dann gilt: $\det A < 0 \iff \Delta > \left(\frac{s}{2}\right)^2 \iff \lambda_- < 0 < \lambda_+$

Eigenwerte

$\iff A$ indefinit

<u>alternativer Beweis für (i), ohne Eigenwerttheorie:</u>

erinnere: $\langle Az, z\rangle = a z_1^2 + 2b z_1 z_2 + c z_2^2$

<u>1. Fall $a=0$</u>: Unterfall $b=0$: $\det A = 0$, $\langle Az,z\rangle = c z_2^2$ nicht indefinit

Unterfall $b \neq 0$: $\det A = -b^2 < 0$ und $\forall t \in \mathbb{R}$ gilt

$\langle A\binom{t}{1}, \binom{t}{1}\rangle = 2bt + c$ .... nimmt pos. und neg. Werte an, wenn t in $\mathbb{R}$ läuft, also A indefinit

<u>2. Fall $a \neq 0$</u>: $a \cdot \langle Az, z\rangle = \ldots = (a z_1 + b z_2)^2 + \det A \cdot z_2^2 \quad (*)$

- A indef. $\Rightarrow a \cdot \langle Az,z\rangle$ nimmt pos. und neg. Werte an, wenn z in $\mathbb{R}^2$ variiert $\overset{(*)}{\Longrightarrow} \det A < 0$
- $\det A < 0$: setze $z = \binom{t}{1} \Rightarrow a\langle Az, z\rangle = (at+b)^2 + \det A$ nimmt pos. u. neg. Werte an $\Rightarrow A$ indefinit $\square$

<aus meinen alten Analysis-Skripten>

12.5. Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

<u>SATZ:</u> Sei $f : \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in U$ mit $\operatorname{grad} f(x) = 0$ (man sagt: x ist eine <u>*kritische Stelle*</u>). Dann gilt:

1.) $H_f(x)$ positiv definit $\Longrightarrow$ x ist striktes lokales Minimum

2.) $H_f(x)$ negativ definit $\Longrightarrow$ x ist striktes lokales Maximum

3.) $H_f(x)$ indefinit $\Longrightarrow$ x ist kein lokales Extremum
(im Fall $n = 2$ spricht man hier von einem <u>Sattelpunkt</u>)

75

Bemerkung: Die Bedingungen im Satz sind zwar hinreichend, aber nicht notwendig (vgl. nochmals mit dem Fall $n = 1$). Ist $H_f(x)$ semidefinit, so kann keine allgemeine Aussage getroffen werden: z. B. im $\mathbb{R}^2$ haben die folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_1(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^4, \quad f_2(x_1, x_2) := x_1^2, \quad f_3(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^3$$

jeweils eine kritische Stelle in $(0,0)$ (mit Funktionswert $f(0,0) = 0$); die Hesse-Matrix

$H_{f_k}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in allen Fällen positiv semidefinit (für $k = 1,2,3$), aber

- f_1 hat ein striktes Minimum in $(0,0)$ $[f(x_1, x_2) > 0$ für $(x_1, x_2) \neq (0,0)]$
- f_2 hat ein lokales Minimum in $(0,0)$, das aber nicht strikt ist $[f_2(0, x_2) = 0 \ \forall x_2]$
- f_3 hat kein Extremum in $(0,0)$ $[t \mapsto f_3(0,t) = t^3$ nimmt in jeder Umgebung von $(0,0)$ sowohl positive als auch negative Werte an$]$.

Beweis des Satzes: Wir setzen $A := H_f(x)$. Nach 12.3 (bzw. 10.11 (ii)) gilt für $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < r$, wenn r klein genug ist ($\Leftrightarrow x + \xi$ nahe x):

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2}\langle A\xi \mid \xi \rangle + h(\xi),$$

wobei $h(\xi) = o(\|\xi\|^2)$, d.h. $\left[\frac{h(\xi)}{\|\xi\|^2} \to 0 \ (\|\xi\| \to 0) \right]$

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \|\xi\| < \delta \implies |h(\xi)| \le \varepsilon \, \|\xi\|^2.$$

ad 1.) A ist positiv definit, daher ist $g(\xi) := \langle A\xi \mid \xi \rangle > 0 \quad \forall \xi \neq 0$;

die Abbildung $\xi \mapsto g(\xi)$ ist stetig $S^{n-1} \to \mathbb{R}$ und S^{n-1} kompakt, somit gilt $\alpha := \min\{g(\xi) : \xi \in S^{n-1}\} > 0$. $\left[\exists \xi_0 : \ \alpha = g(\xi_0) > 0 \right]$

Sei $\xi \neq 0$, dann ist

$$\langle A\xi \mid \xi \rangle = \left\langle \frac{A\xi}{\|\xi\|} \mid \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\rangle \|\xi\|^2 \ge \alpha \, \|\xi\|^2$$

und für $\xi = 0$ gilt die resultierende Ungleichung ebenso.

Wähle $\varepsilon := \frac{\alpha}{4}$ in $(*)$ und $\delta > 0$ passend, dann gilt

$$f(x + \xi) \ge f(x) + \frac{\alpha}{2}\|\xi\|^2 - \frac{\alpha}{4}\|\xi\|^2 = f(x) + \frac{\alpha}{4}\|\xi\|^2 > f(x)$$

für $\|\xi\| < \delta$, $\xi \neq 0$; daher hat f ein striktes lokales Minimum in x.

ad 2.) Betrachte $-f$ und wende 1.) an.

ad 3.) A ist indefinit; wähle $\xi_0, \eta_0 \in S^{n-1}$ mit

$$\gamma_1 := \langle A\xi_0 \mid \xi_0 \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \gamma_2 := \langle A\eta_0 \mid \eta_0 \rangle < 0$$

(OBdA können die zwei Vektoren in der Indefinitheitsdefinition mit Länge 1 angenommen werden).

Sei $r > 0$, dann gilt für $t \in]-r, r[$ stets $t \cdot \xi_0,\ t \cdot \eta_0 \in B_r(0)$; es ist

$$f(x + t\xi_0) = f(x) + \frac{t^2}{2}\gamma_1 + h(t\xi_0)$$
$$f(x + t\eta_0) = f(x) + \frac{t^2}{2}\gamma_2 + h(t\eta_0).$$

Aus der Bedingung $(*)$ erhalten wir:

$\exists \delta \in]0, r[\colon\ |t| < \delta \ \Rightarrow\ |h(t\xi_0)| \leq \gamma_1 t^2/4 \ \text{ und } \ |h(t\eta_0)| \leq |\gamma_2|\, t^2/4;$

somit gilt für $0 < |t| < \delta$:

$$f(x + t\xi_0) \geq f(x) + \frac{t^2\gamma_1}{2} - \frac{t^2\gamma_1}{4} = f(x) + \frac{t^2\gamma_1}{4} > f(x)$$
$$[\gamma_2 < 0] \qquad > f(x) + \frac{t^2\gamma_2}{4} = f(x) + \frac{t^2\gamma_2}{2} + \frac{t^2|\gamma_2|}{4} \geq f(x + t\eta_0),$$

d. h. für alle Umgebungen V von x gilt: $\exists \xi, \eta \in V$ mit $f(\xi) > f(x) > f(\eta)$ (z.B. mit t klein genug: $\xi = x + t\xi_0$, $\eta = x + t\eta_0$).

Also kann in x kein lokales Extremum vorliegen. □

12.6. Beispiel

Wir untersuchen die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x^2 - y^2)\, e^{-x^2-y^2}$ auf lokale Extrema:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot \begin{pmatrix} 2x\,(1 - x^2 + y^2) \\ -2y\,(1 + x^2 - y^2) \end{pmatrix} =: e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

$$H_f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cdot \begin{pmatrix} 2(1 - x^2 + y^2) - 4x^2 - 2xa_1 & -4xy - 2xa_2 \\ -4xy - 2xa_2 & -2(1 + x^2 - y^2) + 4y^2 - 2ya_2 \end{pmatrix}$$

Um die kritischen Stellen zu finden, lösen wir das Gleichungssystem

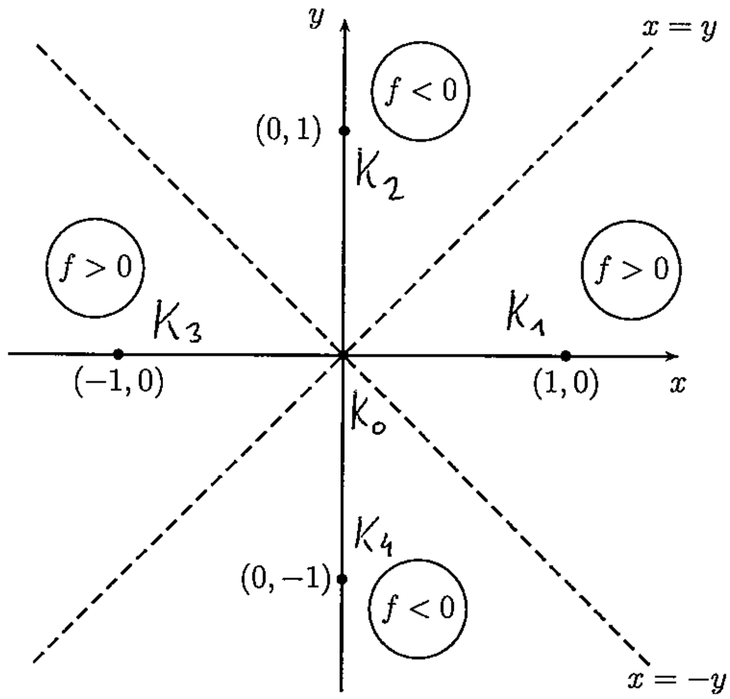
$$2x\,(1 - x^2 + y^2) = 0$$
$$-2y\,(1 + x^2 - y^2) = 0.$$

- $x = 0:\quad -2y(1 - y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \vee y = -1 \vee y = 1$

• $x \neq 0: \; 1 = x^2 - y^2 \;\wedge\; -2y(1 + \overbrace{x^2 - y^2}^{1}) = 0 \quad\Rightarrow\quad 1 = x^2 - y^2 \;\wedge -2y(1+1) = 0$

$\Rightarrow \quad y = 0, x = -1 \;\vee\; x = 1$

Also haben wir die kritischen Stellen $K_0 = (0,0)$, $K_1 = (1,0)$, $K_2 = (0,1)$, $K_3 = (-1,0)$ und $K_4 = (0,-1)$. Außerdem lesen wir aus der Definition von f direkt ab, welches Vorzeichen f in verschiedenen Bereichen des $\mathbb{R}^2$ hat: es ist $f > 0 \Leftrightarrow x^2 > y^2$. Somit kommen wir zunächst zur folgenden schematischen Übersicht:



Weiters genügt es wegen der Symmetrien $f(-x,y) = f(x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y)$, die Punkte K_0, K_1 und K_2 zu untersuchen.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit $\quad\Rightarrow\quad$ Sattelpunkt in K_0

$H_f(1,0) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ist negativ definit $\quad\Rightarrow\quad$ striktes lokales Maximum in K_1

$H_f(0,1) = \frac{1}{e}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ positiv definit $\quad\Rightarrow\quad$ striktes lokales Minimum in K_2

Die entsprechenden Funktionswerte sind $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 1/e$ und $f(0,1) = -1/e$.

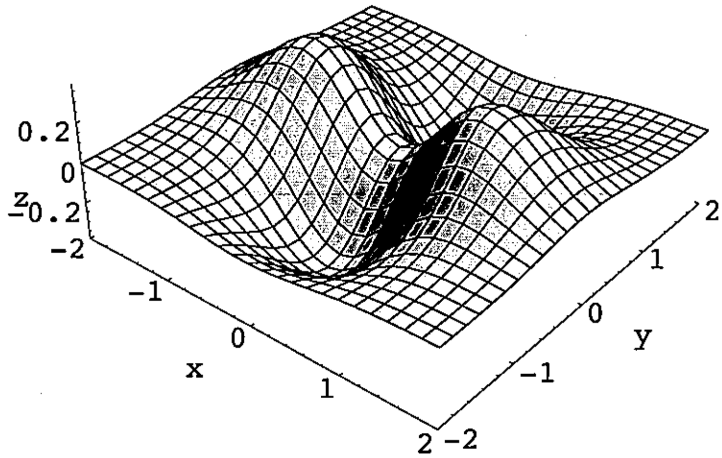
Wegen $\lim\limits_{\|z\|\to\infty} f(z) = 0$ folgt somit, dass

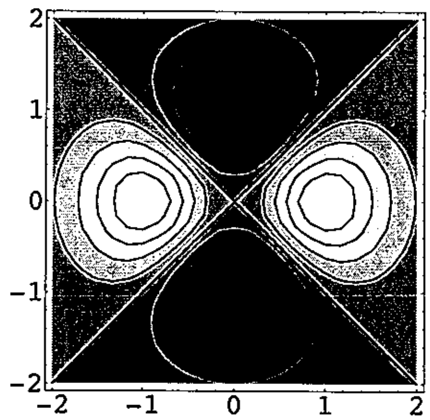
in $(1,0)$ ein globales Maximum vorliegt, weil $\frac{1}{e} > 0$;

in $(0,1)$ ein globales Minimum vorliegt, weil $-\frac{1}{e} < 0$.

In den folgenden Darstellungen des Graphen und einiger Niveaulinien der Funktion f mit

Hilfe von MATHEMATICA werden die Ergebnisse auch recht gut sichtbar: im rechten Bild bedeuten dunklere Zonen niedrigere Funktionswerte; beachte die Nullniveaulinien, die in diesem Fall genau die Diagonalen $x = y$ und $x = -y$ sind.





Der Funktionsgraph wurde mit der Eingabe

```
Plot3D[(x^2 - y^2) Exp[-x^2 - y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  AxesLabel -> {x, y, z}, Boxed -> False,
  ViewPoint ->  {1.803, -2.246, 1.775}]
```

erzeugt, das Bild der Höhenlinien mit

```
ContourPlot[(x^2 - y^2) Exp[-x^2 - y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
  Contours -> 9, ImageSize -> 180]
```

12.7 . Extrema unter Nebenbedingungen

Definition: Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $M \subseteq U$ sowie $a \in M$.

Wir sagen, $f|_M$ besitze ein *lokales Maximum (bzw. Minimum)* in a, wenn gilt:

[$f|_M$ ... f eingeschränkt auf M]

$\exists V \underset{\text{offen}}{\subseteq} U$ mit $a \in V$: $\;f(x) \le f(a)\;$ (bzw. $f(x) \ge f(a)$) $\;\forall x \in M \cap V$.

SATZ: Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \underset{\text{offen}}{\supseteq} U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiters seien $r \le n$ und $g_1, \ldots, g_r\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft, dass der Rang der Jacobi-Matrix $D(g_1, \ldots, g_r)(x)$ gleich r (also maximal) ist für alle $x \in M$, wobei

$$M := \{x \in U\colon \underbrace{g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0}_{r \text{ Nebenbedingungen}}\}.$$

Falls $f\big|_M$ in $a \in M$ ein lokales Maximum oder Minimum besitzt, dann existieren r reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, die so genannten Lagrange-Multiplikatoren, sodass die folgende Gleichung gilt

$$\operatorname{grad} f(a) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \cdot \operatorname{grad} g_j(a).$$

=14.11.=

Anstatt eines *Beweises* machen wir hier nur für den Fall einer Nebenbedingungsgleichung von der Form $g(x,y) := y - h(x) = 0$ im $\mathbb{R}^2$ eine Plausibilitätsüberlegung ~~und geben später in 23.9 einen rein geometrischen Beweis für den allgemeinen Fall~~. Eine Version des Beweises, die ~~ohne den Begriff der Untermannigfaltigkeit auskommt und~~ direkt auf den Satz über implizite Funktionen ~~(vgl. bei uns 20.2)~~ zugreift findet sich z.B. in [Heu04, Abschnitt 174].

Plausibilitätsüberlegung: Seien also $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sowie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g(x,y) := y - h(x)$. Die Lösungsmenge der Nebenbedingung

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = h(x)\} = \{(x,h(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

ist dann einfach der Graph von h im $\mathbb{R}^2$. Laut Annahme hat ~~f~~ $f\big|_M$ ein lokales Extremum im Punkt $a \in M$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $(x_0, h(x_0)) = a$. Dann muss die differenzierbare Funktion $x \mapsto f(x, h(x))$ ein lokales Extremum in x_0 besitzen, also verschwindende Ableitung in diesem Punkt haben. Somit folgt nach der Kettenregel

$$0 = \frac{d}{dx}\Big(f(x,h(x))\Big)\Big|_{x=x_0} = D_1 f(a) + D_2 f(a) \cdot h'(x_0).$$

Dies lehrt uns aber, dass der Vektor $\operatorname{grad} f(a) \in \mathbb{R}^2$ normal auf $(1, h'(x_0)) \neq 0$ steht, daher also parallel zur Richtung $(-h'(x_0), 1) = \operatorname{grad} g(a)$ sein muss. Mit anderen Worten: es gibt eine reelle Zahl λ so, dass

$$\operatorname{grad} f(a) = \lambda \operatorname{grad} g(a).$$

Methode: Die größte Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren liegt in ihrer Anwendung beim Aufsuchen von Kandidaten für lokale Extrema einer $\mathcal{C}^1$-Funktion f unter den Nebenbedingungen $g_1 = \dots = g_r = 0$. Dazu gehen wir wie folgt vor:

wir bilden eine neue Funktion von $n + r$ Variablen durch

$$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_r) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_r g_r(x)$$

[Abl. bzgl. x_i und λ_ℓ]

und bestimmen Lösungen $(x, \lambda) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \in U \times \mathbb{R}^r$ des Gleichungssystems $\operatorname{grad}_{(x,\lambda)} F(x, \lambda) = 0$, d.h. in Zeilen gemäß x- und λ-Ableitungen aufgeteilt

[n Gleichungen] $\operatorname{grad} f(x) - \lambda_1 \operatorname{grad} g_1(x) - \dots - \lambda_r \operatorname{grad} g_r(x) = 0$ [Abl. nach $(x_1, \dots, x_n)$]

$$\text{[r Gleichungen]}\left\{\begin{aligned} g_1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ g_r(x) &= 0 \end{aligned}\right.$$

[Abl. nach λ_ℓ, $1 \le \ell \le r$]

Mit ein wenig Naivität betrachtet sieht das vielversprechend aus, weil wir hier $n+r$ Gleichungen für $n+r$ „Unbekannte" vorfinden. In der Praxis wird man natürlich nur so viele λ_j bestimmen wie nötig sind, um alle x_k zu erhalten. Allerdings kann obiges Gleichungssystem sehr unzugänglich für eine explizite Lösungsfindung sein, weil es ja z.B. bzgl. $x_1, \ldots, x_n$ typischer Weise nichtlinear ist.

Beispiel: Für $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ stellen wir uns die folgende Aufgabe:

Bestimme die Maxima und Minima von f auf dem Schnitt der Ebene $x+y+z=0$ mit der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2=1$.

Die **zwei** Nebenbedingungen erhalten wir, indem wir die Ebene sowie die Sphäre als Nullstellenmenge der stetig differenzierbaren Funktionen

$g_1(x,y,z) := x+y+z$ bzw. $g_2(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1$

darstellen.

Nun bilden wir für die Funktion $F(x,y,z,\lambda,\mu) := f(x,y,z) - \lambda\, g_1(x,y,z) - \mu\, g_2(x,y,z)$ zeilenweise die Ableitungen nach x, y, z, λ, μ:

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array} & \begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
(4) & \qquad\qquad x+y+z = 0\\
(5) & \qquad\qquad x^2+y^2+z^2-1 = 0
\end{array}
$$

$(1)+(2)+(3) \quad\Rightarrow\quad 3 - 3\lambda - 2\mu\underbrace{(x+y+z)}_{0\ [(4)]} = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\lambda = 1}$, daher ergibt sich weiter

(1): $4 - 2\mu x = 0 \quad\Rightarrow\quad \mu \neq 0$

(2): $-2\mu y = 0 \quad\Rightarrow\quad \underline{y = 0}$

(4): $x + z = 0 \quad\Rightarrow\quad z = -x$

(5): $x^2 + (-x)^2 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2 = 1$, d.h. $\underline{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Wir haben also folgende Kandidaten für Extrema: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Wir bemerken, dass die Menge $M = \{(x,y,z)\colon g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}$ kompakt ist (weil abgeschlossen und $\subseteq$ Kugel), daher existiert sowohl ein Maximum als auch ein Minimum von $f|_M$. Nachdem wir nur zwei Kandidaten haben, genügt ein einfacher Vergleich der Werte an diesen Stellen:

wegen $f(P) = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ und $f(Q) = -4\sqrt{2}$ muss also das Maximum in P und das Minimum in Q angenommen werden.

<u>Bem:</u> direkte Anwendung von Kriterien in 12.5. ist für Extrema unter Nebenbedingungen nicht möglich!
(Dazu muss vorher die Hesse-Matrix auf die Tangential=

§13 Wege und Kurven

13.1. Definition:

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

1) Eine stetige Abbildung $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt *Weg.* Ist $I = [a, b]$, dann ist γ ein *Weg von* $p := \gamma(a)$ *nach* $q := \gamma(b)$.

2) Es sei $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Weg, dann heißt $\dot{\gamma}(t) := D\gamma(t)$ *Tangentialvektor* an γ im Punkt $\gamma(t)$. Falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ ist, so heißt $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ *Tangenteneinheitsvektor.*

3) Ein Weg $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn γ stetig differenzierbar ist und $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ gilt für alle $t \in I$.

4) Ein Weg $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise regulär,* wenn γ stetig ist und es eine Zerlegung $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ von I gibt, sodass die Einschränkungen $\gamma\big|_{[t_j, t_{j+1}]}$ (für $j = 0, \ldots, N-1$) jeweils regulär sind.

Kinematische Interpretation: In einer gängigen physikalischen Interpretation von Wegen betrachten wir I als Zeitintervall, $\gamma(t)$ als Ort eines Teilchens (oder eines Körperschwerpunktes) zur Zeit t, $\dot{\gamma}(t)$ als (momentanen) Geschwindigkeitsvektor (engl. *velocity*) und $\|\dot{\gamma}(t)\|$ als (Betrag der momentanen) Geschwindigkeit (engl. *speed*) zur Zeit t.

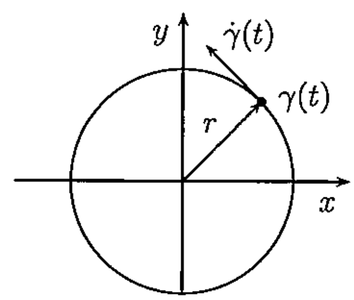
13.2. Beispiele:

1.) Seien $a, v \in \mathbb{R}^n$, dann beschreibt $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(t) = a + t \cdot v$ die Gerade durch a in Richtung v. Es ist $\dot\gamma(t) = v$ und somit gilt: γ ist regulär $\iff$ $v \neq 0$.

2.) Es sei $r > 0$; $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (r\cdot\cos t, r\cdot\sin t)$ beschreibt einen Kreis vom Radius r um den Ursprung. Es gilt

$$\dot\gamma(t) = (-r\sin t, r\cos t) \quad \perp \quad \gamma(t).$$

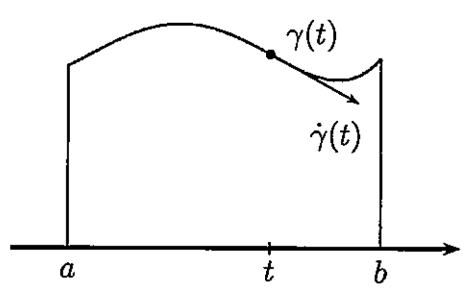
Insbesondere ist γ regulär, weil $\|\dot\gamma(t)\| = r > 0$ ist.



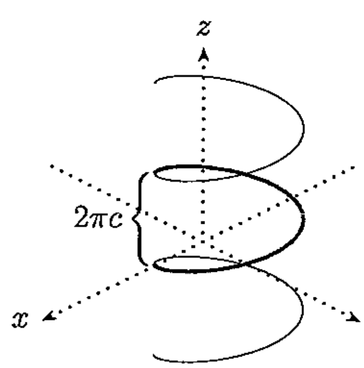
3.) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$.

Dann ist $\gamma(I)$ gerade der Graph von f.

Wegen $\dot\gamma(t) = (1, f'(t)) \neq (0,0)$ ist γ stets regulär.



4.) Es seien $r > 0$ und $c > 0$; der reguläre Weg $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ct)$, $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ beschreibt eine Schraubenlinie mit Ganghöhe $2\pi c$.

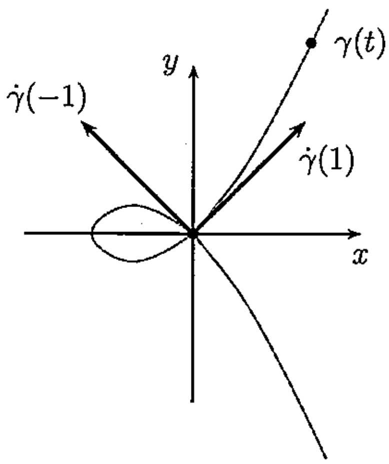


5.) Für $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ ist

$$\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2 - 1)$$

und daher γ regulär.

γ ist nicht injektiv: es gibt einen so genannten *Doppelpunkt* in $(0,0) = \gamma(-1) = \gamma(1)$, wobei $\dot{\gamma}(-1) = (-2, 2)$ und $\dot{\gamma}(1) = (2, 2)$.



6.) Die Neilsche Parabel $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, wobei $\gamma(t) = (t^2, t^3)$; es ist

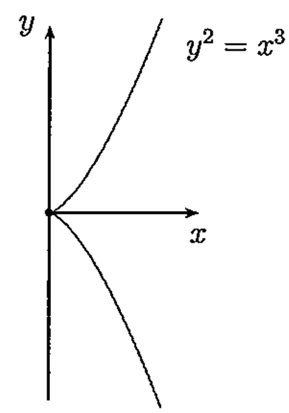
$$\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2),$$

daher $\dot{\gamma}(0) = (0,0)$ und γ nicht regulär.

Dieselbe Bildmenge $C := \gamma(\mathbb{R})$ wird durch den stückweise regulären Weg

$$\alpha(t) = \begin{cases} (-t, -|t|^{3/2}) & t < 0, \\ (t, t^{3/2}) & t \geq 0 \end{cases}$$

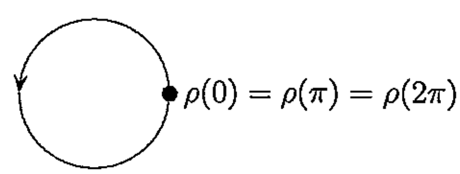
erzeugt.



7.) $\sigma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(\tau) := (r\cos(2\tau), r\sin(2\tau))$ beschreibt wie Beispiel 2.) ebenfalls einen Kreis vom Radius r um den Ursprung, d.h. es gilt $\sigma([0,\pi]) = \gamma([0, 2\pi])$.

Die Durchlaufgeschwindigkeit ist aber wegen $\dot{\sigma}(\tau) = 2 \cdot \dot{\gamma}(2\tau)$ verdoppelt.

8.) Der Weg $\rho\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\rho(\tau) := (r\cos(2\tau), r\sin(2\tau))$ beschreibt denselben Kreis wie in den Beispielen 2.) und 7.). Allerdings wird nun die Bildmenge zweimal durchlaufen.



= 15.11.2011 =