§6 FUNKTIONENFOLGEN UND -REIHEN

6.1. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ [kann eig. beliebige Menge sein] und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Wir nennen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine <u>Funktionenfolge</u> (auf D).

(1) $\forall x \in D$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$; sei $f : D \to \mathbb{R}$

(f_n) heißt <u>punktweise konvergent</u> gegen f, wenn

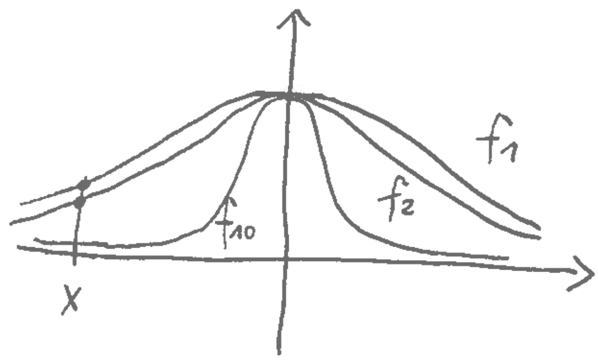
$\forall x \in D : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konv. gegen $f(x)$ (in $\mathbb{R}$),

d.h. $\boxed{\forall x \in D : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$,

d.h. $\boxed{\forall x \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \underbrace{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\text{d.h. } f_n(x) \in U_\varepsilon(f(x))}}$ (Δ)

N hängt i.A. von x und von ε ab!

<u>Beisp</u>: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$



- $x = 0$: $f_n(0) = 1 \;\; \forall n$; daher $f_n(0) \to 1$
- $x \neq 0$: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2} \to 0 \;\; (n \to \infty)$

daher $f_n \to f$ punktweise $(n\to\infty)$, wobei $f(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

(2) (f_n) heißt <u>gleichmäßig konvergent</u> gegen f, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ \underbrace{\forall x\in D: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon}_{\Downarrow}$$

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$$

N hängt <u>nicht</u> <u>von x ab</u>!

[Weierstraß 1861]

d.h. $f_n\to f$ gleichmäßig $(n\to\infty)$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (*)$$

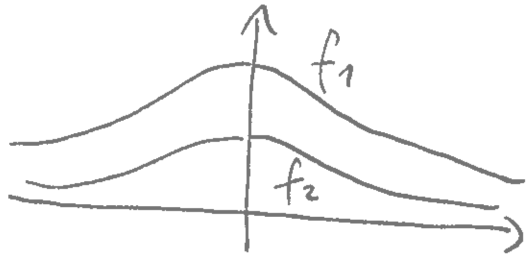
[egal, ob $\leq$ oder $<$, weil $\forall\varepsilon>0$ ...]

Schreibweise für $\sup_{x\in D}|g(x)| =: \|g\|_\infty$, wenn $g: D\to\mathbb{R}$,

denn sieht (*) besonders einfach aus [wie Konv. von reellen Folgen, nur $\|.\|_\infty$ statt $|.|$]

$$\boxed{f_n\to f \text{ glm. } (n\to\infty) \iff \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \|f_n-f\|_\infty<\varepsilon}$$

<u>Beisp:</u> $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$



$f_n\to 0$ glm. $(n\to\infty)$, denn $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$|f_n(x)-0|=|f_n(x)|=\frac{1}{n+x^2}\leq\frac{1}{n} \text{ ... unabh. von } x \Rightarrow$$

$$\|f_n-\underset{\text{Nullfkt.}}{0}\|_\infty=\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|\leq\frac{1}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$$

+C

(3) $f_n \to f$ glm. $\Rightarrow$ $f_n \to f$ pktw. [folgt direkt aus Def.]

gleichmäßige Konvergenz ist stärker als punktweise Konvergenz

(4) Beisp: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in (1), d.h. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$;

(f_n) konv. pktw. gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$;

ABER: (f_n) konv. nicht glm.:

indirekt: ang. (f_n) wäre glm. konv. gegen Fkt. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ (f_n) auch pktw. konv. gegen g;

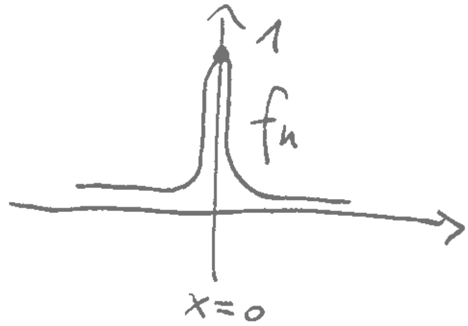
wissen aus (1): $f_n \to f$ pktw.; daher $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, d.h. $f = g$;

somit $f_n \to f$ glm. $(n \to \infty)$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, aber für $n \in \mathbb{N}$ beliebig, fest

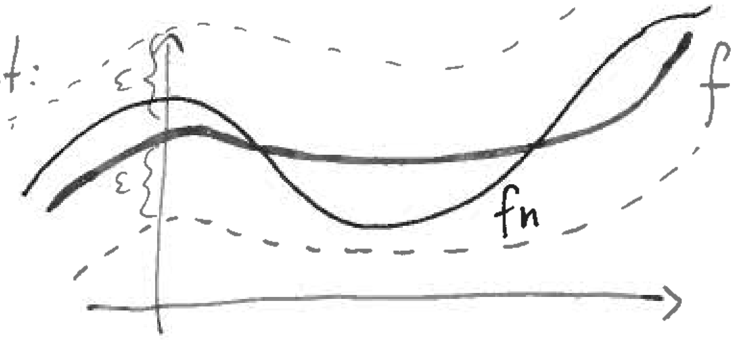
ist immer $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \underset{\left(x = \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\geq} \left|f_n\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - \underbrace{f\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{0}\right| = \frac{1}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\|f_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{2}\ \forall n$ $\lightning$



(5) ε-Schlauch um f: Bedingung $\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

bedeutet:



Graph von f_n muss zur Gänze im ε-Schlauch um den Graphen von f enthalten sein

d.h. glm. Konv. verlangt, dass für jedes $\varepsilon>0$ die (Graphen der) Funktionenfolge (f_n) schließlich im ε-Schlauch um (den Graphen) von f liegen

<u>6.2. SATZ:</u> Sei $\forall n\in\mathbb{N}$ die Funktion $f_n: D\to\mathbb{R}$ stetig. Falls $f_n\to f$ gleichmäßig $(n\to\infty)$, dann ist f auch stetig.

(„gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig.")

Beweis: [typischer „ε-Drittel-Beweis"]

sei $x\in D$ beliebig; z.z.: f ist stetig bei x

Sei $\varepsilon>0$: • $f_n\to f$ glm $\Rightarrow \exists N\ \forall \xi\in D: |f_N(\xi)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{3}$

• f_N stetig $\Rightarrow \exists\delta>0: |x'-x|<\delta \Rightarrow |f_N(x)-f_N(x')|<\frac{\varepsilon}{3}$

Somit gilt $\forall x'\in D$ mit $|x'-x|<\delta$:

$$|f(x)-f(x')|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x')|+|f_N(x')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \quad \square$$

6.3. BEM: (i) $f_n \to f$ pktw, f_n stetig $\overset{\text{i.A.}}{\not\Rightarrow}$ f stetig

(siehe Beisp. 6.1.(1))

(ii) $f_n \to f$ pktw, f_n stetig: f unstetig $\Rightarrow$ (f_n) nicht glm. konv.

[folgt aus 6.2]

– hätten in Beisp. 6.1.(4) auch damit argumentieren können

6.4. SATZ (von Weierstraß)

Seien $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ konvergent (in $\mathbb{R}$).

Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig (und punktweise absolut).

Beweis: $\forall x \in D\ \forall k \in \mathbb{N}$ gilt $|f_k(x)| \leq \overbrace{\|f_k\|_\infty}^{=\sup_{z\in D}|f_k(z)|}$, daher

ist $\sum \|f_k\|_\infty$ stets eine konv. Majorante für $\sum |f_k(x)|$

$\Rightarrow$ $\forall x \in D$: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ist absolut konvergent.

Setze $F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ $\forall x \in D$ und $F_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$

Beh: $F_n \to F$ glm. $(n \to \infty)$

sei $\varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon$

[weil $\sum \|f_k\|_\infty$ konv.]

sei $x \in D$ beliebig, $n \geq N$:

$$|F(x) - F_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \varepsilon$$

[abs. konv.]

unabh. von x

nehmen sup über $x \in D \Rightarrow \|F - F_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$,

d.h. $F_n \to F$ glm $(n \to \infty)$ $\square$

<u>6.5. BEISP:</u> 1) $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \frac{\cos(kx)}{k^2}$; $\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow \sum \|f_k\|_\infty$ konv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ glm. konv.

2) $R > 0$ beliebig, $D = [-R, R]$, $f_k : D \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

es ist $\|f_k\|_\infty = \frac{R^k}{k!}$, somit $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ konv. $[= e^R]$

wissen aus 5.20.1): $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ punktweise Konv.

nun wissen wir auch: glm. Konv. für $x \in [-R, R]$

6.6. SATZ (Vertauschung von Limes und Integral)

Sei $\forall n \in \mathbb{N}$ die Fkt. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und (f_n) glm. konv. gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\int_a^b \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Beweis: Satz 6.2: f stetig; daher f integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le (b-a)\cdot \|f - f_n\|_\infty \to 0$$

$(n\to\infty)$

$\square$

6.7. BEISP:

gemäß Beisp. 6.5.1) ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ glm. konv.

$$\forall t > 0 : \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx \overset{[6.6]}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underbrace{\int_0^t \cos(kx)\,dx}_{\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^t = \frac{\sin(kt)}{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k^3}$$

6.8. SATZ (Vertauschung von Limes und Differentiation)

Sei $\forall n \in \mathbb{N}$ die Fkt. $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar und es gelte:

(a) $f_n \to f$ pktw. $(n \to \infty)$

(b) $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ist glm. konv..

Dann gilt: f ist diffbar und

$$\forall x \in [a,b]: \quad f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

(Insbesondere ist somit f' auch stetig, weil glm. Limes der f_n')

Beweis: setze $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$ (OK wegen (b)); g stetig [6.2.];

sei $x \in [a,b]$ beliebig: $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$ [HSDI]

$$\begin{array}{cccccc} (n\to\infty) & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \ [6.6] \\ & f(x) & & f(a) & + & \int_a^x g(t)\,dt \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(a) + \underbrace{\int_a^x g(t)\,dt}_{\text{Stammfkt. von } g} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g(x)$$

□

– dieser Satz wird wichtig sein für sogen. Potenzreihen, das sind Funktionenreihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k$.