§4 DIFFERENTIATION [WH + Ergänzungen]

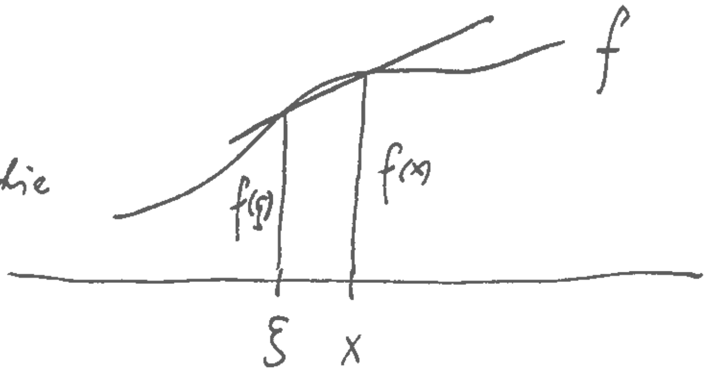
4.1. Differenzierbarkeit und Ableitung

Sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in I$ fix

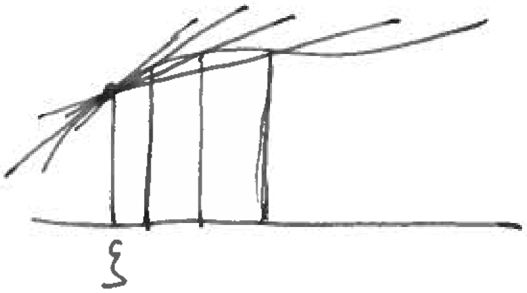
(i) für $x \in I$, $x \neq \xi$ heißt $\dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ Differenzenquotient (bei ξ)

geom. Interpretation:

Anstieg der Sekante, d.i. die Gerade durch die Punkte $(\xi, f(\xi))$ und $(x, f(x))$ im $\mathbb{R}^2$



- für $x \to \xi$ „sollte" die Sekante in eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $(\xi, f(\xi))$ übergehen; Grenzwert $\lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ wäre dann somit der Anstieg der Tangente



(ii) DEF: f heißt differenzierbar im Punkt ξ, wenn

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

existiert; in diesem Fall schreiben wir $f'(\xi)$ für diesen Grenzwert und nennen $f'(\xi)$ die Ableitung von f bei ξ

Bem: es ist $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$,

somit: $\boxed{f \text{ diffbar in } \xi \iff \exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}}$

und in dem Fall ist $f'(\xi) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$.

- falls ξ Randpunkt von I, dann einseitige Grenzwerte nehmen (z.B. rechtsseitiger Limes $x \to \xi+$, wenn $I = [\xi, \eta]$)

[(iii)] eine Umformulierung [wichtig für das 3. Semester!]:

- sei f diffbar in ξ und setze $a := f'(\xi) \in \mathbb{R}$;

dann folgt $\underbrace{\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} - a}_{= \frac{f(\xi+h)-f(\xi)-a\cdot h}{h}} \to 0 \quad (h \to 0)$

[$a \cdot h$ ist lineare Approx. von $h \mapsto f(\xi+h)-f(\xi)$]

- umgekehrt ang. $\exists a \in \mathbb{R}$, sodass $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)-ah}{h} = 0$

wegen $\frac{ah}{h} = a$ gilt dann $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = a$,

d.h. f diffbar in ξ und $a = f'(\xi)$.

Somit gilt:

$$\boxed{f \text{ diffbar in } \xi \iff \exists a \in \mathbb{R}: \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)-ah}{h} = 0}$$

und in diesem Fall ist $f'(\xi) = a$.

(iv) noch eine Umformulierung mittels Fehler $r(h)$:

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ diffbar in } \xi \iff \exists a\in\mathbb{R}\ \exists \delta>0\ \exists r:]-\delta,\delta[\to \mathbb{R} \text{ mit Eig.} \\ \qquad f(\xi+h)-f(\xi) = a\cdot h + r(h) \\ \qquad \text{und } \lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \end{array}}$

und in diesem Fall ist $a = f'(\xi)$.

Beweis: ($\Rightarrow$) setze $r(h) := f(\xi+h) - f(\xi) - ah$, wobei $a := f'(\xi)$; dann (iii) anwenden

($\Leftarrow$) es gilt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)-ah}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, also

gemäß (iii) f diffbar in ξ und $a = f'(\xi)$

$\square$

(v) f heißt diffbar auf I, wenn diffbar in jedem $\xi \in I$

(vi) physikalische Interpretation: I Zeitintervall,

$f(t)$ ... Entfernung eines Massenpunktes zur Zeit t

$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ .... mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall der Länge h

$f'(t)$ .... (Momentan-)Geschwindigkeit zur Zeit t

(vii) wenn $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar (auf ganz I), dann definiert $\xi \mapsto f'(\xi)$ die Ableitung(sfunktion) $f': I \to \mathbb{R}$

4.2. Differentiationsregeln [o.B.; siehe 1. Sem.]

(i) $f,g: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$; $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

$f+g$, $\alpha \cdot f$, $f \cdot g$ diffbar in ξ und

$$\boxed{(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi), \quad (\alpha f)'(\xi) = \alpha \cdot f'(\xi)}$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)}$$ Produktregel oder Leibnizregel

- falls $g(\xi) \neq 0$, dann auch $\frac{f}{g}$ diffbar in ξ und

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) g(\xi) - f(\xi) g'(\xi)}{g(\xi)^2}}$$

(ii) Kettenregel: $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei diffbar in $f(\xi)$ $\Longrightarrow$

$h \circ f: I \to \mathbb{R}$ ist diffbar in ξ und

$$\boxed{(h \circ f)'(\xi) = h'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)}$$

(iii) Umkehrfunktion: $f: I \to J$ streng monoton, bijektiv und stetig [daher $\exists$ stetige Umkehrfkt. $f^{-1}: J \to I$]; falls f diffbar in ξ und $f'(\xi) \neq 0$, dann ist f^{-1} diffbar in $f(\xi)$ und es gilt
$$\boxed{(f^{-1})'(f(\xi)) = \frac{1}{f'(\xi)}}$$

4.3. BEISP: 0) Polynome, rat. Fkt $\rightsquigarrow$ 1. Sem.

1) Exponentialfunktion: zunächst erwähnen wir ein

Lemma: (x_n) Nullfolge mit $x_n \neq 0$ und $x_n > -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e \qquad \left[\text{vgl. Spezialfall } x_n = \tfrac{1}{n}\right]$$

Bew. z.B. in Heuser, Satz 26.1 (im wes. durch Einschachteln $k_n \leq \pm\frac{1}{x_n} < k_n + 1$ mit $k_n \in \mathbb{N}$).

sei $a > 0$;

Stetigkeit von ${}^a\log \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $\frac{{}^a\log(1+x_n)}{x_n} = {}^a\log(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} {}^a\log(e)$,

d.h. $\lim_{x\to 0} \frac{{}^a\log(1+x)}{x} = {}^a\log(e)$ $\qquad (*)$

Beh: $x \mapsto a^x$, $\mathbb{R} \to]0,\infty[$ diffbar auf $\mathbb{R}$ und

$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \log(a)}$; insbesondere $\boxed{(e^x)' = e^x}$

(nun an der Stelle x statt ξ)

Beweis: Differenzenquotient $\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$

genügt also, z.z. $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log(a)$

- falls $a = 1$: richtig, weil $1^h - 1 = 0$ und $\log(1) = 0$
- sei $a \neq 1$, $h \neq 0$: $0 < a^h = \exp(\log(a^h)) = \exp(h \cdot \log(a)) = e^{h\cdot\log(a)} \neq 1$

$\Rightarrow y := a^h - 1 > -1$ und $y \neq 0$; $h \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$, daher

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{{}^a\log(1+y)} \underset{(*)}{=} \frac{1}{{}^a\log(e)} = \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(a)} \cdot {}^a\log(e)}$$

$$\left[y = a^h - 1 \Leftrightarrow 1 + y = a^h \Leftrightarrow {}^a\log(1+y) = h \right]$$

$$= \frac{\log(a)}{{}^a\log(\underbrace{e^{\log(a)}}_{a})} = \frac{\log(a)}{\underbrace{{}^a\log(a)}_{1}} = \log(a)$$

$\square$

2) Logarithmus: $\forall x \in \mathbb{R}: (e^x)' = e^x > 0 \overset{[4.2(iii)]}{\Longrightarrow}$

$\log$ diffbar $]0,\infty[\to \mathbb{R}$ und $\forall x > 0$

$$(\log)'(x) = \frac{1}{e^{\log(x)}} = \frac{1}{x} \quad [\ g = \log(x),\ f = \exp \text{ in } 4.2(iii)$$

3) allgemeine Potenzen (Wurzeln): $\rho \in \mathbb{R}$ fix, $x \mapsto x^\rho$ als Funktion $]0,\infty[\to]0,\infty[$

$$(x^\rho)' = \left(e^{\log(x^\rho)}\right)' = \left(e^{\rho \cdot \log(x)}\right)' \underset{[\text{Kettenregel}]}{=} e^{\overbrace{\rho \cdot \log(x)}^{x^\rho}} \cdot (\rho \cdot \log(x))' =$$

$$= x^\rho \cdot \rho \cdot \frac{1}{x} = \rho \cdot x^{\rho - 1}$$

= 2.5.2011 =

4.4. SATZ: $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, dann gilt:

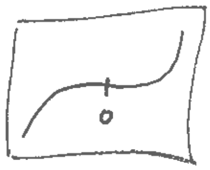
f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0.

Beweis als Ü-Aufgabe 36.

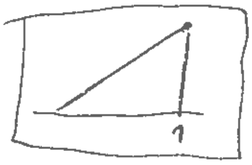
4.5. Lokales Extremum vs. kritische Stelle [Bew. 1. Sem.]

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\xi \in]a,b[$ lokales Extremum, d.h. lokales Minimum bzw. Maximum (d.h. $\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(\xi) \cap [a,b]$ gilt $f(x) \geq f(\xi)$ bzw. $f(x) \leq f(\xi)$), f diffbar in ξ, dann ist ξ kritische Stelle, d.h. $f'(\xi) = 0$.

- Umkehrung gilt nicht: z.B. $f(x) = x^3$, $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f'(0) = 0$, aber $\forall t > 0$: $f(-t) < 0 < f(t)$



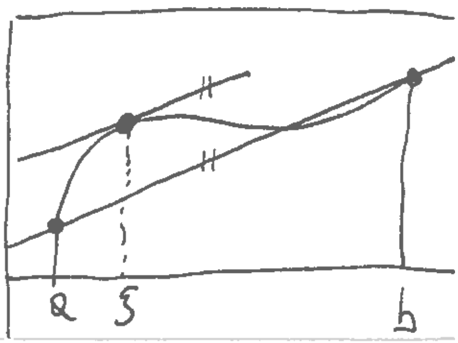
- für Extremum am Rand muss nicht $f'(\xi) = 0$ gelten. z.B. $f(x) = x$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $\xi = 1$ ist Maximum, aber $f'(1) = 1 \neq 0$



4.6. Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Bew [1. Sem]

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar

$$\Rightarrow \exists \xi \in]a,b[: \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Spezialfall (Satz von Rolle):

$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in]a,b[: f'(\xi) = 0$

4.7. Anwendungen des MWS

1) $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar und $f' = 0 \Rightarrow f$ ist konstant

Bew: sei $x_0 \in]a,b[$ beliebig, fest gewählt

sei $x \in]a,b[, x \neq x_0$, $I := \begin{cases} [x, x_0], & \text{falls } x < x_0, \\ [x_0, x], & \text{falls } x > x_0. \end{cases}$

$f|_I$ (stetig und) diffbar $\overset{[MWS]}{\Longrightarrow} \exists \xi \in \mathring{I}$ ... offenes Intervall, d.h. ohne Randpunkte:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) = 0,$$

d.h. $f(x) = f(x_0)$ $\forall x \in]a,b[$, d.h. f konstant □

2) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar und $f': [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\Rightarrow f$ ist <u>Lipschitz-stetig</u>, d.h.

$$\exists L \geq 0 : \forall x,y \in [a,b] : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

(auch: dehnungsbeschränkt)

Bew: sei $L := \sup\limits_{t \in [a,b]} |f'(t)|$; $L < \infty$ lt. Voraussetzung

$x, y \in [a,b], x \neq y \overset{[MWS]}{\Longrightarrow} \exists \xi$ zwischen x und y:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi) \cdot (x - y)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq L} \cdot |x - y| \leq L \cdot |x - y|$$

□

3) Monotonie: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf $]a,b[$

- $f' \geq 0 \Rightarrow f$ mon. wachsend
- $f' > 0 \Rightarrow f$ streng mon. wachsend
- $f' \leq 0 \Rightarrow f$ mon. fallend
- $f' < 0 \Rightarrow f$ str. mon. fallend

Bew. für erste Beh: $a \leq x_1 < x_2 \leq b \overset{[MWS]}{\Longrightarrow} \exists \xi \in]x_1, x_2[$:

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \qquad \square$$

4.8. SATZ (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema im Inneren eines Intervalls)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar, $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$ (krit. Stelle);

sei überdies f zweimal diffbar auf $]a,b[$, d.h.

$f':]a,b[\to \mathbb{R}$ ist ebenfalls diffbar. Dann gilt:

(i) $f''(\xi) < 0 \Rightarrow f$ hat lok. Max. in ξ

(ii) $f''(\xi) > 0 \Rightarrow f$ hat lok. Min. in ξ

Beweis für (i): es ist $0 > f''(\xi) = \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$,
[(ii) analog]

d.h. für x nahe ξ ist stets $\dfrac{f'(x) - \boxed{f'(\xi)}^{=0 \text{ lt. Vor.}}}{x - \xi} < 0$

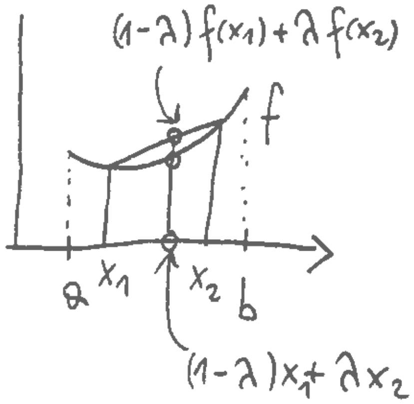
- $x < \xi \Rightarrow f'(x) > 0$
- $x > \xi \Rightarrow f'(x) < 0$

$\Big\}$ [4.7.3)] f links von ξ steigend und rechts von ξ fallend

$\Rightarrow$ für x nahe ξ: $f(x) \leq f(\xi)$ $\square$

4.9. Konvexität und 2. Ableitung

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt konvex (bzw. konkav), wenn gilt:



für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$, $\lambda \in]0,1[$

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

[bzw. $\geq$]

konvex.... Sekante oberhalb des Graphen; „f nach unten gekrümmt"
[d.h. Teilmenge oberhalb des Graphen ist konvex im $\mathbb{R}^2$]

- falls f zweimal differbar auf $]a,b[$, dann gilt:

(i) $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ konvex

(ii) $f'' \leq 0 \Rightarrow f$ konkav [o.B.; 1. Sem.]

Bem: ξ heißt Wendepunkt von f, wenn $f''(\xi) = 0$ und $f''(x) > 0$ für $x < \xi$, $f''(x) < 0$ für $x > \xi$ (oder umgekehrt), d.h. im Wendepunkt wechselt Funktionsgraph von konvexer zu konkaver Krümmung (oder umgekehrt)

4.10. Regel(n) von de l'Hospital [Bew. 1. Sem]

$f,g:]a,b[\to \mathbb{R}$ diffbar, $g'(x) \neq 0 \ \forall x$ und es gelte

(a) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$

oder

(b) $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$ oder $-\infty$ [interessant, falls $f(x) \to \infty$]

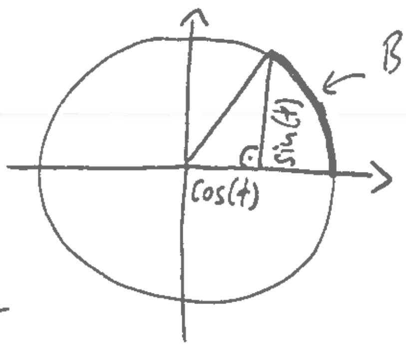
Dann folgt $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ [auch im uneig. Sinn]

Analog für $x \to b-$ bzw. $a = -\infty$ bzw. $b = +\infty$.

<u>Beispiel:</u> $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x^{\frac{1}{100}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{100} \cdot x^{\frac{1}{100}-1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{100}{x^{1/100}} = 0$

4.11. Winkelfunktionen

„naive Definition":



Bogenlänge t .... ABER: Länge von Kurven (noch) nicht erklärt

⇝ viele Eigenschaften heuristisch abgeleitet

<u>Axiomatischer Zugang:</u> wir nehmen an, es gebe <u>stetige</u> Funktionen sin und cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

(W1) $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(W2) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

(W3) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

(W4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (W5) $\cos(0) = 1$

Existenz solcher Funktionen wird später bewiesen! (mittels Potenzreihen)

Folgerungen: • $\sin 0 = 0$, denn $\sin(0) = \sin(-0) \overset{(W1)}{=} -\sin(0)$

• $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, denn $1 \overset{(W5)}{=} \cos(0) = \cos(x-x) \overset{(W3)}{=}$

$$= \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) \overset{(W1)}{=}$$

$$= \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

• Ü-Aufgabe: $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ (*)

$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ (**)

• sin diffbar und $\boxed{\sin'(x) = \cos x}$:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \overset{(*)}{=} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\sin(\frac{h}{2})}{h} = \underbrace{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\cos(0)=1 \text{ [Stetigkeit]}} \cdot \overbrace{\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}}^{\to 1 \; (W4)} \to \cos(x) \quad (h \to 0)$$

• cos diffbar und $\boxed{\cos'(x) = -\sin x}$ [Ü-Aufgabe]

• $\forall x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \le 1$ und $|\cos x| \le 1$,

denn $1 = \underbrace{\cos^2 x}_{\ge 0} + \underbrace{\sin^2 x}_{\ge 0} \Rightarrow 0 \le \cos^2 x \le 1$, $0 \le \sin^2 x \le 1$

• „verfeinerte Kurvendiskussion" ergibt: cos besitzt eine kleinste positive Nullstelle τ [vgl. Heuser §57]

$\boxed{\text{DEF: } \pi := 2\cdot\tau}$ ... $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $\cos(t) > 0$ $(0 \le t < \frac{\pi}{2})$

wegen $\sin'(t) = \cos(t) > 0$ also sin str. wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2}]$

=9.5.2011=