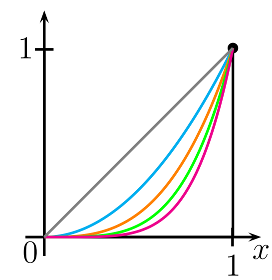
Übungen zu Analysis für LAK (SS 2011) – Blatt 12

§6. Funktionenfolen und -reihen

62 (a) Stelle die Definitionen für punktweise und gleichmäßige Konvergenz gegenüber und erläutere, warum aus der gleichmäßigen Konvergenz stets die punktweise Konvergenz folgt.

(b) Zeige durch Diskussion eines konkreten Beispiels, dass andererseits die punktweise Konvergenz im Allgemeinen nicht die gleichmäßige Konvergenz nach sich zieht.

63 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) := x^n$.



(a) Konvergiert (f_n) punktweise?

(b) Konvergiert (f_n) gleichmäßig?

64 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) := \dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

(a) Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Definiert $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

65 Es sei $q \in]0,1[$ fix. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei die Funktion $f_k \colon [0,q] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) = (-1)^k x^k$ für $x \in [0,q]$.

(a) Zeige, dass $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent ist. Was ist die Grenzfunktion?

[Hinweis: geometrische Reihe!]

(b) Überlege, dass für $0 < t < q$ die Summation in (a) mit der Integration auf dem Intervall $[0,t]$ vertauscht werden kann und führe die Berechnungen aus. Welche bekannte Reihendarstellung aus der VO erhalten wir?