f(a))}_{= Df(a) - 0 = Df(a)} \text{ invertierbar}$$

□

DEF: $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to V$ bijektiv, stetig diffbar <u>und</u> $f^{-1}: V \to U$ stetig diffbar, dann heißt f (C^1-) <u>Diffeomorphismus</u>

BEISP: <u>Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$</u>

$G =]0, \infty[\times \mathbb{R}$, $f: G \to \mathbb{R}^2$



$f(r, \varphi) = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$

f stetig diffbar und

$$Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$ ist invertierbar $\forall\, (r,\varphi) \in G$,

weil z.B. $\det Df(r,\varphi) = r\cdot\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r > 0$

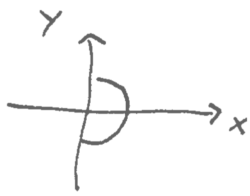
$\Rightarrow$ f ist in Umg. jedes Punktes aus G ein Diffeo

und $\underbrace{D(f^{-1})(x,y)} \underset{\left[\binom{x}{y} = f(r,\varphi)\right]}{=} (Df(r,\varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi,\ \frac{x}{r} = \cos\varphi \\ y = r\sin\varphi,\ \frac{y}{r} = \sin\varphi \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right]$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}}$$

! f ist nicht global bijektiv $]0,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
weil z.B: $f(r,\varphi+2\pi) = f(r,\varphi)$



<u>explizite Umkehrfunktion für $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$:</u>

$x = r\cos\varphi > 0$, $\frac{y}{x} = \tan\varphi$ für $(r,\varphi) \in\,]0,\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[=: V$

$f: V \to\,]0,\infty[\times\mathbb{R}$ (rechte, offene Halbebene, d.h. $x>0$) und

$f^{-1}:]0,\infty[\times\mathbb{R} \to V$, $f^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

§12 EXTREMA REELLWERTIGER FUNKTIONEN

<u>12.1. DEF:</u> sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: A \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $\xi \in A$ heißt <u>lokales Maximum</u> (bzw. <u>Minimum</u>) von f, falls gilt $\exists$ Umgebung V von ξ, sodass $\forall x \in V \cap A$:

$$f(x) \leq f(\xi) \quad (\text{bzw. } f(x) \geq f(\xi)).$$

$\xi \in A$ heißt <u>lokales Extremum</u>, falls lok. Max. oder Min.

$\xi \in A$ heißt <u>globales Extremum</u>, falls ξ ein <u>globales Maximum</u>, d.h. $f(x) \leq f(\xi)$ $\forall x \in A$, oder ein <u>globales Minimum</u>, d.h. $f(x) \geq f(\xi)$ $\forall x \in A$, ist.

Ein Extremum heißt <u>strikt</u>, falls in obigen Bedingungen $f(x) < f(\xi)$ (bzw. $f(x) > f(\xi)$) $\forall x \neq \xi$ gilt.

<u>12.2. SATZ:</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>offen</u>, $f: U \to \mathbb{R}$ partiell diffbar und $\xi \in U$ ein lokales Extremum von f.

Dann gilt $\boxed{\operatorname{grad} f(\xi) = 0}$ (äquivalent: $Df(\xi) = 0$)

Beweis: für $1 \leq j \leq n$ betrachte $g_j: t \mapsto f(\xi + t \cdot e_j)$;

ξ lok. Extr. für f $\Rightarrow$ $t = 0$ lok. Extr. für g_j

$\Rightarrow 0 = g_j'(0) = D_j f(\xi)$ $(j = 1, \ldots, n)$ $\Rightarrow Df(\xi) = 0$ $\square$

12.3. Heuristik für hinreichende Bedingungen

Wir wissen schon aus dem Fall $n=1$, dass die gemäß 12.2. notwendige Bedingung $Df(\xi)=0$ für ein lokales Extremum in ξ nicht hinreichend ist [z.B. $f(x)=x^3$, $\xi=0$]

Wenn f eine $\mathcal{C}^2$-Funktion ist [2-mal stetig diffbar], dann können wir die Taylorapproximation zweiter Ordnung betrachten

$$f(\xi+h)=f(\xi)+\langle \operatorname{grad} f(\xi), h\rangle+\frac{1}{2}\langle H_f(\xi)\cdot h, h\rangle+\underbrace{o(\|h\|^2)}_{\text{Rest}}$$

wobei $H_f(\xi)=\begin{pmatrix} D_1D_1f(\xi) & \cdots & D_1D_nf(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ D_nD_1f(\xi) & \cdots & D_nD_nf(\xi)\end{pmatrix}$ Hesse-Matrix, symmetrisch!

d.h. mit der $(n\times n)$-Matrix $A:=H_f(\xi)$ gilt $\forall x$ nahe ξ

$$f(x)\approx f(\xi)+\langle \operatorname{grad} f(\xi), x-\xi\rangle+\frac{1}{2}\langle A\cdot(x-\xi), x-\xi\rangle$$

angenommen $\operatorname{grad} f(\xi)=0$, d.h. ξ ist „Kandidat für Extr.", dann gilt $\forall x$ nahe ξ, $x\neq\xi$

$$f(x)\approx f(\xi)+\frac{1}{2}\underbrace{\langle A\cdot(x-\xi), x-\xi\rangle}_{\substack{\text{ist } >0, \text{ falls } A \text{ positiv definit} \\ \text{und } <0, \text{ falls } A \text{ negativ definit}}}$$

D. h. wir erwarten folgendes Resultat:

(i) $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$ und $H_f(\xi)$ pos. def. $\Rightarrow$ f str. lok. Min.

(ii) $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$ und $H_f(\xi)$ neg. def. $\Rightarrow$ f str. lok. Max.

12.4. WH oder Zwischenbericht über Matrizen:

- Eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix A heißt

1) positiv definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $\langle Ax, x \rangle > 0$
2) positiv semidefinit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\langle Ax, x \rangle \geq 0$
3) negativ definit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $\langle Ax, x \rangle < 0$
   [d. h. $-A$ ist pos. def.]
4) negativ semidefinit, falls $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\langle Ax, x \rangle \leq 0$
   [d. h. $-A$ ist pos. semidef.]
5) indefinit, falls $\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n$: $\langle Ax, x \rangle > 0$ und $\langle Ay, y \rangle < 0$

- A symmetrisch $\Rightarrow$ $\exists$ ONB $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren, alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind reell und $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, v_j \rangle \cdot v_j, \text{ d. h.}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

[ähnlich zu] Diagonalmatrix

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, v_j \rangle^2, \text{ daher}$$

1) A pos. def. $\Leftrightarrow \forall j: \lambda_j > 0$
2) A pos. semidef. $\Leftrightarrow \forall j: \lambda_j \geq 0$
3) A neg. def. $\Leftrightarrow \forall j: \lambda_j < 0$
4) A neg. semidef. $\Leftrightarrow \forall j: \lambda_j \leq 0$
5) A indef. $\Leftrightarrow \exists\, j_1, j_2: \lambda_{j_1} > 0, \lambda_{j_2} < 0$

Nachteil: muss Eigenwerte kennen

Spezialfall von (2×2)-Matrizen:

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ beliebige reelle symmetrische (2×2)-Matr

dann gilt:

(i) A indefinit $\Leftrightarrow$ $\det A < 0$

(ii) A pos. def. $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ und $a > 0$

(iii) A neg. def. $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ und $a < 0$

Beweis: mit $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ist $\underline{\langle Az, z \rangle = a \cdot z_1^2 + 2 \cdot b \cdot z_1 z_2 + c \cdot z_2^2}$

(ii): $\Rightarrow$ setze $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $0 < \langle Az, z \rangle = a$;

setze $z = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \end{pmatrix}$: $0 < \langle Az, z \rangle = a\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{a} \cdot 1\right) + c =$

$$= \frac{b^2}{a} - 2\frac{b^2}{a} + c = \frac{1}{a} \cdot (-b^2 + ac) = \frac{\det A}{a}$$

$$\Rightarrow \det A > 0$$

$\Leftarrow$ $\langle Az, z \rangle = a\left(z_1 + \frac{b}{a} z_2\right)^2 + \underbrace{\left(c - \frac{b^2}{a}\right)}_{\frac{ac - b^2}{a} > 0} \cdot z_2^2 \geq 0$;

$$\langle Az, z \rangle = 0 \Rightarrow z_2 = 0 \text{ und } 0 = z_1 + \frac{b}{a} z_2 = z_1 \Rightarrow z = 0.$$

(iii): wie (ii) für $-A$; beachte $\det(-A) = (-1)^2 \cdot \det A = \det A$

= 8.11.2011 =

(i): $\underbrace{\det(A - \lambda I_2)}_{p(\lambda)} = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 =$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{s := \mathrm{Spur}(A)} \lambda + \underbrace{ac - b^2}_{\det A}$$

$p(\lambda)$ hat Nullstellen $\lambda_\pm = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \det A}$; setze $\Delta := \left(\frac{s}{2}\right)^2 - \det A$,