15.3. Eigenschaften des Integrals (Bew. leicht)

$f, g: I \to \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

(i) $f+g$ integrierbar und $\int_I (f+g)\,dx = \int_I f\,dx + \int_I g\,dx$

(ii) $c \cdot f$ integrierbar und $\int_I cf\,dx = c \cdot \int_I f\,dx$

((i) u. (ii) sagt, dass $f \mapsto \int_I f\,dx$ linear ist)

(iii) $f \leq g \Rightarrow \int_I f\,dx \leq \int_I g\,dx$

speziell: $f \geq 0 \Rightarrow \int_I f\,dx \geq 0$

(iv) $|f(x)| \leq M \;\; \forall x \in I \Rightarrow \left|\int_I f\,dx\right| \leq M \cdot |I|$

Notationen für das Integral: $\int_I f\,dx$, $\int_I f(x)\,dx$

$\int_I f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n)$ usw....

Spezialfall: $f = 1$ (Fkt., die konstant gleich 1 ist)

$\Rightarrow \int_I f\,dx = \int_I 1\,dx = |I|$

[Bew: klar, weil immer $m_i = M_i = 1$ und $|I| = |I_1| + \dots + |I_N|$]

15.4. Iterierte Integrale und Satz von Fubini

Sei $J=[a,b]$, $K=[c,d]$ und $I:=J\times K$ sowie

$f: I \to \mathbb{R}$ integrierbar

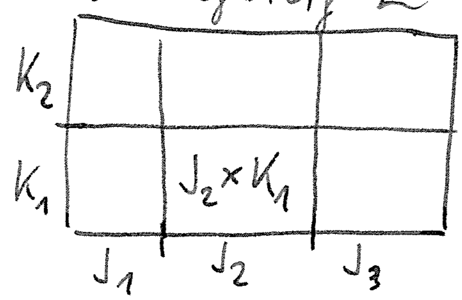
$\boxed{?}$ Wie rechnen wir $\int_I f(x,y)\,d(x,y)$ konkret aus?

sei $J=\bigcup_{k=1}^{M} J_k$ mit Teilintervallen J_k

und $K=\bigcup_{l=1}^{N} K_l$ mit Teilintervallen K_l,

dann ist $I=\bigcup_{k,l} J_k\times K_l$ mit 2-dim. Teilintervallen $J_k\times K_l$

$\rightsquigarrow$ Zerlegung Z



sei $m_{ij}:=\inf\{f(x,y)\,|\,(x,y)\in J_i\times K_j\}$

$M_{ij}:=\sup$ —//——

$\forall (x,y)\in J_i\times K_j: \quad m_{ij}\le f(x,y)\le M_{ij} \quad \overset{\text{Integral bzgl. } x \text{ über } J_i}{\Longrightarrow}$

$$\forall y\in K_j: \quad m_{ij}|J_i| \le \underline{\int_{J_i}} f(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad \overline{\int_{J_i}} f(x,y) \le M_{ij}\cdot|J_i|,$$

daher weiters [wegen $J=\bigcup_{i=1}^{M} J_i$]

$$\forall y\in K_j: \quad \sum_{i=1}^{M} m_{ij}|J_i| \le \sum_{i=1}^{M} \underline{\int_{J_i}} f(x,y)\,dx = \underbrace{\underline{\int_J} f(x,y)\,dx}_{=:F(y)} \quad \text{und}$$

$$G(y):=\overline{\int_J} f(x,y)\,dx \le \sum_{i=1}^{M} M_{ij}|J_i|$$

„integriere" beide Ungl. über K_j bzgl. y:

wegen $\int_{K_j} \text{const.}\, dy = \text{const.} \cdot |K_j|$ ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{M} m_{ij} \underbrace{|J_i| \cdot |K_j|}_{|J_i \times K_j|} \leq \underline{\int_{K_j}} \Big(\overbrace{\underline{\int_{J}} f(x,y)\, dx}^{F(y)} \Big) dy \quad \text{und}$$

$$\overline{\int_{K_j}} \Big(\underbrace{\overline{\int_{J}} f(x,y)\, dx}_{G(y)} \Big) dy \leq \sum_{i=1}^{M} M_{ij} \underbrace{|J_i| \cdot |K_j|}_{|J_i \times K_j|}$$

Summation über j ergibt wegen $\int_K = \int_{K_1} + \ldots + \int_{K_N}$ etc.:

$$U(f,Z) = \sum_{i,j} m_{ij} |J_i \times K_j| \leq \underline{\int_K} \Big(\underline{\int_J} f(x,y)\, dx \Big) dy \leq$$

sup über Z

$$\leq \overline{\int_K} \Big(\overline{\int_J} f(x,y)\, dx \Big) dy \leq \sum_{i,j} M_{ij} |J_i \times K_j| = O(f,Z)$$

inf über Z

$$\underline{\int_{J \times K}} f(x,y)\, d(x,y) \quad \boxed{=} \quad \overline{\int_{J \times K}} f(x,y)\, d(x,y)$$

weil $f: I \to \mathbb{R}$ integrierbar!

[mit kleinen Zusatzargumenten, o.B.]

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\int_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) = \int_K \left(\int_J f(x,y)\,dx\right) dy = \int_J \left(\int_K f(x,y)\,dy\right) dx}$$

[aus Symmetriegründen]

- allgemeiner im $\mathbb{R}^n$ gilt der <u>SATZ von Fubini:</u>

(i) J m-dim. Intervall, K n-dim. Intervall und $f: J\times K \to \mathbb{R}$ <u>integrierbar</u>, dann gilt

$$\int_{J\times K} f(x,y)\,d(x,y) = \int_K \left(\int_J f(x,y)\,dx\right) dy = \int_J \left(\int_K f(x,y)\,dy\right) dx .$$

(ii) $I = [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ und $f: I\to\mathbb{R}$ <u>integrierbar</u>, dann gilt

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_n ,$$

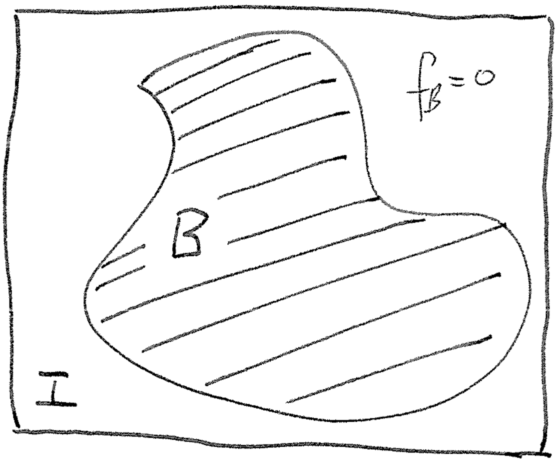
wobei die Reihenfolge der Integrationen auch beliebig geändert werden darf. [ACHTUNG: gilt i.A. nicht, falls f nicht integrierbar auf I]

<u>BEISP:</u> $I = [0,1]^3$, $\int_I xyz\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 yz\,dy\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 z\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

15.5. Integration über allgemeinere Bereiche

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und I ein n-dim. Intervall mit $B \subseteq I$.



Für $f: B \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$f_B(x) := \begin{cases} f(x) & x \in B, \\ 0 & x \notin B, \end{cases} \quad [f_\emptyset = 0]$$

dann ist $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ f beschränkt.

Wir sagen f sei <u>integrierbar auf B</u>, falls f_B auf I integrierbar ist (leicht zu sehen, dass dies nicht von der Wahl von I abhängt) und setzen

$$\int_B f(x)\,dx := \int_I f_B(x)\,dx \quad \ldots \text{ Integral von } f \text{ über } B$$

<u>Spezialfall $f = 1$ (konst. Fkt.)</u>: dann ist

$$f_B(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{matrix} \right\} =: 1_B(x) \quad \ldots \text{ charakteristische Funktion von } B$$

$$1_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

B heißt <u>(Jordan-)messbar</u>, falls 1 integrierbar ist auf B.
Wir setzen in diesem Fall

$$|B| := \int_B 1\,dx \quad \ldots\ldots \ n\text{-dim. (Jordan-)Inhalt von } B \left[= \int_I 1_B(x)\,dx \right]$$

$|\emptyset| = 0$; $n=2$: $|B|$ auch <u>Flächeninhalt</u>,

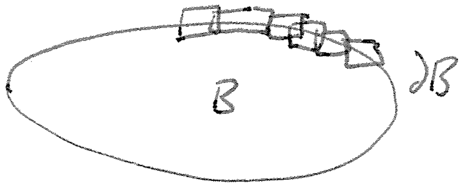
$n=3$: $|B|$ als <u>Volumen</u> bezeichnet

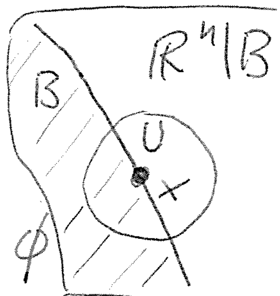
<u>BEM</u>: man kann zeigen [vgl. Heuser 2, Satz 202.1]:

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann gilt:

B (Jordan-)messbar $\Longleftrightarrow$ der Rand ∂B ist eine (Jordan-)Nullmenge, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ endlich viele kompakte Intervalle $I_1, \dots, I_m$ mit $\partial B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ und

$$\sum_{k=1}^{m} |I_k| < \varepsilon$$





Es ist <u>$x \in \partial B$</u> $:\Longleftrightarrow$ $\forall$ Umg. von x gilt $U \cap B \neq \emptyset$

und $U \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \emptyset$

<u>15.6. Eigenschaften des Integrals über B</u>

(i) $f, g: B \to \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g, c \cdot f$ integr.

und $\int_B (f+g) = \int_B f + \int_B g$, $\int_B (c \cdot f) = c \cdot \int_B f$

weiters: $f \leq g \Rightarrow \int_B f \leq \int_B g$

insbesondere: $\left| \int_B f \, dx \right| \leq \int_B |f| \, dx$

(ii) B messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ integrierbar,

$m := \inf\{f(x) \mid x \in B\}$, $M := \sup\{f(x) \mid x \in B\}$ $\Rightarrow$

$$m \cdot |B| \leq \int_B f\,dx \leq M \cdot |B|$$ (Mittelwertsatz für mehrfache Integrale)

(iii) A, B messbar, $A \cap B = \emptyset$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei integrierbar auf A und auf B $\Rightarrow$

$$\int_{A \cup B} f\,dx = \int_A f\,dx + \int_B f\,dx$$

speziell für $f = 1$ ergibt sich: $|A \cup B| = |A| + |B|$

(iv) B kompakt und messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ f integrierbar auf B

(v) B kompakt und messbar, $a < b$, $f: [a,b] \times B \to \mathbb{R}$ stetig

definiere $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ als <u>Parameterintegral</u>

$$\varphi(t) := \int_B f(t,x)\,dx \quad (t \in [a,b]).$$

Dann ist φ stetig.

Falls auch $\partial_t f$ existiert und stetig ist, dann gilt:

φ diffbar und $\varphi'(t) = \int_B \partial_t f(t,x)\,dx$ [Heuser, Satz 201.13]

= 5.12.2011 =