Übungen zu Analysis* für LAK

(zusammengestellt von Günther Hörmann)

Sommersemester 2011

Blatt 1

„*Dies und das* zum Wiederholen und Aufwärmen“

Wir vereinbaren $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und die Kurzschreibweise (a_n) für eine Folge $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Entscheide und begründe, welche der Eigenschaften *beschränkt* und *konvergent* bzw. *divergent* auf die angegebene Folge zutreffen. Im Falle der Konvergenz bestimme den Grenzwert. Es ist jeweils für $n \in \mathbb{N}$:

a) $a_n = \dfrac{1 + n^2 2^{-n}}{n}$ b) $b_n = \dfrac{1}{\frac{n+1}{n} - \frac{(-1)^n}{3}}$

c) $c_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$ d) $d_n = \sqrt{n + \dfrac{n}{1000}} - \sqrt{n}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Finde jeweils ein Beispiel für zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, sodass zusätzlich gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 2011$

c) Die Produktfolge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, aber divergent.

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Beweise induktiv die (Version der) Bernoulli-Ungleichung: für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt stets

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

b) Schließe daraus, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $0 < y < 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(1 - y)^n > 1 - ny \qquad \text{und} \qquad (1 - y)^n < \frac{1}{1 + ny}.$$

[Hinweis für die zweite Ungleichung in b): es ist $1 - y < \frac{1}{1+y}$. Warum?]

---

*im SS für Folgen in und Funktionen auf $\mathbb{R}$, im WS für Folgen in und Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}$

Übungen zu Analysis für LAK (SS 2011) – Blatt 1

4 Einschachtelung der Eulerschen Zahl e

[Diese Aufgabe besteht aus vielen Teilaufgaben. Sie können (und sollen!) aber auch dann fortfahren, falls Ihnen die Lösung einzelner Punkte nicht vollständig gelingt, und die behaupteten Teilresultate zum Weitermachen zunächst einfach annehmen.]

Betrachte die beiden reellen Folgen (a_n) und (b_n), gegeben durch

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad \text{und} \quad b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Zeige zunächst der Reihe nach:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n < b_n$

b) (a_n) ist streng monoton wachsend
[Hinweis: beachte $a_n = (\frac{n+1}{n})^n$ und zeige $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$ durch geeignete Umformungen und Verwendung einer der Ungleichungen aus der vorigen Aufgabe mit $y = 1/n^2$.]

c) (b_n) ist streng monoton fallend
[Hinweis: ähnlich zu b) beachte $b_n = (\frac{n+1}{n})^{n+1}$ und zeige $\frac{b_n}{b_{n-1}} < 1$.]

d) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < \cdots < b_3 < b_2 < b_1 = 4$$

(insbesondere sind beide Folgen also auch beschränkt)

e) $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{4}{n}$

Nun formuliere das Intervallschachtelungsprinzip für die Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ und *definiere* darauf aufbauend eine eindeutige reelle Zahl e, für die gilt

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Dass diese hier definierte Zahl e tatsächlich mit der (heute so genannten) *Eulerschen Zahl* übereinstimmt, wie sie zum Beispiel von Euler selbst 1748 in der Form $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ „definiert“ wurde — übrigens ohne die Konvergenz der angebenen Reihe zu thematisieren — folgt aus den obigen Überlegungen allerdings noch nicht. (Mehr dazu und auch ein Beweis der Gleichheit findet sich z.B. im Buch von E. Hairer und G. Wanner, *Analysis in historischer Entwicklung*, Springer 2011, auf den Seiten 27-28 [Abschnitt I.2] sowie Seiten 216-217 [Beispiel (2.18) in Kapitel III].)