14.7 SATZ (Gradientenfelder haben wegunabhängige Kurvenintegrale)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, v ein stetiges Gradientenfeld auf G und $\varphi : G \to \mathbb{R}$ eine stetig diffbare Stammfunktion für v, also $v = \operatorname{grad} \varphi$.

Dann gilt $\forall p, q \in G$ und für jeden stückweise stetig diffbaren Weg γ von p nach q, der in G verläuft, d.h. $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(I) \subseteq G$ [oder $\gamma : I \to G$], die Gleichung

$$\int_\gamma v = \underbrace{\varphi(q) - \varphi(p)}_{\text{hier kommt } \gamma \text{ gar nicht vor!}}.$$

Insbesondere ist der Wert des Integrals vom gewählten Weg innerhalb G unabhängig.

Man sagt, das VF v habe wegunabhängige Integrale.

BEM: die obige Gleichung entspricht dem zweiten Teil des HSDI aus dem vorigen Semester: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, wenn $F' = f$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: OBdA ist γ stetig diffbar, sonst $\gamma = \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_N$ mit γ_j stetig diffbar und $\int_\gamma v = \int_{\gamma_1} v + \ldots + \int_{\gamma_N} v$ usw.

sei $\gamma : [a,b] \to G$, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$;

definiere $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $F := \varphi \circ \gamma$

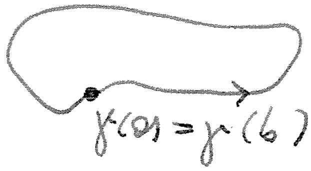
$$\Rightarrow \quad F'(t) = (\varphi(\gamma(t)))' = \langle \operatorname{grad} \varphi(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \int_\gamma v = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_a^b F'(t)\, dt \underset{[HSDI]}{=} F(b) - F(a) =$$

$$= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(q) - \varphi(p)$$

$\square$

__14.8. BEM:__ hat v wegunabhängige Integrale und ist γ ein geschlossener Weg, d.h. $\gamma : [a,b] \to G$ mit $p = \gamma(a) = \gamma(b)$



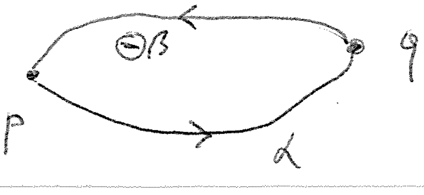
$\Rightarrow \int_\gamma v = 0$ [auch einpunktiger Weg $\alpha : [0,1] \to G$ mit $\alpha(t) = p \quad \forall t \in [0,1]$ kann genommen werden]

umgekehrt, wenn $\int_\gamma v = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ,

dann hat v wegunabhängige Integrale: $p, q \in G$ beliebig und α, β zwei Wege von p nach q

OBdA: $\alpha : [0,1] \to G$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$ und $\beta : [1,2] \to G$ mit $\beta(1) = p$, $\beta(2) = q$
[Umparametrisierung]

$\gamma := \alpha \oplus (\ominus\beta)$ geschlossener Weg



$$\Rightarrow \quad 0 = \int_\gamma v = \int_\alpha v + \int_{\ominus\beta} v = \int_\alpha v - \int_\beta v \,,$$

also wegunabhängiges Integral. D.h.:

v hat wegunabh. Integrale $\Leftrightarrow$ v hat Integral $= 0$ über geschlossene Wege

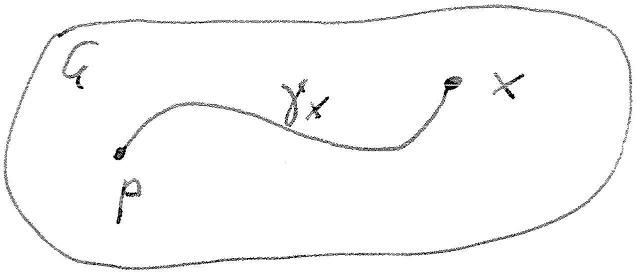
<u>14.9. SATZ</u> (VF mit wegunabhängigem Integral sind Gradientenfelder)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und v ein stetiges VF auf G mit wegunabhängigem Integral, d.h. $\forall p, q \in G$: α, γ stückw. stetig diffbare Wege in G von p nach q $\Rightarrow \int_\gamma v = \int_\alpha v$.

Dann ist v ein Gradientenfeld, d.h. $\exists\, \varphi : G \to \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\operatorname{grad} \varphi = v$.

Konkret kann eine Stammfunktion φ wie folgt definiert werden: fixiere einen beliebigen Punkt $p \in G$ und für $x \in G$ wähle einen stückw. C^1-Weg γ_x von p nach x und setze

$$\varphi(x) := \int_{\gamma_x} v$$



BEM: dies ist ein Analogon zum ersten Teil des <u>HSDI</u> aus dem vorigen Semester: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfkt. für f

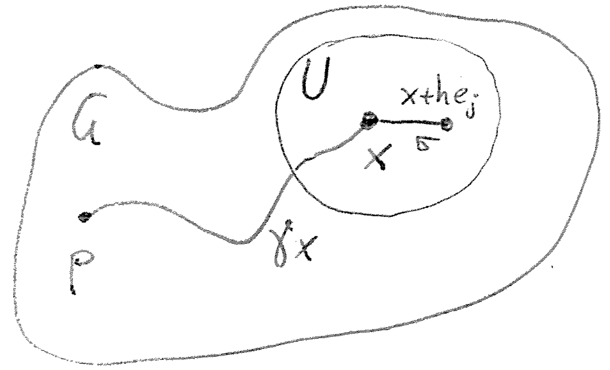
Beweis: sei $\varphi: G \to \mathbb{R}$ wie angegeben definiert

wir zeigen: $D_j \varphi = v_j \quad (j = 1, \dots, n)$

– denn fertig, weil somit φ stetig partiell diffbar, also diffbar, und $\operatorname{grad} \varphi = v$.

sei U kleine Kugelumgebung von x mit $U \subseteq G$ und $h \neq 0$, $h \in \mathbb{R}$ so klein, dass $x + he_j \in U$

$\sigma: [0,1] \to U \subseteq G$, $\sigma(t) = x + t \cdot he_j$ ist C^1 Weg von x nach $x + he_j$



wir können OBdA annehmen, dass $\gamma_x: [-1,0] \to G$ definiert ist mit $\gamma_x(-1) = p$, $\gamma_x(0) = x$

$\gamma_x \oplus \sigma$ .... stückw. C^1 Weg von p nach $x + he_j$

$$\left| \frac{\varphi(x+he_j) - \varphi(x)}{h} - v_j(x) \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{\gamma_x \oplus \sigma} v - \int_{\gamma_x} v - h \cdot v_j(x) \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \cancel{\int_{\gamma_x} v} + \int_{\sigma} v - \cancel{\int_{\gamma_x} v} - v_j(x) \cdot \int_{\sigma} e_j \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_{\sigma} (v - v_j(x) e_j) \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_0^1 \langle v(x+the_j) - v_j(x) e_j, \underbrace{he_j}_{\dot{\sigma}(t)} \rangle \, dt \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_0^1 h \cdot (v_j(x+the_j) - v_j(x)) \, dt \right| \leq \int_0^1 |v_j(x+the_j) - v_j(x)| \, dt$$

v_j sktig $\Rightarrow$ $t \mapsto v_j(x+the_j)$ glm. sktig

$$\Rightarrow \int_0^1 |v_j(x+the_j) - v_j(x)|\,dt \to 0 \quad (h \to 0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+he_j)-\varphi(x)}{h}}_{= D_j\varphi(x)} = v_j(x)$$

$\square$

Zusammenfassend: für v sktiges VF auf Gebiet G gilt

$$\boxed{v \text{ ist Gradientenfeld} \Leftrightarrow v \text{ hat wegunabhängige Integrale}}$$

($\Leftrightarrow$ v hat Integral $= 0$ über geschlossene Wege)

$\boxed{?}$ praktisch durchführbarer Test, ob v ein Gradientenfeld ist und konkrete Berechnung einer Stammfunktion?

Denn wir können schwerlich die Wegunabhängigkeit aller Integrale tatsächlich nachprüfen!

Beobachtung: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: U \to \mathbb{R}$ C^2 und

$v := \operatorname{grad}\varphi$ $\Rightarrow$ $D_k v_j = D_k D_j \varphi = D_j D_k \varphi = D_j v_k$

[daher v C^1]

D.h.: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ sktig diffbares Gradientenfeld $\Rightarrow$

v erfüllt die Integrabilitätsbedingungen

$$\boxed{D_k v_j = D_j v_k} \quad (1 \le j,k \le n) \quad [\text{für } j=k \text{ trivial}]$$

14.10. BEISP: 1) $U = \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = (y, x-y)$ [aus Bsp. 14.5]

$v_1(x,y) = y$, $v_2(x,y) = x - y$

$D_2 v_1(x,y) = 1 = D_1 v_2(x,y)$, also Int.bed. erfüllt

v besitzt auch eine Stammfunktion, z.B.: $\varphi(x,y) = xy - \frac{1}{2}y^2$

Probe: $D_1\varphi(x,y) = y = v_1(x,y)$, $D_2\varphi(x,y) = x - y = v_2(x,y)$,

d.h. $\operatorname{grad}\varphi = v$; somit Gleichheit der drei Integrale in 14.5 nun klar!

2) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $w(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$$D_2 w_1(x,y) = \partial_y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-1\cdot(x^2+y^2) - (-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_1 w_2(x,y) = \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

also erfüllt w die Int.bed.

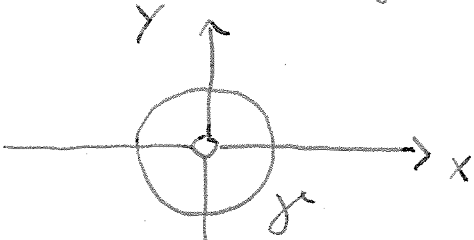
ABER w besitzt keine Stammfunktion auf U

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ Einheitskreis $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow$

$$\int_\gamma w = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{1} \\ \frac{\cos t}{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$$

γ geschlossene Kurve $\Rightarrow$ w ist nicht Gradientenfeld

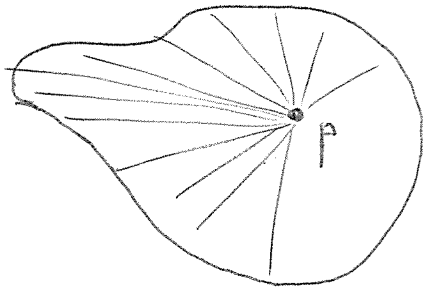
Es stellt sich heraus, dass das Problem bei Beispiel 2) von dem „Loch" im Gebiet $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ herrührt.

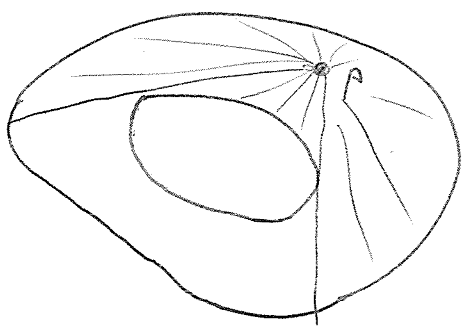


Topologie oder Funktionentheorie:
dieses U ist nicht einfach zusammenhängend

– wir behandeln eine speziellere „Löchervermeidung"

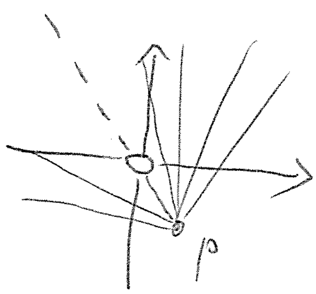
<u>14.11. DEF:</u> $M\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt <u>sternförmig</u>, falls gilt:
$\exists\, p\in M\ \forall x\in M$: die Verbindungsstrecke von p nach x verläuft ganz in M





nicht sternförm

sternförmig
(„jeder Winkel kann von p aus ausgeleuchtet werden")



$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
nicht sternf.: fehlt immer ein Halbstrahl hinter dem Loch

<u>Bem:</u> sternförmig $\Rightarrow$ wegzusammenhängend

= 28.11.2011 =

<u>14.12. SATZ:</u> Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ sternförmiges Gebiet [$\Leftrightarrow$ sternf. u. offen] und v ein stetig differenzierbares VF auf G. Dann gilt:

v ist Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ v erfüllt Integrabilitätsbed.

Beweis: ($\Rightarrow$): klar aus Herleitung der Int.bed.

($\Leftarrow$): OBdA ist G sternförmig bzgl. $p=0$ [denn Int.bed. ändern sich bei Verschiebung $\tilde{v}(x)=v(x-p)$ nicht]

$\forall x\in G$ sei $\sigma_x:[0,1]\to G$, $\sigma_x(t):=t\cdot x$

Verbindungsstrecke von 0 nach x

definiere $\varphi: G\to\mathbb{R}$ durch $\varphi(x):=\int_{\sigma_x} v =$

$$=\int_0^1 \langle v(tx),x\rangle\,dt=\sum_{k=1}^n x_k\cdot\int_0^1 v_k(tx)\,dt$$

$$D_j\varphi(x)=\sum_{k=1}^n\left(\underbrace{(D_j x_k)}_{=\delta_{jk}=\begin{cases}0 & j\neq k\\ 1 & j=k\end{cases}}\cdot\int_0^1 v_k(tx)\,dt + x_k\cdot\underbrace{D_j\left(\int_0^1 v_k(tx)\,dt\right)}_{=\int_0^1 D_j(v_k(tx))\,dt}\right)=$$

[„Begründung": Differenzenquotient durchs Integral ziehen; Beweis in Heuser 2, Satz 113.2]

$$=\int_0^1 v_j(tx)\,dt+\sum_{k=1}^n x_k\cdot\int_0^1 t\cdot\underbrace{D_j v_k(tx)}_{=D_k v_j(tx)\ \ldots\ \text{Int.bed.}!}\,dt=$$

$$=\int_0^1\Big(\underbrace{v_j(tx)}_{\overset{!!}{=} f(t)}+\underbrace{t\cdot\langle \operatorname{grad} v_j(tx),x\rangle}_{=f'(t)\ [\text{Kettenregel}!]}\Big)\,dt=$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(t' \cdot f(t) + t \cdot f'(t)\right)}_{= (t \cdot f(t))'} dt = \int_0^1 (t \cdot f(t))' dt = t \cdot f(t) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) = f(1) = v_j(x)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad} \varphi = v \qquad \square$$

14.13. Praktische Bestimmung der Stammfunktion

Vorgelegt sei ein C^1 VF v auf einem Gebiet G

1. Schritt: prüfe, ob G sternförmig ist
   - NEIN: andere Methode suchen, um Wegunabhängigkeit der Integrale von v zu ~~untersuchen~~ erkennen
   - JA $\to$ 2. Schritt

2. Schritt: überprüfe die Integrabilitätsbedingungen
   - nicht erfüllt $\Rightarrow$ v hat keine Stammfunktion auf G
   - erfüllt: Existenz einer Stammfkt. garantiert $\to$ 3. Schritt

3. Schritt – Konstruktion einer Stammfunktion:
   im Detail für $n=2$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ sternf. bzgl. $(0,0)$,
   $v(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ erfüllt $\partial_y v_1 = \partial_x v_2$:

<u>Ansatz:</u> $\varphi(x,y) = \int_0^x v_1(t,y)\,dt + h(y)$ ...... h noch zu bestimmen

wollen: $\partial_x \varphi = v_1$ und $\partial_y \varphi = v_2$

- $\partial_x \varphi(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x v_1(t,y)\,dt + h(y)\right) = v_1(x,y)$ [klar [nach Konst

- $\partial_y \varphi(x,y) = \frac{d}{dy}\left(\int_0^x v_1(t,y)\,dt + h(y)\right) =$ [Vertauschung von $\int \cdot dt$ mit $\frac{d}{dy}$ ok!]

$= \int_0^x \underbrace{D_2 v_1}_{= D_1 v_2 \text{ ... Int.bed.}}(t,y)\,dt + h'(y) = \int_0^x \frac{d}{dt}\left(v_2(t,y)\right)dt + h'(y) =$

$= v_2(t,y)\Big|_{t=0}^{t=x} + h'(y) = v_2(x,y) - v_2(0,y) + h'(y)$

d.h. $\partial_y \varphi(x,y) = v_2(x,y) \iff h'(y) = v_2(0,y)$

z.B. $h(y) = \int_0^y v_2(0,s)\,ds$ ergibt eine Lösung

- etwas praktischer formuliert:

1) Ansatz $\varphi(x,y) = \underbrace{\int v_1(x,y)\,dx}_{\text{Stammfkt. von } x \mapsto v_1(x,y)} + h(y)$

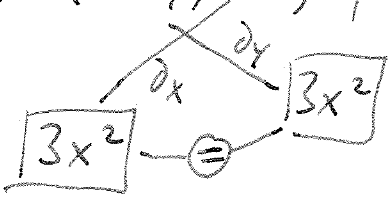
2) Gleichung $v_2(x,y) \overset{!}{=} \partial_y \varphi(x,y) = \int \partial_y v_1(x,y)\,dx + h'(y)$

ergibt $h'(y) = v_2(x,y) - \int \partial_y v_1(x,y)\,dx$,

daraus durch $\int \ldots dy$ dann h finden

[festgelegt bis auf Konstante]

BEISP: 1) $v(x,y) = (3x^2y, x^3)$, $G = \mathbb{R}^2$ ... skmf.



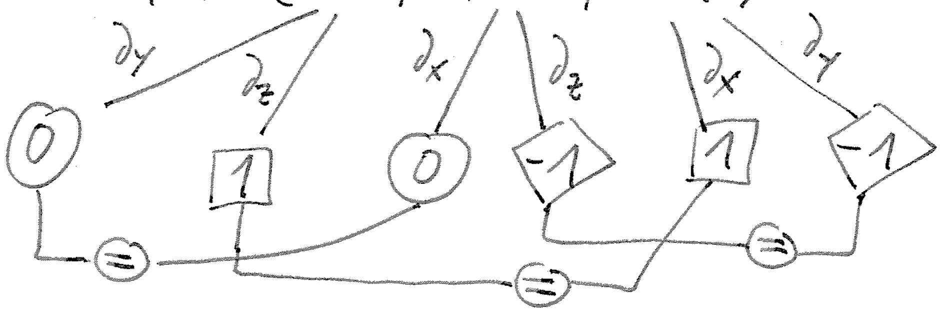
Int. bed. erfüllt

Ansatz $\varphi(x,y) = \int 3x^2y \, dx + h(y) = x^3y + h(y)$

$x^3 \overset{!}{=} \partial_y \varphi(x,y) = x^3 + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 0$; wähle $h = 0$

$\varphi(x,y) = x^3y$ [Probe: $\partial_x\varphi = 3x^2y$, $\partial_y\varphi = x^3$]

2) $G = \mathbb{R}^3$; $v(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$



Int. bed. erfüllt

Ansatz $\varphi(x,y,z) = \int v_1 \, dx + h(y,z) = \frac{x^2}{2} + z \cdot x + h(y,z)$

$-y-z = v_2 \overset{!}{=} \partial_y \varphi = \partial_y h(y,z)$

Ansatz $h(y,z) = \int (-y-z) \, dy + g(z) = -\frac{y^2}{2} - zy + g(z)$

$x - y = v_3 \overset{!}{=} \partial_z \varphi = \partial_z\left(\frac{x^2}{2} + zx + h(y,z)\right) = x - y + g'(z)$

$\Rightarrow g'(z) = 0$; wähle $g(z) = 0 \; \forall z$, denn ist

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + zx - \frac{y^2}{2} - zy = \frac{x^2 - y^2}{2} + z(x-y)$$

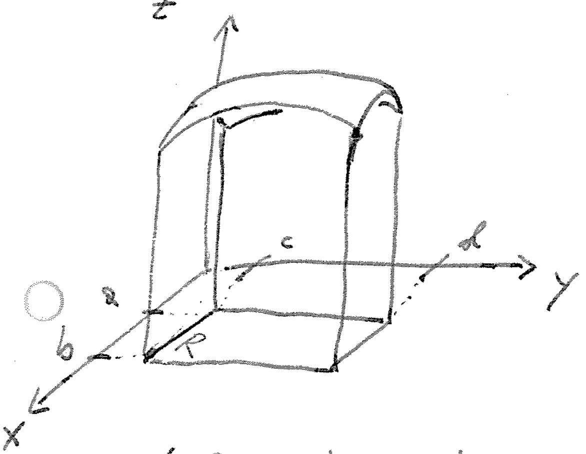
[Probe: $\partial_x\varphi = x + z$, $\partial_y\varphi = -y - z$, $\partial_z\varphi = x - y$]

§15 MEHRFACHE INTEGRALE

<u>Grundidee: Volumen unter einem Graphen</u>

sei $R = [a,b] \times [c,d]$ Rechteck im $\mathbb{R}^2$, $f: R \to \mathbb{R}$

Funktion mit $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in R$

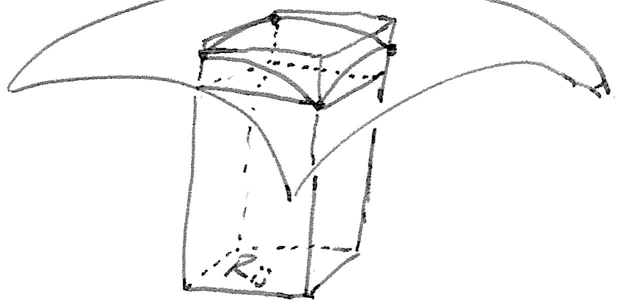


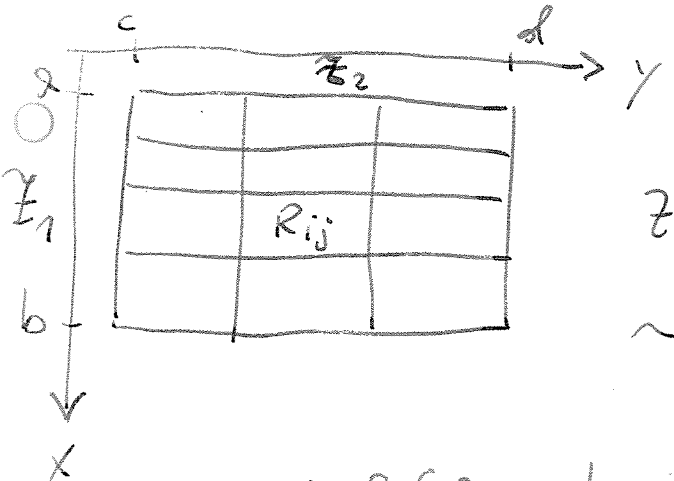
$K := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in R, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

3-dim. Bereich zwischen der xy-Ebene und der „Fläche"

$z = f(x,y)$ ..... Graph von f

Volumsberechnung von K näherungsweise durch Summe von Quadervolumina über kleinen Teilrechtecken von R





Zerlegungen Z_1 von $[a,b]$, Z_2 von $[c,d]$

$\rightsquigarrow R = \bigcup R_{ij}$ Zerlegung von R

$m_{ij} := \inf \{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$, $M_{ij} := \sup \{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$

$$\underbrace{\sum_{i,j} m_{ij} \cdot \text{Fläche}(R_{ij})}_{\text{Untersumme}} \leq \text{Volumen von } K \leq \underbrace{\sum_{i,j} M_{ij} \cdot \text{Fläche}(R_{ij})}_{\text{Obersumme}}$$

15.1. DEF: (i) $a_\ell \leq b_\ell$ $(\ell = 1, \dots, n)$, dann heißt

$I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ kompaktes n-dim. Intervall

$n=2$: Rechteck, $n=3$: Quader (jeweils achsenparallel)

$|I| := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ heißt Inhalt von I

$n=2$: Rechtecksfläche, $n=3$: Quadervolumen

(ii) Zerlegung Z von I ist gegeben durch Produkt

$Z_1 \times \dots \times Z_n$ von Zerlegungen Z_j von $[a_j, b_j]$

jedes Z_j zerlegt $[a_j, b_j]$ in Teilintervalle

und alle n-dim. Teilintervalle von I entstehen

durch $T_1 \times \dots \times T_n$, wobei T_j ein Teilintervall von $[a_j, b_j]$ ist.

Die n-dim. Teilintervalle von I seien beliebig nummeriert, sodass $I = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$, wobei verschiedene n-dim. Teilintervalle I_ℓ und I_k höchstens Ränder gemeinsam haben.

(iii) sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion

wir setzen $m_i := \inf \{ f(x) \mid x \in I_i \}$

$M_i := \sup \{ f(x) \mid x \in I_i \}$

$n = 2$

I_1	I_2	I_3
I_4	I_5	I_6

$U(f, Z) := \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot |I_i|$ … Untersumme, $O(f, Z) := \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot |I_i|$

heißt Obersumme

(iv) für beliebige $\xi_i \in I_i$ $(i=1,\dots,N)$ heißt

$$R(f,Z) := \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\cdot|I_i| \quad \underline{\text{Riemann-Summe}}$$

es gilt stets $U(f,Z) \leq R(f,Z) \leq O(f,Z)$

(v) $\underline{\int_I} f(x)dx := \sup_Z U(f,Z)$ ... <u>Unterintegral</u> von f über I

$\overline{\int_I} f(x)dx := \inf_Z O(f,Z)$.... <u>Oberintegral</u> von f über I

es gilt stets $\underline{\int_I} f\,dx \leq \overline{\int_I} dx$

(vi) f heißt <u>integrierbar</u>, falls $\underline{\int_I} f\,dx = \overline{\int_I} f\,dx$

und

$$\int_I f(x)dx := \underline{\int_I} f\,dx = \overline{\int_I} f\,dx$$ heißt <u>Integral</u> von f über I

<u>15.2. SATZ:</u> (i) f integrierbar $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ Zerl. Z von I: $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$

(ii) f integrierbar $\Leftrightarrow$ für Folge von Zerl. $Z^{(m)}$ von I mit $\max\{|I_\ell^{(m)}| \mid I_\ell^{(m)}$ n-dim. Teilint.$\} \to 0$ $(m\to\infty)$ <u>stets</u> $R(f,Z^{(m)})$ konvergent ist.

(iii) $f: I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ integrierbar

[vgl. Heuser §§ 197–199] = 29.11.2011 =