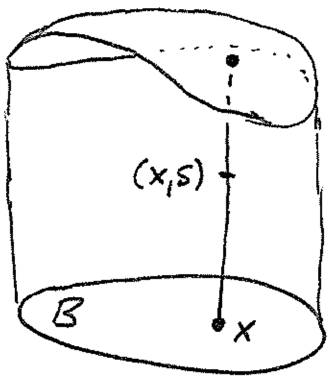
15.7. Inhalt unter dem Graphen einer Funktion

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f: B \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f \geq 0$

$$K(f) := \{ (x,s) \in B \times \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq f(x) \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$



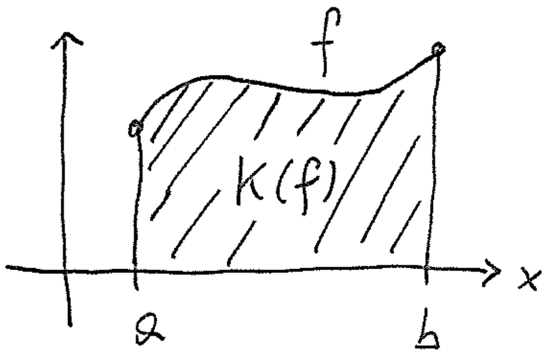
heißt <u>Ordinatenmenge</u> von f

$K(f)$ ist messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$
[Bew. in Heuser, Satz 203.1]

<u>SATZ:</u> $$|K(f)| = \int_B f \, dx$$

Spezialfall $n=1$, $B = [a,b]$:

$$|K(f)| = \int_a^b f(x)\, dx$$



Beweis: f beschränkt $\Rightarrow \exists\, C \geq 0 : 0 \leq f(x) \leq C \quad \forall x \in B$;
B beschränkt $\Rightarrow \exists$ n-dim. Intervall I: $B \subseteq I$

$\Rightarrow K(f) \subseteq I \times [0,C] =: J \ldots (n+1)$-dim. Intervall

$$|K(f)| = \int_{K(f)} 1 \, d(x,s) = \int_J \mathbb{1}_{K(f)} \, d(x,s) \underset{\text{[Fubini]}}{=} \int_I \left(\int_0^C \mathbb{1}_{K(f)}(x,s)\, ds \right) dx$$

für $x \in I \setminus B$ ist $1_{K(f)}(x,s) = 0 \;\; \forall s \in \mathbb{R}$ und $f_B(x) = 0$;

für $x \in B$ ist $1_{K(f)}(x,s) = \begin{cases} 0 & s \notin [0,f(x)] \\ 1 & 0 \le s \le f(x) \end{cases} = \begin{cases} 0 & s \notin [0,f_B(x)] \\ 1 & s \in [0,f_B(x)] \end{cases}$;

somit $\int_0^c 1_{K(f)}(x,s)\,ds = \int_0^{f_B(x)} 1\,ds \quad \forall x \in I$ (weil $\int_0^0 1\,dx = 0$);

daher erhalten wir

$$|K(f)| = \int_I \Big(\underbrace{\int_0^{f_B(x)} 1\,ds}_{f_B(x)-0}\Big)\,dx = \int_I f_B(x)\,dx = \int_B f(x)\,dx$$

$\square$

Bem: analog erhalten wir für $f_1, f_2 : B \to \mathbb{R}$ integr. mit $f_1 \le f_2$ und

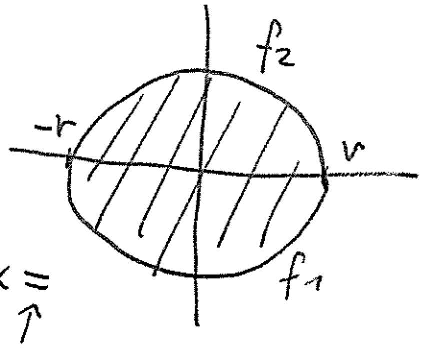
$$K(f_1,f_2) := \{(x,s) \in B \times \mathbb{R} \mid f_1(x) \le s \le f_2(x)\}$$

die Formel

$$|K(f_1,f_2)| = \int_B (f_2 - f_1)\,dx.$$

<u>BEISP</u>: $B = [-r,r]$, $f_1(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$, $f_2(x) = \sqrt{r^2-x^2}$

$K(f_1,f_2)$ = Kreisscheibe vom Radius r

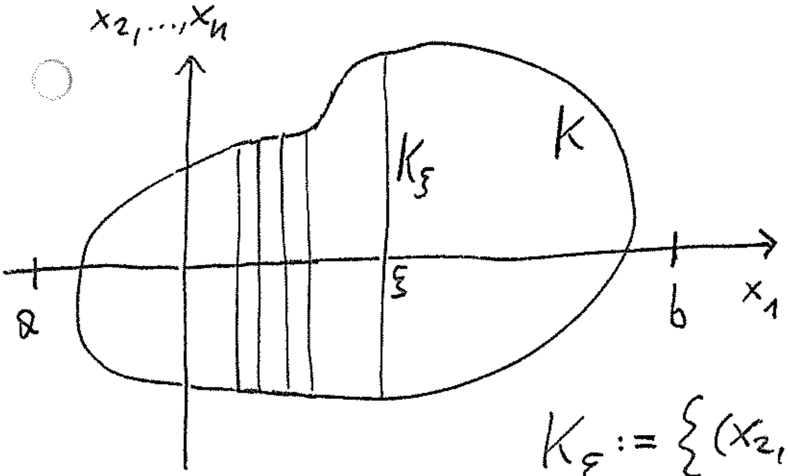


$$|K(f_1,f_2)| = \int_B \left(\sqrt{r^2-x^2} + \sqrt{r^2-x^2}\right)dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=}$$

[subst: $x = r \cdot \sin t$ ... siehe SS11]

$$= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2-x^2} + r^2 \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right)\right]_{x=-r}^{x=r} = \left(0 + r^2\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 - r^2\frac{\pi}{2}\right) = r^2 \cdot \pi$$

15.8. Das Prinzip von Cavalieri (1635)



$K \subseteq \mathbb{R}^n$ sei messbar und $\forall (x_1,\dots,x_n) \in K: a \leq x_1 \leq b$

für $\xi \in [a,b]$ bezeichne

$$K_\xi := \{ (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\xi, x_2,\dots,x_n) \in K \}$$

den Schnitt von K mit der Hyperebene $x_1 = \xi$

Idee: „Salami-Taktik" ... Volumen von K = „Summe" über alle Flächen der Schnitte K_ξ für $\xi \in [a,b]$

sei $q(\xi) := |K_\xi|$ .... Inhalt von K_ξ im $\mathbb{R}^{n-1}$

<u>SATZ</u>: $$|K| = \int_a^b q(\xi)\, d\xi$$

Beweis: sei J $(n-1)$-dim. Intervall so, dass $K \subseteq [a,b] \times J$; es ist

$$|K| = \int_K 1\, dx = \int_{[a,b]\times J} 1_K(x)\, dx = [\text{Fubini}]$$

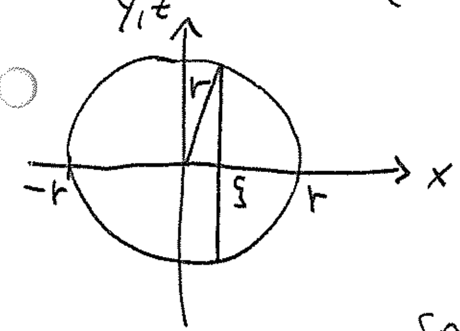
$$= \int_a^b \left(\int_J 1_K(\xi, x_2,\dots,x_n)\, d(x_2,\dots,x_n) \right) d\xi$$

es ist $1_K(\xi, x_2,\dots,x_n) = \begin{cases} 0 & (x_2,\dots,x_n) \notin K_\xi \\ 1 & (x_2,\dots,x_n) \in K_\xi \end{cases} = 1_{K_\xi}(x_2,\dots,x_n)$, daher $$|K| = \int_a^b \Bigg(\underbrace{\int 1_{K_\xi}(x_2,\dots,x_n)\, d(x_2,\dots,x_n)}_{= \int_{K_\xi} 1 \, d(x_2,\dots,x_n) = |K_\xi| = q(\xi)} \Bigg) d\xi =$$

$$= \int_a^b q(\xi)\, d\xi$$

$\square$

<u>BEISP:</u> $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ Kugel mit Radius r



$-r \le \xi \le r$, K_ξ ... Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{r^2-\xi^2}$,

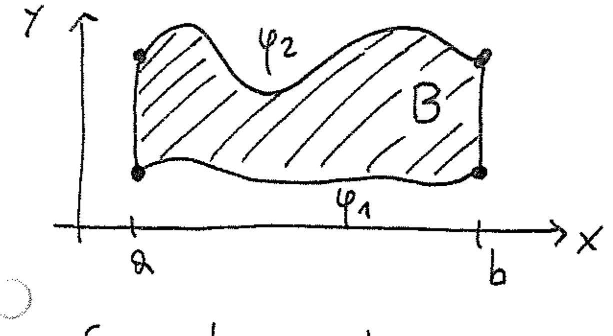
somit $q(\xi) = |K_\xi| = (r^2-\xi^2)\cdot\pi$

$$|K| = \int_{-r}^{r} (r^2-\xi^2)\pi \, d\xi = \pi \cdot \left(r^2\xi - \frac{1}{3}\xi^3\right)\Big|_{\xi=-r}^{\xi=r} =$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \pi \cdot r^3 \left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\cdot r^3$$

15.9. Normalbereiche:

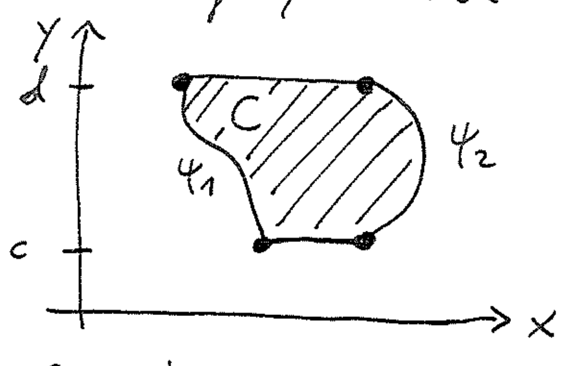
B NB bzgl. x-Achse



$B = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

$\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

C NB bzgl. y-Achse



$C = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

$\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

$f: B \to \mathbb{R}$ stetig bzw. $f: C \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

bzw. $$\int_C f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Beweis: für B (jener für C analog)

setze $m := \min \varphi_1$, $M := \max \varphi_2$, $I := [a,b] \times [m,M]$

$$\int_B f\,d(x,y) = \int_I f_B\,d(x,y) \underset{\boxed{\text{Fubini}}}{=} \int_a^b \left(\int_m^M f_B(x,y)\,dy \right) dx$$

$a \le x \le b$ fix, dann ist $f_B(x,y) = \begin{cases} 0 & y \notin [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \\ f(x,y) & y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)] \end{cases}$

somit $$\int_m^M f_B(x,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$ daher insgesamt

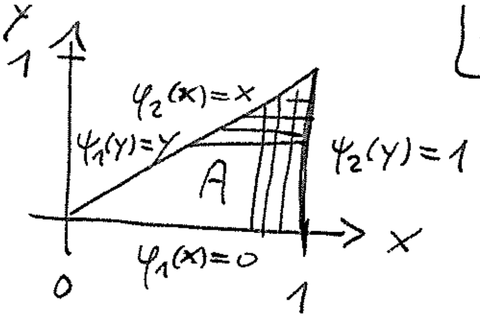
$$\int_B f\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$\square$

<u>Folgerung</u>: Wenn $A \subseteq \mathbb{R}^2$ sowohl NB bzgl. x-Achse als auch NB bzgl. y-Achse ist, also $A = B$ und $A = C$ wie oben, dann gilt

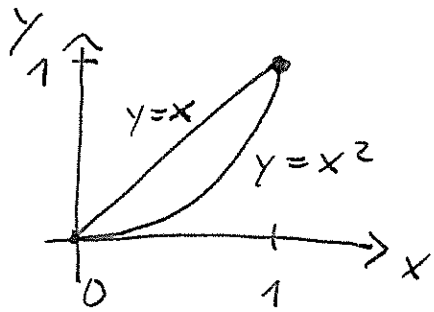
$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

BEISP: 1) $$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$$



A ist NB bzgl. x- und y-Achse

2) $\int_B x\cdot y \, d(x,y)$, wobei B der Bereich im 1. Quadranten zwischen der Geraden $y=x$ und der Parabel $y=x^2$ ist



- B ist NB bzgl. x-Achse mit $\varphi_1(x)=x^2$ und $\varphi_2(x)=x$ für $x\in[0,1]$

$$\Rightarrow \int_B xy\,d(x,y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot(x^2-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3-x^5)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6-4}{24} = \frac{1}{24}$$

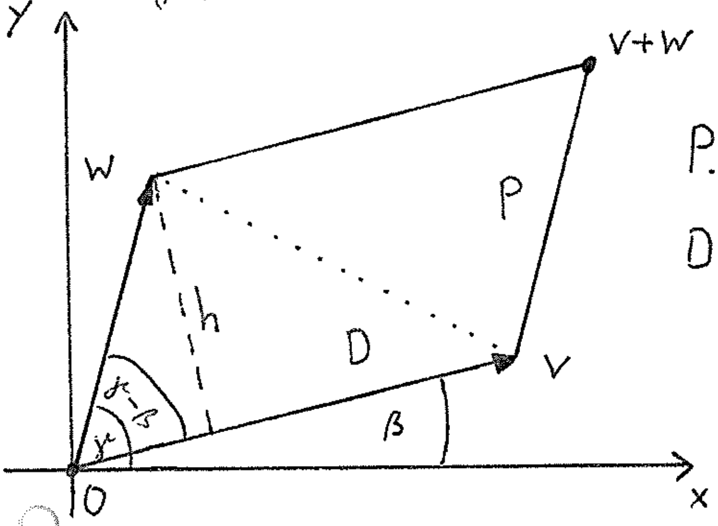
- zum Spaß auch noch in der anderen Integrations=reihenfolge: B NB bzgl. y-Achse mit $\psi_1(y)=y$, $\psi_2(y)=\sqrt{y}$, $0\le y\le 1$

$$\int_B xy\,d(x,y) = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 y\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y\cdot(y-y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2-y^3)\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4-3}{12} = \frac{1}{24}$$

15.10. Substitutionsregel für Mehrfachintegrale

Vorgeplänkel: Flächeninhalt von Parallelogrammen



$v, w \in \mathbb{R}^2$

P... Parallelogramm $0, v, v+w, w$

D... Dreieck $0, v, w$

$$|P| = 2 \cdot |D|$$

$$v_1 = \|v\| \cdot \cos\beta \qquad w_1 = \|w\| \cos\gamma$$

$$v_2 = \|v\| \cdot \sin\beta \qquad w_2 = \|w\| \sin\gamma$$

$$h = \|w\| \cdot \sin(\gamma - \beta)$$

$$|P| = 2 \cdot |D| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|v\| \cdot h = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\gamma - \beta) =$$

$$= \|v\| \cdot \|w\| \cdot (\sin\gamma \cdot \cos\beta - \sin\beta \cos\gamma) = v_1 \cdot w_2 - v_2 w_1 = \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

bzw. $|P| = -\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$, falls $\beta > \gamma$; insgesamt

$$\boxed{|P| = |\det(v \ w)|}$$

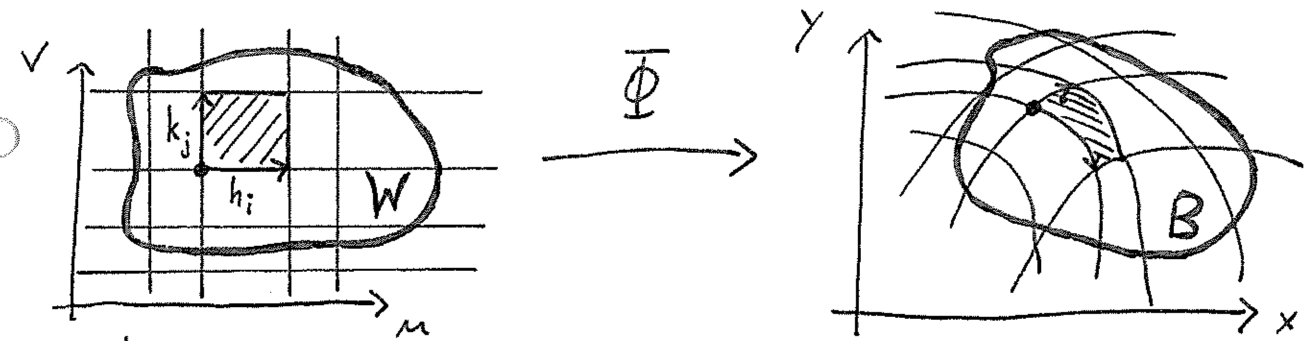
Bem: ähnlich ergibt sich für Parallelepiped im $\mathbb{R}^3$ aufgespannt von Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ das Volumen $|\det(u \ v \ w)|$ [analytische Geometrie]

Bem: $P = A([0,1]^2)$, wobei $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear,
$Ae_1 := v$, $Ae_2 := w$; $\boxed{|P| = |\det A|}$ =12.12.2011=

Heuristik: $B \subseteq \mathbb{R}^2$ messbar, $f: B \to \mathbb{R}$ integrierbar;

Substitution in $\int_B f(x,y)\, d(x,y)$ durch $\begin{matrix} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v), \end{matrix}$

wobei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix} =: \Phi(u,v)$ eine injektive, stetig diffbare Abb. $\Phi: W \to B$ ist mit $W \subseteq \mathbb{R}^2$



Rechteck

R_{ij} .... $\begin{pmatrix} u_i \\ v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_i+h_i \\ v_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_i+h_i \\ v_j+k_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_i \\ v_j+k_j \end{pmatrix}$ wird unter Φ abgebildet

auf „krummes Parallelogramm" $\Phi(u_i,v_j) = \begin{pmatrix} \varphi(u_i,v_j) \\ \psi(u_i,v_j) \end{pmatrix}, \ldots$ usw.,

das durch die Differenzvektoren

$$\tilde{v} := \begin{pmatrix} \varphi(u_i+h_i, v_j) - \varphi(u_i, v_j) \\ \psi(u_i+h_i, v_j) - \psi(u_i, v_j) \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} := \begin{pmatrix} \varphi(u_i, v_j+k_j) - \varphi(u_i, v_j) \\ \psi(u_i, v_j+k_j) - \psi(u_i, v_j) \end{pmatrix}$$

gegeben wird; es ist gemäß MWS der Diff.rechnung

$$\tilde{v} \approx \begin{pmatrix} \partial_u \varphi(u_i,v_j) \cdot h_i \\ \partial_u \psi(u_i,v_j) \cdot h_i \end{pmatrix} = h_i \cdot \begin{pmatrix} \partial_u \varphi(u_i,v_j) \\ \partial_u \psi(u_i,v_j) \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} \approx k_j \cdot \begin{pmatrix} \partial_v \varphi(u_i,v_j) \\ \partial_v \psi(u_i,v_j) \end{pmatrix};$$

somit

$$|\Phi(R_{ij})| \approx |\det(\tilde{v}\ \tilde{w})| = |\det D\Phi(u_i,v_j)| \cdot |h_i k_j| = |\det D\Phi(u_i,v_j)| \cdot |R_{ij}|$$

daher wird

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) \approx \sum_{i,j} f(\overbrace{\varphi(u_i,v_j),\psi(u_i,v_j)}^{\Phi(u_i,v_j)}) \cdot |\det D\Phi(u_i,v_j)| \cdot |R_{ij}|$$

$$\Big\downarrow \; h_i,k_j \to 0, \text{ d.h. } |R_{ij}| \to 0$$

$$\int_W f(\Phi(u,v)) \cdot |\det D\Phi(u,v)|\, d(u,v)$$

strenger Beweis für beliebige Dimensionen ist sehr aufwendig; siehe z.B. Heuser 2, §205.

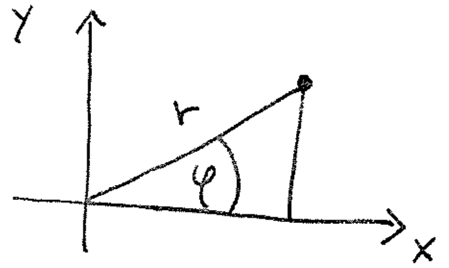
<u>SATZ</u>: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar und injektiv mit $\det D\Phi(u) \neq 0 \;\forall u \in U$.
Für $K \subseteq U$ kompakt und messbar, $f: \Phi(K) \to \mathbb{R}$ stetig gilt dann

$$\boxed{\int_{\Phi(K)} f(x)\,dx = \int_K f(\Phi(u)) \cdot |\det D\Phi(u)|\, du}$$

<u>Bem</u>: Formel gilt auch noch, falls $\exists\, N \subseteq U$ mit $|N| = 0$, sodass die Voraussetzungen $\det D\Phi \neq 0$ und Φ injektiv nur auf $U \setminus N$ gelten.

<u>Spezialfall Φ linear</u>: $\Phi(u) = A \cdot u$, $f = 1 \Rightarrow |\Phi(K)| = |\det A| \cdot |K|$

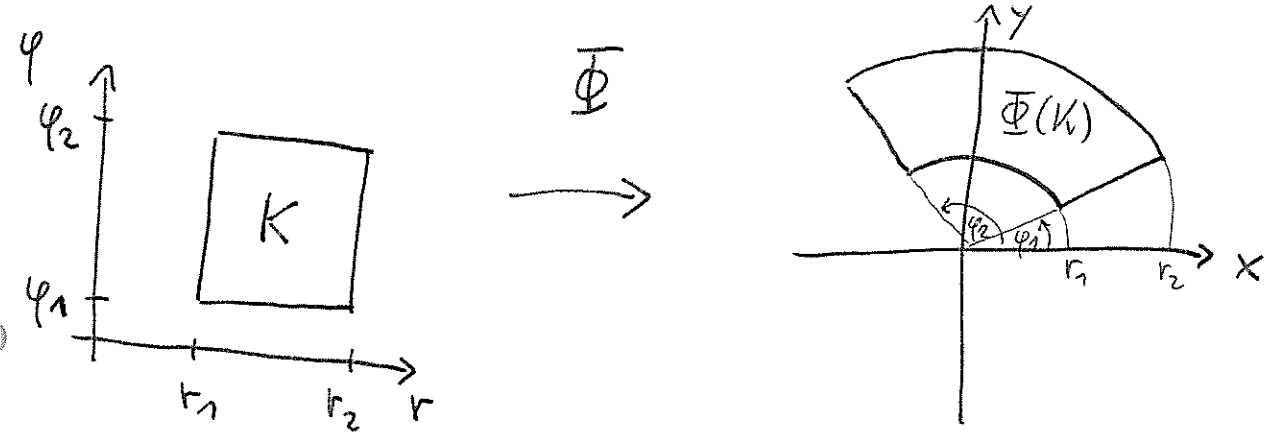
BEISP. 1) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

d.h. $\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi(r,\varphi) = r$$



$$\int_{\Phi(K)} f(x,y)\, d(x,y) = \underbrace{\int_K f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r \, d(r,\varphi)}_{\boxed{K \text{ allgemein}}} = \underbrace{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r \, dr\, d\varphi}_{\boxed{K \text{ Rechteck}}}$$

(Int.reihenfolge egal)

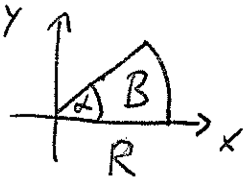
- Φ ist injektiv $\underbrace{\{(r,\varphi) \mid r>0, 0<\varphi<2\pi\}}_{\text{offener Bereich } U \text{ wie im Satz verlangt}} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

aber leicht zu zeigen (durch Limiten $r_1 \to 0$, $\varphi_1 \to 0$, $\varphi_2 \to 2\pi$), dass obige Formel gültig für beliebige kompakte messbare Teilmenge $K \subseteq U$ oder Rechtecke der Form

$$K = \{(r,\varphi) \mid r_1 \le r \le r_2,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$$

mit $0 \le r_1 < r_2$ und $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$ [Heuser 2, §206]

z.B.:



$B \ldots$ Kreissektor mit Winkel $\alpha \in]0, 2\pi]$ und Radius $R > 0$

$B = \Phi(K)$ mit $K = [0,R] \times [0,\alpha] \implies$

$$|B| = \int_{\Phi(K)} 1\, d(x,y) = \int_K r\, d(r,\varphi) = \int_0^\alpha \int_0^R r\, dr\, d\varphi = \int_0^\alpha \frac{r^2}{2}\Big|_0^R d\varphi =$$

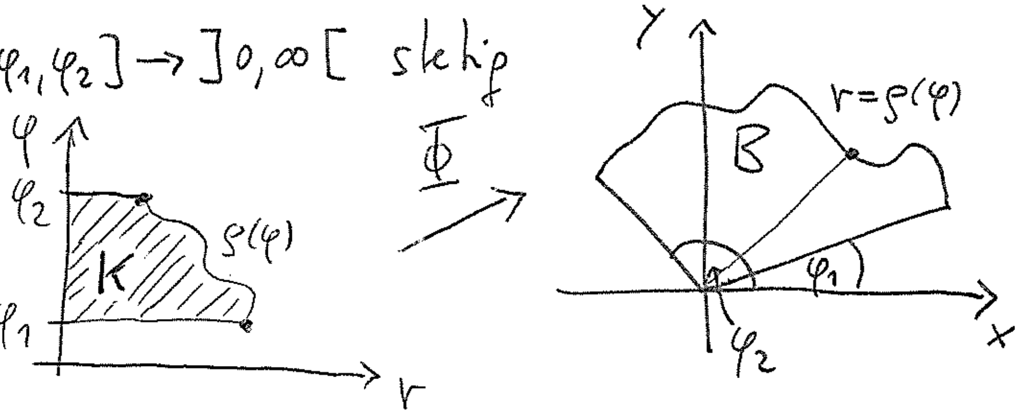
$$= \frac{R^2}{2}\cdot \int_0^\alpha d\varphi = \frac{R^2}{2}\cdot \alpha$$

2) betrachte $B := \left\{ (x,y) \;\middle|\; \binom{x}{y} = r \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ mit } 0 \le r \le \rho(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \right\}$

mit $\rho : [\varphi_1, \varphi_2] \to \,]0,\infty[$ stetig

$B = \Phi(K)$, wobei

K NB bzgl. φ-Achse



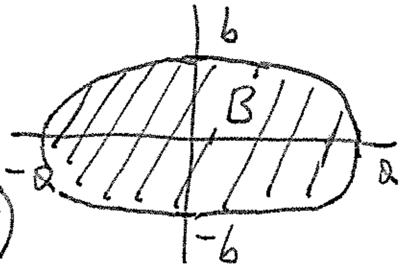
$K = \{ (r,\varphi) \mid \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,\ 0 \le r \le \rho(\varphi) \}$

$$|B| = \int_B 1\, d(x,y) = \int_K r\, d(r,\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\rho(\varphi)} r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\rho(\varphi)} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)^2\, d\varphi$$

(Beisp. 1 ist Spezialfall mit $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \alpha$, $\rho(\varphi) = R$)

3) <u>Ellipsenfläche:</u> $B := \left\{ (x,y) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$

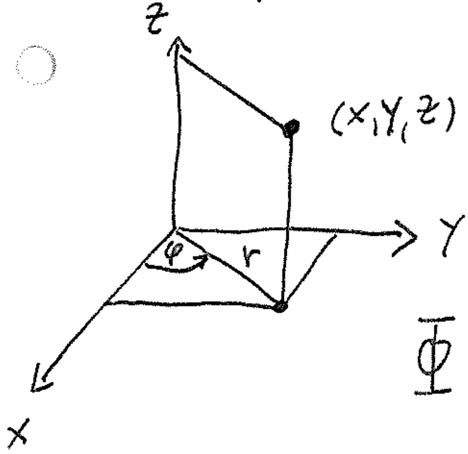


setze $\Phi(r,\varphi) := r \cdot \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ b\sin\varphi \end{pmatrix}$, $B = \Phi([0,1]\times[0,2\pi])$

$$|B| = \int_B 1\, d(x,y) = \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} |\det D\Phi(r,\varphi)|\, d(r,\varphi) = \left[\det D\Phi(r,\varphi) = \det \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ra\sin\varphi \\ b\sin\varphi & rb\cos\varphi \end{pmatrix} = abr \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr\, dr\, d\varphi = ab \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = ab\pi \qquad (\text{Kreis} \mathrel{\hat{=}} a = b = R)$$

15.11. Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$$\Phi(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$\Phi([0,R]\times[0,2\pi]\times[0,h])$ ... Zylinder mit Radius R und Höhe h im $\mathbb{R}^3$

$$D\Phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi(r,\varphi,z) = r$$

$$\boxed{\int_{\Phi(K)} f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_K f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\, d(r,\varphi,z)}$$

K allgemein

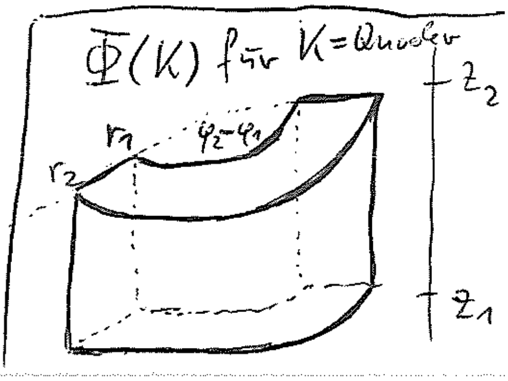
$$\boxed{= \int_{z_1}^{z_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r\, dr\, d\varphi\, dz}$$

(Integrationsreihenfolge egal!)

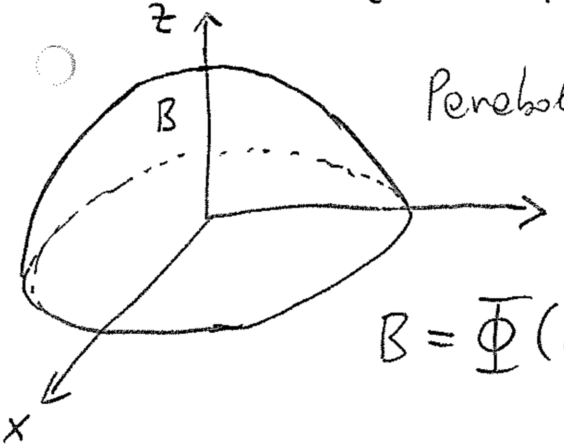
K Quader $[r_1,r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\times[z_1,z_2]$

gültig für beliebige kompakte messbare Teilmenge K von $\{(r,\varphi,z) \mid r>0,\ 0<\varphi<2\pi,\ z\in\mathbb{R}\}$ oder K ein Quader der Form $K=[r_1,r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\times[z_1,z_2]$ mit

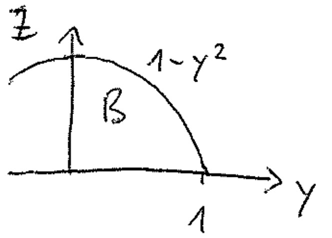
$0\le r_1<r_2$, $0\le\varphi_1<\varphi_2\le 2\pi$, $z_1<z_2$



Beisp: $B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1-x^2-y^2\}$



Paraboloid



$|B|=?$

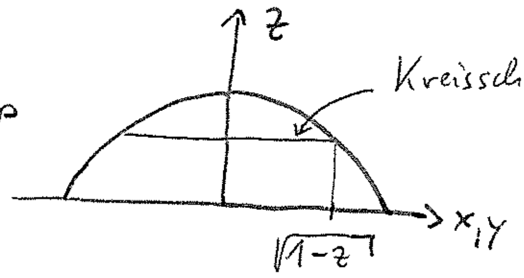
$B=\Phi(K)$ mit $K=\{(r,\varphi,z)\mid 0\le r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le z\le 1-r^2\}$

NB bzgl. $r\varphi$-Ebene

$$|B|=\int_B 1\,d(x,y,z)=\int_K r\,d(r,\varphi,z)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-r^2} r\,dz\,d\varphi\,dr=$$

$$=2\pi\cdot\int_0^1 r\cdot(1-r^2)\,dr=2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1=2\pi\left(\frac12-\frac14\right)=\frac{\pi}{2}$$

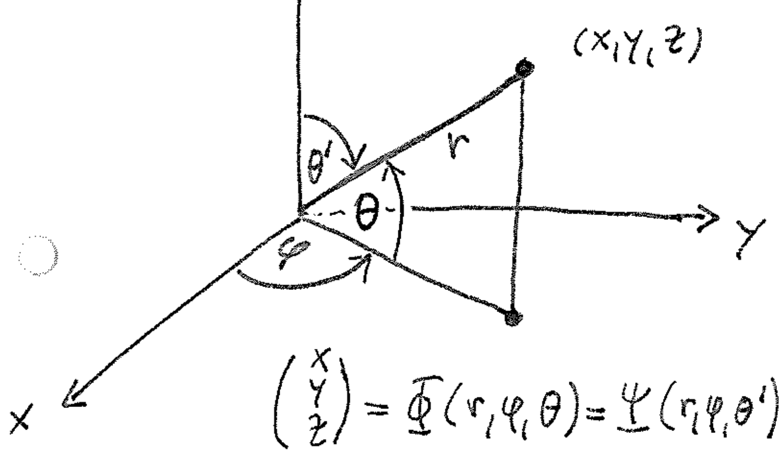
Bem: mit Cavalieri-Prinzip



Kreisscheibe vom Radius $\sqrt{1-z}$, daher $q(z)=\pi\cdot(1-z)$

$$|B|=\int_0^1 q(z)\,dz=\pi\int_0^1(1-z)\,dz=\pi\left(z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1=\pi\left(1-\frac12\right)=\frac{\pi}{2}$$

15.12. Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$



$x=r\cos\varphi\cos\theta$ $\boxed{\Phi}$

$y=r\sin\varphi\cos\theta$ [Heuser]

$z=r\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

oder $\boxed{\Psi}$

$x=r\cos\varphi\sin\theta'$ [Ü-Aufg.]

$y=r\sin\varphi\sin\theta'$ [Forster]

$z=r\cos\theta'$ $(0\le\theta'\le\pi)$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\Phi(r,\varphi,\theta)=\Psi(r,\varphi,\theta')$$

$\Phi([0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$ beschreibt Vollkugel vom Radius R

$\det D\Phi(r,\varphi,\theta) = -r^2\cdot\cos\theta$ $\left[\text{bzw. } \det D\Psi(r,\varphi,\theta') = r^2\sin\theta'\right]$

$$\boxed{\int\limits_{\Phi(K)} f(x,y,z) = \int\limits_K f(r\cos\varphi\cos\theta,\dots)\, r^2\cos\theta \, d(r,\varphi,\theta)}$$

$$\left[\text{für } K=[r_1,r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\times[\theta_1,\theta_2]\right] \boxed{= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(\dots)\, r^2\cos\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$\left(\text{bzw. } \int\limits_K f(\dots)\, r^2\sin\theta\, d(r,\varphi,\theta) \text{ mittels } \Psi\right)$$

<u>Beisp:</u> $B = K_R(0) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2\le R^2\} = \Phi([0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}])$

$$|B| = \int\limits_B 1\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r^2\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\cdot\int_0^R r^2\, dr = 2\pi\cdot \sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^R =$$

$$= 2\pi\cdot(1-(-1))\cdot\left(\frac{R^3}{3}-0\right) = \frac{4}{3}R^3\pi$$

= 13.12.2011 =