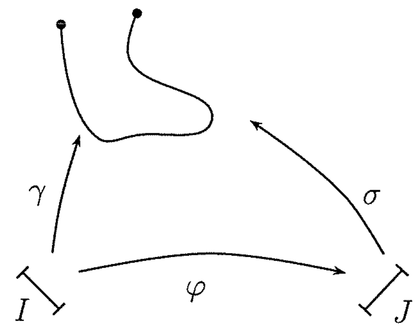
13.3. Definition :

Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle.

1.) Eine *zulässige Parametertransformation* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon I \to J$ mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in I$.

2.) Zwei Wege $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma\colon J \to \mathbb{R}^n$ heißen *äquivalent,* wenn es eine zulässige Parametertransformation $\varphi\colon I \to J$ gibt mit $\sigma \circ \varphi = \gamma$; wir schreiben dafür auch kurz $\gamma \sim \sigma$.

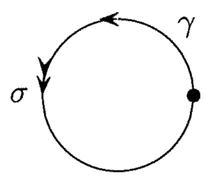
Es ist leicht zu zeigen (nämlich durch entsprechende Verknüpfungen bzw. Inverse von Parametertransformationen), dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege im $\mathbb{R}^n$ definiert wird.



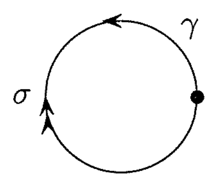
3.) Eine *orientierte stückweise reguläre Kurve C* ist eine Äquivalenzklasse von stückweise regulären Wegen. Jeder Repräsentant γ von C heißt eine *Parametrisierung* von C; es entspricht dann also C der Klasse aller Wege σ mit $\sigma \sim \gamma$.

13.4. Bemerkung :

1.) Die Bedingung $\varphi'(t) > 0$ bedeutet geometrisch, dass γ und σ im selben Sinn durchlaufen werden.



Im Fall $\varphi'(t) < 0$ dreht sich die Orientierung gerade um, wobei die Bildmengen nach wie vor gleich sind.



2.) Wegen $\varphi'(t) > 0$ (für $t \in I$) ist eine zulässige Parametertransformation also streng monoton wachsend und stetig differenzierbar invertierbar (also ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $I \to \varphi(I)$). Es gilt $(\varphi^{-1})' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} > 0$, daher ist auch φ^{-1} eine zulässige Parametertransformation $\varphi(I) \to I$.

3.) Für die Änderung der Tangentialvektoren differenzierbarer Wege γ, σ unter einer Parametertransformation gilt

$$\dot\gamma(t) = (\sigma \circ \varphi)\dot{}(t) = \varphi'(t) \cdot \dot\sigma(\varphi(t)).$$

13.5. Definition :

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise regulärer oder stetig differenzierbarer (nicht notwendig regulärer) Weg. Dann heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

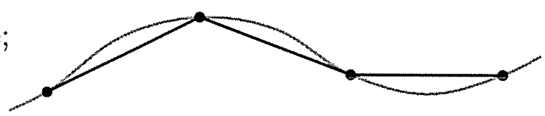
die <u>Weglänge</u> von γ.

13.6. Bemerkung :

1.) $t \mapsto \|\dot\gamma(t)\|$ ist stetig bis auf höchstens endlich viele Sprungstellen, also Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

2.) In der kinematischen Interpretation ist $\|\dot\gamma(t)\|$ der Betrag der Momentangeschwindigkeit und somit entspricht $\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt$ dem zurückgelegten Weg.

3.) Man kann zeigen: $L(\gamma)$ ist der Limes der Gesamtlängen eingeschriebener Polygonzüge; dies ergibt Riemann-Summen für das Integral in 13.5. und führt auf den Begriff des *rektifizierbaren* Weges (vgl. Heuser 2)



4.) Es sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ das Geradenstück $\gamma(t) = \overset{x}{a} + t\cdot(\overset{y-x}{\cancel{b-a}})$ zwischen a und b im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $L(\gamma) = \int_0^1 \|b-a\|\, dt = \|b-a\|$; d.h. für gerade Strecken ist die Weglänge genau die euklidische Länge.

13.7. Proposition :

1.) Sei $I := I_1 \cup I_2$, wobei $I_1 = [a,b]$ und $I_2 = [b,c]$ mit $a < b < c$. Weiters seien $\gamma_1\colon I_1 \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2\colon I_2 \to \mathbb{R}^n$ stückweise reguläre Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Wir definieren den stückweise regulären Summenweg $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2\colon I \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & a \le t \le b \\ \gamma_2(t) & b \le t \le c. \end{cases}$$

Dann gilt $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$. (Additivität der Weglänge)

2.) Invarianz der Weglänge unter zulässiger Parametertransformation: Sind die stückweise regulären Wege $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ äquivalent ($\gamma \sim \sigma$), dann gilt $L(\gamma) = L(\sigma)$.

Daher ist die Weglänge von (orientierten) stückweise regulären Kurven wohldefiniert. Diese heißt <u>Bogenlänge</u>, falls die Kurve durch einen Weg mit höchstens einem Doppelpunkt dargestellt werden kann. (vgl. Jordanbögen in Heuser 2)

Beweis: 1.) folgt aus $\int_a^c \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_a^b \|\dot\gamma_1(t)\|\,dt + \int_b^c \|\dot\gamma_2(t)\|\,dt$.

2.) Sei $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ eine zulässige Parametertransformation und $\sigma \circ \varphi = \gamma$. Wegen $\dot\gamma = (\dot\sigma \circ \varphi)\cdot \varphi'$ folgt durch Substitution ($\tau = \varphi(t)$)

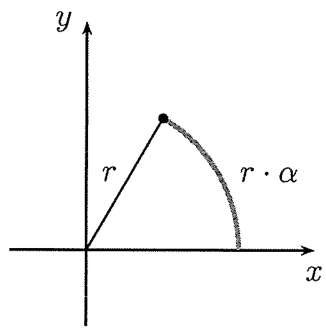
$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_a^b \|\dot\sigma(\varphi(t))\| \cdot \underbrace{\varphi'(t)}_{>0}\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \|\dot\sigma(\tau)\|d\tau = L(\sigma).$$

□

13.8. Beispiele:

1.) Für $\alpha > 0$ und $r > 0$ sei $\gamma\colon [0,\alpha] \to \mathbb{R}^2$ der Kreisbogen $\gamma(t) = (r\cdot\cos t, r\cdot\sin t)$. Wegen $\dot\gamma(t) = (-r\cdot\sin t, r\cdot\cos t)$ ist $\|\dot\gamma(t)\| = r$ und daher

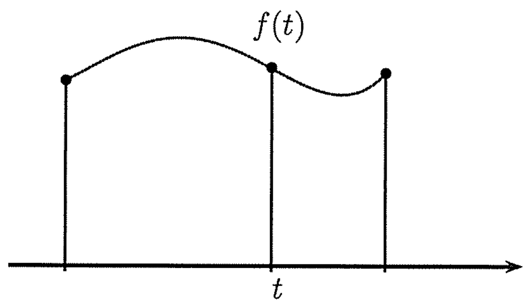
$$L(\gamma) = \int_0^\alpha \|\dot\gamma(t)\|\,dt = r\int_0^\alpha dt = r\cdot\alpha.$$



Insbesondere ergibt sich für den Einheitskreisumfang 2π (setze $r = 1$ und $\alpha = 2\pi$).
Der Parameter $t \in [0,\alpha]$ beschreibt hier also den Winkel genau im sogenannten Bogenmaß.

2.) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sodass $\gamma(t) := (t, f(t))$ den Graphen von f beschreibt. Dann gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|(1, f'(t))\|\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt.$$



13.9. Parametrisierung nach der Bogenlänge:

Wir geben nun für eine orientierte reguläre Kurve γ eine ausgezeichnete Parametrisierung $\tilde\gamma$ an, in der stets $\|\dot{\tilde\gamma}(s)\| = 1$ gilt, also der Tangentialvektor normiert ist.

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein regulärer Weg. Wir suchen ein kompaktes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare, bijektive Funktion $\varphi\colon J \to [a,b]$ mit $\varphi'(s) > 0$ für alle $s \in J$, sodass für $\tilde\gamma := \gamma\circ\varphi$ gilt $\|\dot{\tilde\gamma}(s)\| = 1$ für alle $s \in J$.

Wegen $\dot{\widetilde{\gamma}} = (\dot{\gamma} \circ \varphi) \cdot \varphi'$ muss daher $1 = \|\dot{\gamma}(\varphi(s))\| \cdot \varphi'(s)$ gelten. Daraus folgt mit $t := \varphi(s)$ nun

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(s)} = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

und schließlich nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\varphi^{-1}(t) = \varphi^{-1}(a) + \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\, d\tau \qquad (a \leq t \leq b).$$

Wir dürfen uns $\varphi^{-1}(a) = 0$ wünschen und erhalten somit $\varphi^{-1}(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\, dt$. Das heißt die gesuchte Parametrisierung $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ verwendet dann den neuen Parameter

$$s = \varphi^{-1}(t) = L\left(\gamma\big|_{[a,t]}\right) \in [0, L(\gamma)],$$

den so genannten *Bogenlängenparameter*. Der Weg $\widetilde{\gamma}\colon [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ heißt *Parametrisierung von γ nach der Bogenlänge.* (eig. Weglänge)

Die Berechnung des Bogenlängenparameters gemäß $s = L\left(\gamma\big|_{[a,t]}\right)$ ist natürlich auch für stetig differenzierbare (nicht notwendig reguläre) Wege möglich. Es wird i.A. aber dadurch keine zulässige Parametrisierung erzeugt. (Warum?)

Bemerkung: Ist C eine reguläre Kurve und γ ein regulärer Weg, der C repräsentiert, so gilt für seine Parametrisierung $\widetilde{\gamma}$ nach der Bogenlänge

$$\|\dot{\widetilde{\gamma}}(s)\|^2 = \langle \dot{\widetilde{\gamma}}(s) \mid \dot{\widetilde{\gamma}}(s)\rangle = 1 \quad \forall s \in [0, L(\gamma)].$$

Durch Differenzieren nach s erhalten wir daraus $2\langle D\dot{\widetilde{\gamma}}(s) \mid \dot{\widetilde{\gamma}}(s)\rangle = 0$, d.h. es gilt mit $\ddot{\widetilde{\gamma}}(s) := D\dot{\widetilde{\gamma}}(s)$ als *Beschleunigungsvektor* stets

$$\ddot{\widetilde{\gamma}}(s) \perp \dot{\widetilde{\gamma}}(s).$$

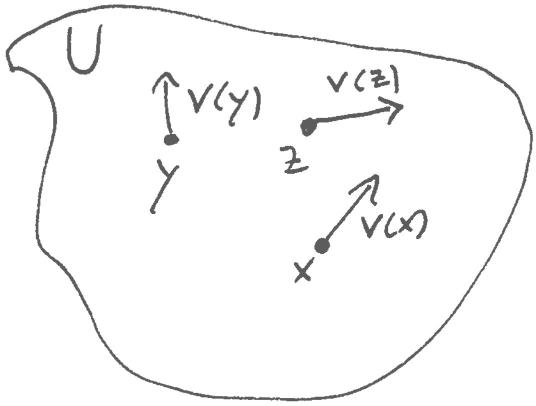
[Warnung: diese Relation gilt i.A. nur für die Parametrisierung nach der Bogenlänge!]

Die Größe $\kappa(s) := \|\ddot{\widetilde{\gamma}}(s)\|$ heißt *Krümmung* der Kurve C im Punkt $\widetilde{\gamma}(s)$.

§14 KURVENINTEGRALE

14.1. DEF: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $v: U \to \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld** auf U. [kurz VF im weiteren Text]

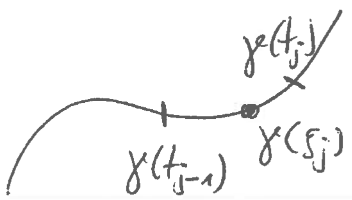
Veranschaulichung oft durch „Anheften von $v(x)$ bei x":



Physik: Kraftfelder

z.B. elektrostatisches Feld E auf $\mathbb{R}^3$

Sei $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Kraftfeld, $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ diffbarer Weg eines Teilchens, $I = [a,b]$



$\langle v(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle \approx$ geleistete Arbeit bei Bewegung durch das Kurvenstück von $\gamma(t_{j-1})$ bis $\gamma(t_j)$

$\rightsquigarrow$ Gesamtarbeit bei Bewegung im Kraftfeld v entlang des Weges γ $\approx \sum_{j=1}^{N} \langle v(\gamma(\xi_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$,

$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ Zerlegung von $I = [a,b]$

Idee: Feinheit der Zerlegung $\to 0$, $\dfrac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \to \dot{\gamma}(t)$

$\rightsquigarrow$ Gesamtarbeit $= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt$

= 21.11.2011 =

14.2. DEF: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, v stetiges VF auf U und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (stückweise) stetig diffbarer Weg mit $\gamma([a,b]) \subseteq U$. [$\gamma$ stetig und $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ stetig diffbar für eine gewisse Partition von $[a,b]$]

Dann heißt

$$\int_\gamma v := \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt \qquad \left[\begin{matrix} v = (v_1, \dots, v_n) \\ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \end{matrix} \text{ Komp. fkt} \right]$$

$$= \int_a^b \left(v_1(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) + \dots + v_n(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}_n(t) \right) dt$$

das **Wegintegral** von v längs γ.

Oft gebräuchliche Notation $\int_\gamma (v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n)$ oder

$\int_\gamma v \cdot dx$ [Skalarprodukt] statt $\int_\gamma v$.

14.3. BEISP: $U = \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (y,x)$, $\gamma : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$,

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$; $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_\gamma v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\left(\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t \right)}_{\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)} dt = \frac{1}{2} \sin(2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

14.4. Eigenschaften des Wegintegrals: $I \subseteq \mathbb{R}$ komp. Intervall

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : I \to U$ $\mathcal{C}^1$-Weg, v und w VF auf U, $c, d \in \mathbb{R}$, dann gilt: [analog für stückweise $\mathcal{C}^1$-Wege]

1) $$\boxed{\int_\gamma (c \cdot v + d \cdot w) = c \int_\gamma v + d \cdot \int_\gamma w}$$ [klar aus Def.]

2) $$\left| \int_\gamma v \right| \leq M \cdot L(\gamma), \text{ wobei } M = \max_{t \in I} \| v(\gamma(t)) \|$$

Bew: [$M < \infty$, weil v stetig und $\gamma(I)$ kompakt]

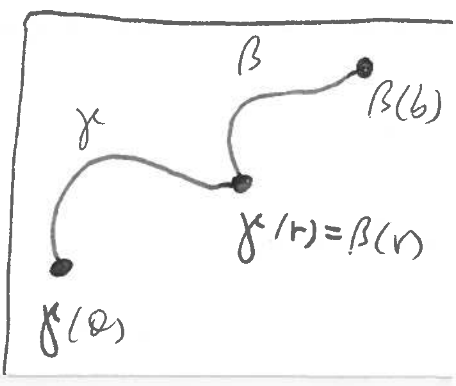
$$\left| \int_\gamma v \right| = \left| \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt \right| \leq \int_a^b \left| \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \right| dt \underset{\uparrow}{\leq}$$

[Cauchy-
Schwarz-(

$$\leq \int_a^b \| v(\gamma(t)) \| \cdot \| \dot\gamma(t) \| \, dt \leq M \cdot \int_a^b \| \dot\gamma(t) \| \, dt = M \cdot L(\gamma) \qquad \square$$

3) Seien $a < r < b$ und $\gamma : [a, r] \to U$, $\beta : [r, b] \to U$ zwei $\mathcal{C}^1$-Wege mit $\gamma(r) = \beta(r)$; erinnere: Summe der Wege $\gamma \oplus \beta : [a, b] \to U$ ist [vgl. 13.7.1]

$$(\gamma \oplus \beta)(t) := \begin{cases} \gamma(t) & a \leq t \leq r, \\ \beta(t) & r < t \leq b. \end{cases}$$



['regulär' nicht nötig, um $\oplus$ zu definieren] $\alpha\oplus\beta$ ist

ein stückweise stetig diffbarer Weg und

es gilt

$$\boxed{\int_{\gamma\oplus\beta} v = \int_\gamma v + \int_\beta v}$$

Beweis: $\displaystyle\int_{\gamma\oplus\beta} v = \int_a^b \langle v(\sigma(t)), \dot\sigma(t)\rangle\, dt =$

$[\sigma := \gamma\oplus\beta]$

$$= \int_a^r \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\, dt + \int_r^b \langle v(\beta(t)), \dot\beta(t)\rangle\, dt =$$

$$= \int_\gamma v + \int_\beta v \qquad \square$$

4) zu $\gamma : [a,b] \to U$ definiere den inversen Weg $\ominus\gamma : [a,b] \to U$ durch $\ominus\gamma(t) := \gamma(a+b-t)$

(umgekehrt durchlaufener Weg, $\ominus\gamma(a) = \gamma(b)$, $\ominus\gamma(b) = \gamma(a)$)

Es gilt
$$\int_{\ominus\gamma} v = -\int_\gamma v$$

Bew: beachte $(\ominus\gamma)^{\cdot}(t) = -(\dot\gamma(a+b-t))$ und substituiere im Integral $s = a+b-t$ .... $\square$

5) $\varphi: J \to I$ zulässige Parametertransformation

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma\circ\varphi} v = \int_{\gamma} v}$$

Daher gilt für C^1-Wege σ, γ in U:

$\sigma \sim \gamma \Rightarrow$ für jedes stetige VF auf U ist

$$\int_{\sigma} v = \int_{\gamma} v$$

und für Kurven, die durch C^1-Wege repräsentiert werden, ist somit der Begriff des <u>Kurvenintegrals</u> sinnvoll:

$$\int_C v := \int_{\gamma} v \text{, wobei } \gamma \text{ ein } C^1\text{-Repräs. von } C \text{ ist}$$

Beweis von 5): sei $J=[a_1,b_1]$, $I=[a,b]$

$$\int_{\gamma\circ\varphi} v = \int_{a_1}^{b_1} \langle v(\gamma(\varphi(s))), \underbrace{(\gamma\circ\varphi)^{\cdot}(s)}_{\dot\gamma(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)} \rangle \, ds = \int_{a_1}^{b_1} \underbrace{\langle v(\gamma(\varphi(s))), \dot\gamma(\varphi(s)) \rangle}_{f(\varphi(s)),} \varphi'(s) \, ds$$

wobei $f(t) = \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle$

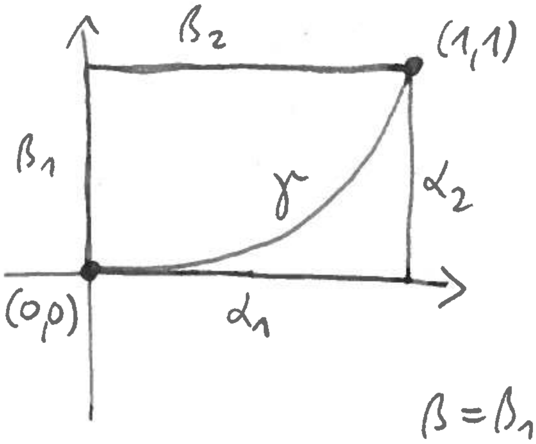
$\left[\begin{array}{l}\text{Substitution } t=\varphi(s); \\ \varphi(a_1)=a,\ \varphi(b_1)=b\end{array}\right]$

$$= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt = \int_{\gamma} v$$

$\square$

14.5. BEISP: $U=\mathbb{R}^2$, v VF auf $\mathbb{R}^2$, $v(x,y)=(y,x-y)$

α, β, γ Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$ wie folgt:



$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(t,t^2)$

$\alpha=\alpha_1\oplus\alpha_2$, wobei $\alpha_1(t)=(t,0)$ $(0\le t\le 1)$

und $\alpha_2(t)=(1,t-1)$ $(1\le t\le 2)$

$\beta=\beta_1\oplus\beta_2$, wobei $\beta_1(t)=(0,t)$ $(0\le t\le 1)$

und $\beta_2(t)=(t-1,1)$ $(1\le t\le 2)$

$$\int_\alpha v=\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle dt+\int_1^2\left\langle\begin{pmatrix}t-1\\2-t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle dt=$$

$$=\int_0^1 0\,dt+\int_1^2(2-t)\,dt=\frac{-1}{2}(2-t)^2\Big|_1^2=\frac{1}{2}$$

$$\int_\beta v=\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix}t\\-t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle dt+\int_1^2\left\langle\begin{pmatrix}1\\t-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle dt=$$

$$=\int_0^1(-t)\,dt+\int_1^2 1\,dt=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$$\int_\gamma v=\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix}t^2\\t-t^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}\right\rangle dt=\int_0^1\left(t^2+2t(t-t^2)\right)dt=$$

$$=\int_0^1(3t^2-2t^3)\,dt=\left(t^3-\frac{t^4}{2}\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

– alle drei Werte gleich! Warum?

14.6. Stammfunktionen und Gradientenfelder

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar

$\Rightarrow$ $v := \operatorname{grad}\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ ist stetiges VF.

Ein VF w mit Eig., dass es eine reellwertige diffbare Fkt. φ gibt mit $w = \operatorname{grad}\varphi$, heißt <u>Gradientenfeld</u>.

[Physik: $K = -\operatorname{grad}\varphi$, φ heißt Potenzial für das Kraftfeld K]

φ heißt <u>Stammfunktion</u> für das VF w, wenn $\operatorname{grad}\varphi = w$ gilt

- ist $\varphi : U \to \mathbb{R}$ Stammfunktion für das VF w auf U, dann ist auch $x \mapsto \varphi(x) + c$ für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für w

- ist $U = U_R(x_0)$ (offene Kugel vom Radius $R>0$ um $x_0 \in \mathbb{R}^n$) und $\varphi, \psi : U \to \mathbb{R}$ zwei Stammfkt. für das VF w auf U, dann ist $\varphi - \psi$ konstant

[$\operatorname{grad}(\varphi - \psi) = \operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}\psi = w - w = 0 \Rightarrow D_j(\varphi - \psi) = 0 \;\forall j$

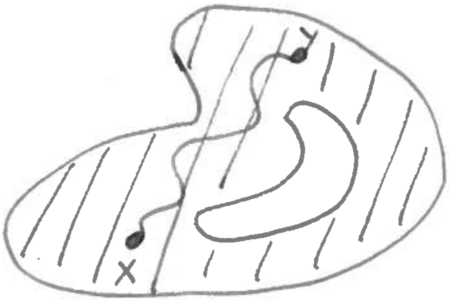
$\overset{[MWS]}{\Longrightarrow}$ $\varphi - \psi$ konstant]

dasselbe gilt für beliebige <u>Gebiete</u> $U \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h.

U ist offen und <u>wegzusammenhängend</u>, d.h.

[Heuser: bogenzusammenhängend]

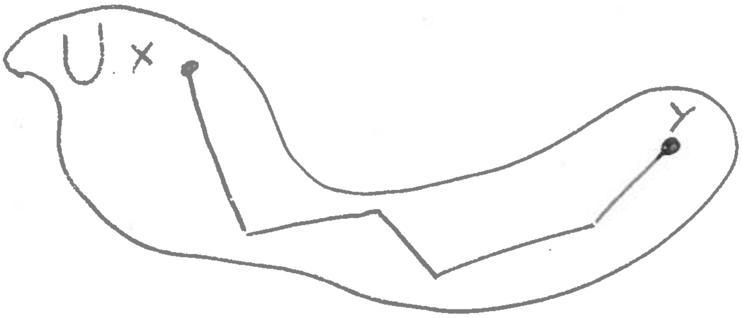
$\forall\, x,y \in U\ \exists$ stetiger Weg von x nach y innerhalb U



wegzsh.

nicht wegzsh.

Bem: (i) U Gebiet, $x,y \in U \Rightarrow \exists$ Polygonzug von x nach y [aus Geradenstücken]



insbes. existiert stückw. C^1-Weg von x nach y

[Bew. in Heuser 2, Satz 161.5]

Polygonzug sogar mit achsenparallelen Geradenstücken möglich [Bew. Heuser 2, Satz 161.6]

(ii) für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die oben definierte Eig. 'wegzusammenhängend' gleichwertig zu der allgemeineren topologischen Eigenschaft 'zusammenhängend'.

Also: wir arbeiten ab nun mit Gebieten $G \subseteq \mathbb{R}^n$,

d.h. G ist stets offen und wegzusammenhängend.

Es gilt: je zwei Stammfkt. eines VF auf G unterscheiden sich nur um Konstante. [Bem: $n=1$, Gebiet $\Leftrightarrow$ offenes Intervall]

= 22.11.2011 =