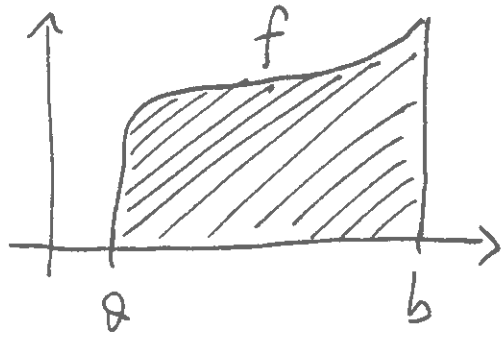
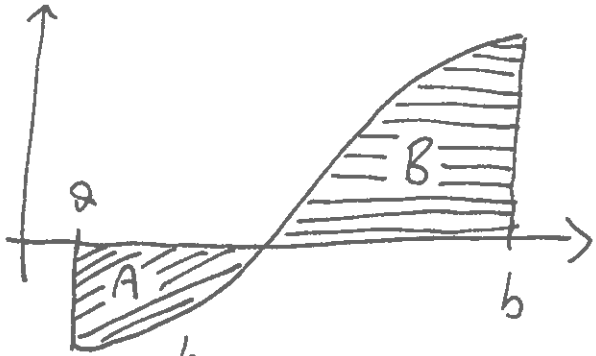
§5. INTEGRATION

5.0. Grundidee: Fläche „unter dem Graphen"

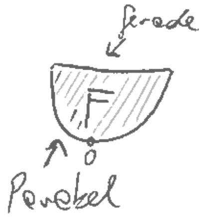




$\int_a^b f(x)dx$ = Fläche $\qquad\qquad \int_a^b f(x)dx = B - A$

Flächeninhalt noch nicht definiert ($\rightsquigarrow$ Maßtheorie), daher definieren wir das Integral analytisch und interpretieren dann $\int_a^b f(x)dx$ geeignet.

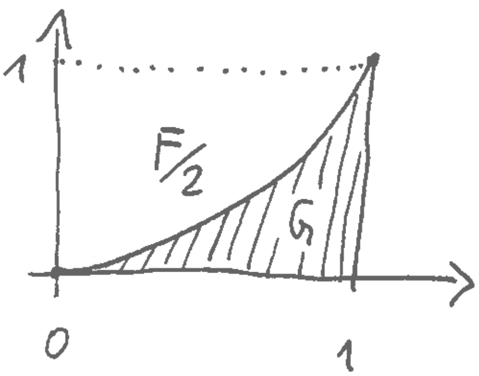
Klassisches Beispiel:



Archimedes: $F = \frac{4}{3} \cdot A$
[283–212 v. Chr.]

(durch eingeschr. Polygone)

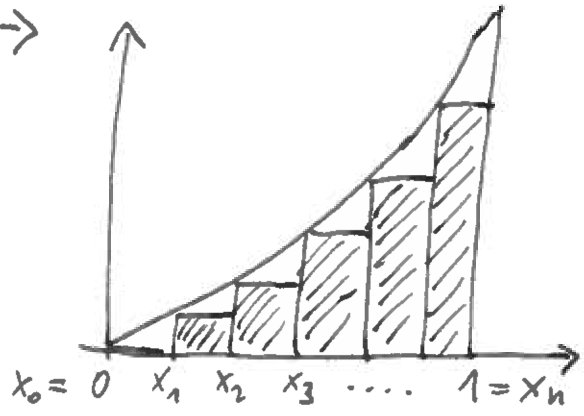
Fermat 1636: Summenapproximation durch Rechtecksflächen



$\frac{F}{2} = 1 - G$ und berechne G näherungsweise durch Rechtecksflächen

$f(x) = x^2$

$f : [0,1]$



$(x_1 - x_0) \cdot f(x_0)$
$+$
$(x_2 - x_1) \cdot f(x_1)$
$+$
$\vdots$
$+$
$(x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$

für $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ist $f(x_{j-1}) \leq f(x) \leq f(x_j) \Rightarrow$

$$U_n := \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \leq G \leq \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) =: O_n$$

einfache Zerlegung ist $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = 1$

$$\Rightarrow \quad U_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{(j-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n} (j-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{l=1}^{n-1} l^2 = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

[Ü-Aufg. 1. Sem: $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$]

ebenso $$O_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für $n \to \infty$:

$$\left.\begin{aligned} U_n &= \frac{(1-\frac{1}{n}) \cdot 1 \cdot (2 - \frac{1}{n})}{6} \to \frac{1}{3} \\ O_n &= \frac{1 \cdot (1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \to \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{G = \frac{1}{3}} \Rightarrow \underline{F = 2(1-G) = \frac{4}{3}}$$

[stimmt mit Archimedes überein, weil $A = 1$]

5.1. Vorbereitungen

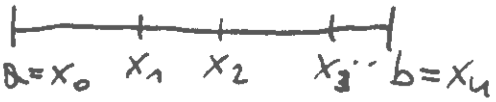
sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt; wir definieren

(a) eine <u>Zerlegung</u> von $[a,b]$, d.i. eine Menge

$$Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},\ n \in \mathbb{N} \text{ mit } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

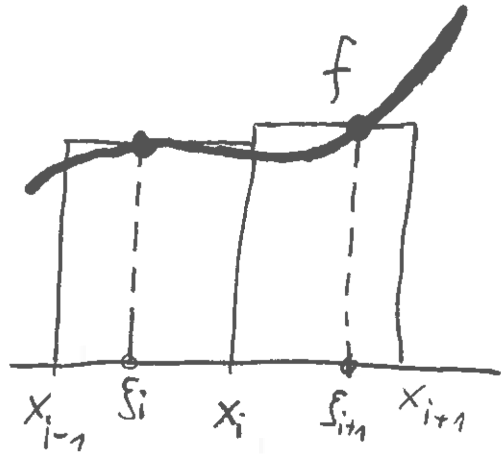
$\mu(Z) := \max(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1})$ ..... größte Länge der Teilint.

heißt <u>Feinheit</u> der Zerlegung Z



(b) für beliebige $\xi_1, \dots, \xi_n$ mit $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ heißt

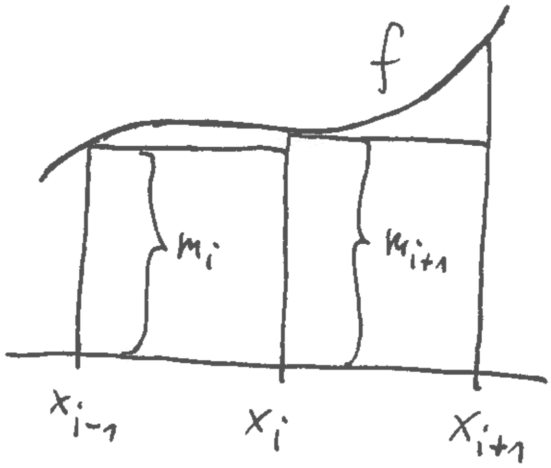
$$R(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$



<u>Riemann-Summe</u> (zu $(Z, (\xi_1, \dots, \xi_n))$)

(c) setze $m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$ $(i = 1, \dots, n)$, dann heißt

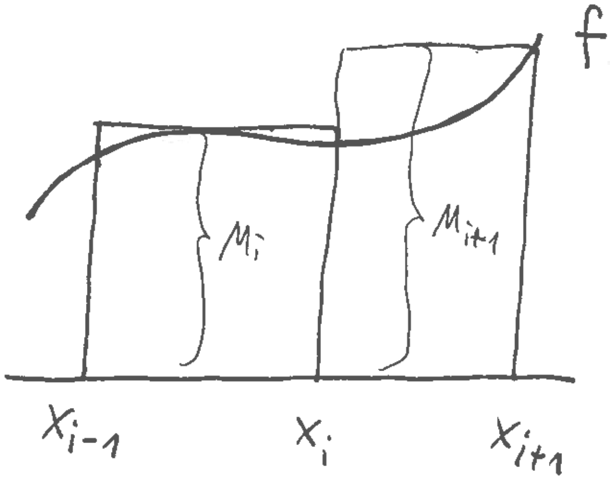
$$U(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$



<u>Untersumme</u> (zu Z)

(d) setze $M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$ $(i = 1, \dots, n)$, dann heißt

$$O(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

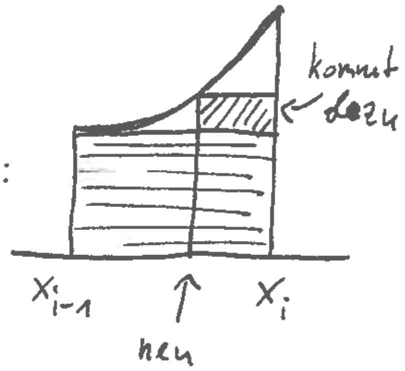


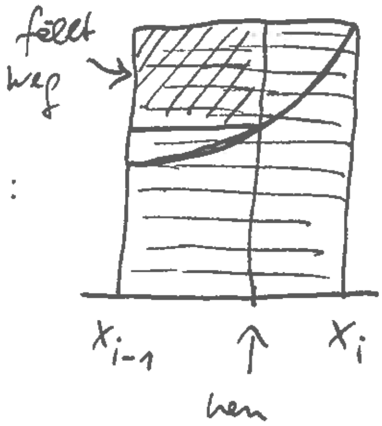
<u>Obersumme</u> (zu Z)

<u>Eigenschaften:</u> (i) $U(f, Z) \le R(f, Z) \le O(f, Z)$

(ii) $Z_1 \subseteq Z_2$, Z_2 ist <u>feiner</u> als Z_1 $\Rightarrow$ $U(f, Z_1) \le U(f, Z_2) \boxed{\le}$
$\boxed{\le} O(f, Z_2) \le O(f, Z_1)$

Illustration zu (ii):

U: 

O: 

(iii) Z_1, Z_2 bel. Zerlegungen, $Z := Z_1 \cup Z_2$ <u>gemeinsame Verfeinerung</u>

$$\Rightarrow \quad U(f,Z_1) \le U(f,Z) \le O(f,Z) \le O(f,Z_2)$$

(iv) Folgerung von (iii): $\sup\limits_{Z_1 \text{ Zerl.}} U(f,Z_1) \le \inf\limits_{Z_2 \text{ Zerl}} O(f,Z_2)$

$$\left[\text{d.h. } \sup_{Z} U(f,Z) \le \inf_{Z} O(f,Z)\right]$$

DEF: [Darboux 1875]

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_{Z} U(f,Z) \;\ldots\; \text{(Darboux-) } \underline{\text{Unterintegral}}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_{Z} O(f,Z) \;\ldots\; \text{(Darboux-) } \underline{\text{Oberintegral}}$$

Wegen (iv) gilt immer:

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx}$$

5.2. DEF: Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls Unter- und Oberintegral gleich sind. In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$ (Riemann-)Integral von f

5.3. Integrierbarkeitskriterien: sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt

(i) f integrierbar $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists Z: O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$

[Jänich: Toleranz der Zange]

Beweis: $\Rightarrow$ zu $\frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists\ Z_1, Z_2$ mit

$$(*)\begin{cases} 0\le O(f,Z_1)-\overline{\int_a^b} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} & \text{und}\\ 0\le \underline{\int_a^b} f(x)dx - U(f,Z_2) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

setze $Z := Z_1\cup Z_2$ (gem. Verf.), $Z\supseteq Z_1$, $Z\supseteq Z_2 \Rightarrow$

[(*): Add. der Ungl.]

$$0\le O(f,Z)-U(f,Z)\le O(f,Z_1)-U(f,Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists Z:\ 0\le \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)}_{\text{muss also } =0 \text{ sein}} \le O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$ $\square$

(ii) f integrierbar $\iff \exists \lim\limits_{\mu(Z)\to 0} R(f,Z)$ [bel. Zwischenvektoren $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ zu Z]

In diesem Fall ist $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\mu(Z)\to 0} R(f,Z)}$

[urspr. Def. Riemanns 1854]

Beweis: (⇒) „klar", weil $U(f,Z) \le R(f,Z) \le O(f,Z)$.
[techn. Details siehe z.B. Heuser Satz 83.1]

(⇐) sei $s := \lim_{\mu(Z)\to 0} R(f,Z)$; zu $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, sodass

$\forall Z$ [und bel. $\xi_1, \dots, \xi_n$] mit $\mu(Z) < \delta$ gilt: $s - \frac{\varepsilon}{2} < R(f,Z) < s + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow s - \frac{\varepsilon}{2} \le U(f,Z) \le R(f,Z) \le O(f,Z) < s + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon \overset{(i)}{\Rightarrow} f \text{ integrierbar}$$ □

= 16.5.2011 =

BEISP: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ haben in 5.0 (Fermats Approx.) eigentlich gezeigt, dass für $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ $(n \in \mathbb{N})$ stets $U_n = U(f, Z_n) \to \frac{1}{3}$, $O_n = O(f, Z_n) \to \frac{1}{3}$ $(n \to \infty)$; daher $O_n - U_n \to 0$ $(n \to \infty)$, also f integrierbar und

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

– um mehr Beispiele rechnen zu können, ist es geschickter, vorher einige Eigenschaften des Integrals zu studieren

5.4. SATZ: Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b f(x)\,dx \quad \dots \text{Linearität}$$

(ii) $$f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \quad \dots \text{Monotonie}$$

(iii) $$\underbrace{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}_{\text{Dreiecksungleichung für Integrale}} \leq (b-a)\cdot \sup_{y\in[a,b]} |f(y)|$$

Beweis: (i) Linearität der Riemann-Summen ergibt im Limes Lin. des Integrals

(ii) $\forall Z: \ U(f,Z) \leq U(g,Z) \Rightarrow \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g = \int_a^b g$

(iii) wegen $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ folgt mit (ii)

$$\underbrace{-\int_a^b |f|}_{-I} \leq \underbrace{\int_a^b f}_{z} \leq \underbrace{\int_a^b |f|}_{I} \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| = |z| \leq I = \int_a^b |f|;$$

wegen $|f(x)| \leq \underbrace{\sup_{y\in[a,b]} |f(y)|}_{=:M} \Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b M\,dx =$

$$= M\cdot\int_a^b 1\,dx = M\cdot(b-a)$$

□

5.5. Teilintervalle und Orientierung:

(i) für $a < c < b$ gilt: f integr. auf $[a,b] \Leftrightarrow$ f integr. auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$

In diesem Fall gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ [o.B.]

(ii) wir setzen für $a < b$: $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

und $\int_a^a f(x)\,dx := 0$

5.6. SATZ: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann gilt:

(i) f monoton $\Rightarrow$ f integrierbar

(ii) f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

(iii) f beschränkt und stetig bis auf endlich viele Stellen $\Rightarrow$ f integrierbar

Beweis: (i) sei f mon. wachsend (anderer Fall analog)

$\forall x \in [a,b]$ ist $a \leq x \leq b \overset{\text{Monotonie}}{\Longrightarrow} f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $\forall x$,

also f beschränkt

für Zerl. Z_n mit $a = x_0$, $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$ $(j = 1, \dots, n)$
$[x_n = b]$

gilt wegen $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$, $f(x_{j-1}) \leq f(x) \leq f(x_j)$ $\forall x \in [x_{j-1}, x_j]$ stets

$$O(f, Z_n) - U(f, Z_n) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot \frac{1}{n} = \left[\begin{array}{l}\text{Telesk.}\\ \text{summe}\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(\cancel{f(x_1)} - f(x_0) + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \ldots + f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})} \right) =$$

$$= \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

daher ist Int.krit. 5.3 (i) erfüllt

[zu $\varepsilon > 0$ wähle n groß genug ...]

(ii) 3.4.2.: f beschränkt; 3.4.3.: f glm. stetig, d.h.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

zu $\varepsilon > 0$ sei Z Zerl. mit $\mu(Z) < \delta$; $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$

$x_j - x_{j-1} < \delta$, daher $\forall x,y \in [x_{j-1}, x_j]: |x-y| < \delta$ und

somit $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Rightarrow j = 1, \dots, n: \underset{\substack{\uparrow \\ \sup}}{M_j} - \underset{\substack{\uparrow \\ \inf}}{m_j} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ ... auf $[x_{j-1}, x_j]$

$$\Rightarrow O(f,Z) - U(f,Z) \leq \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j) \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

[Teleskopsumme]

$\Rightarrow$ Int.krit. 5.3.(i) erfüllt.

(iii) → Ü sei $|f(x)| \leq M\ \forall x \in [a,b]$ (Beschränktheit von f)

seien $u_1, \dots, u_p$ die Unstetigkeitsstellen von f in $[a,b]$

sei $\varepsilon > 0$; $I_k :=]u_k - \frac{\varepsilon}{2p}, u_k + \frac{\varepsilon}{2p}[$ ... Schutzintervall um u_k ($k = 1, \dots, p$)

$I := [a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{p} I_k$ .... Verein. endl. vieler abg. Intervalle $\bigcup_{l=1}^{r} J_l$

$\forall l$: f stetig auf J_l, also integrierbar auf J_l

$\forall \ell$: $\exists$ Zerl. Z_ℓ: $O(f, Z_\ell) - U(f, Z_\ell) < \frac{\varepsilon}{r}$

$Z := \bigcup_{\ell=1}^{r} Z_\ell \cup \bigcup_{k=1}^{p} \{\mu_k - \frac{\varepsilon}{2p}, \mu_k + \frac{\varepsilon}{2p}\}$ ist Zerl. von $[a,b]$ mit:

$$O(f,Z) - U(f,Z) \leq \sum_{\ell=1}^{r} \left(O(f,Z_\ell) - U(f,Z_\ell)\right) + \underbrace{2M}_{\text{Schwankung von } f \text{ auf } I_k} \cdot p \cdot \overbrace{\frac{\varepsilon}{p}}^{\text{Länge von } I_k}$$

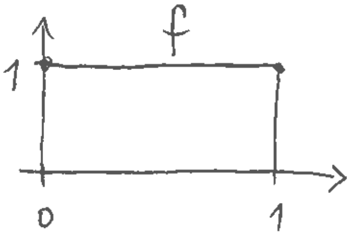
$$< r \cdot \frac{\varepsilon}{r} + 2M\varepsilon = (1+2M) \cdot \varepsilon$$

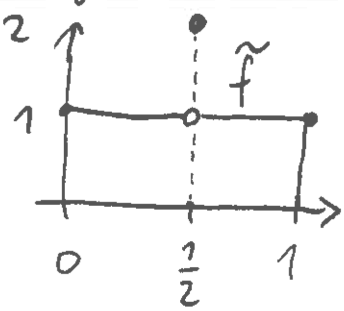
$\Rightarrow$ Intkrit. 5.3 (i) erfüllt $\square$

5.7. BEM: ähnlich wie in 5.6 (iii) sieht man:

f integrierbar und $\tilde{f} = f$ bis auf endlich viele Stellen

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ integr. und $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$

z. B. 



$\int_0^1 f = \int_0^1 \tilde{f}$

Abänderung einer integr. Fkt. an endlich vielen Stellen ändert den Wert des Integrals nicht!

⚠ Wir haben noch immer keine wirklich praktischen Mittel zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$

5.8. DEF: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ Funktion. Sei $F: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. F ist eine <u>Stammfunktion</u> zu f (auf I), wenn gilt $F' = f$.

5.9. BEM: (i) F Stammfkt. zu f $\Rightarrow$

$\forall c \in \mathbb{R}$: $\tilde{F}(x) := F(x) + c$ ebenfalls Stammfkt. zu f

(klar, weil $\tilde{F}$ ebenf. diffbar und $\tilde{F}' = (F+c)' = F' = f$)

(ii) F_1, F_2 Stammfkt. von f auf dem Intervall I

$\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ ist konstant [Bew. Üb]

5.10. Hauptsatz der Diff.- und Int.rechnung (HSDI)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

(i) $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b]$: $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

ist eine Stammfunktion von f.

(ii) Ist F eine beliebige Stammfkt. zu f auf $[a,b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

(können auch schreiben: $\forall x \in [a,b]$: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$)

Beweis: (i) sei $h \neq 0$; $x, x+h \in [a,b]$

$$\left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) \right| = \frac{1}{|h|} \cdot \Big| \underbrace{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt}_{\int_x^{x+h} f(t)\,dt \ [5.5.(i)]} - h \cdot f(x) \Big| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt - h \cdot f(x) \right| = \left[\int_x^{x+h} f(x)\,dt = f(x) \cdot \int_x^{x+h} 1\,dt = f(x) \cdot h \right]$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt \right| =: (*)$$

zu $\varepsilon > 0$ beliebig $\exists \delta > 0 : |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$

sei nun $|h| < \delta \Rightarrow \sup \{ |f(t) - f(x)| \mid |t - x| < |h| \} \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow (*) \leq \frac{1}{|h|} \cdot \varepsilon \cdot \left| \int_x^{x+h} 1\,dt \right| = \frac{\varepsilon \cdot |h|}{|h|} = \varepsilon,$$

d.h. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \Rightarrow F$ diff'bar und $F'(x) = f(x)$

(ii) gemäß (i) ist $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfkt.

5.9.(ii) $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a,b] : F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$

$$\Rightarrow F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c = 0 + c = c$$

$$\Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + F(a)$$, also die Beh. $\square$

5.11. BEISP: 1) $F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$ ist Stammfkt. zu $f(x) = x^2$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$ [vgl. 5.0, 5.3]

2) $\sin' = \cos \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 =$

$= 1 - 0 = 1$

5.12. BEM: (i) Schreibweisen für HSDI auch

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)}_{\text{„Diff. von Int. = Id"}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)}_{\text{„Int. von Diff. = Id., abgesehen von Konst."}}$$

– in gewisser Hinsicht sind also Diff. und Int. Umkehrungen voneinander; aber Vorsicht! genaue Bedeutung nur gemäß HSDI

(ii) HSDI gilt auch allgemeiner: f integrierbar $\Rightarrow$

(a) $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ in jedem Stetigkeitspkt. von f diffbar mit Abl. $= f(x)$

(b) F Stammfkt. zu $f \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ [Heuser: 86.1 und 79.1.]

= 23.5.2011 =

5.13. SATZ (Partielle Integration)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar (d.h. f', g' stetig),

dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Beweis: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \Rightarrow$

$$\int_a^b f' g + \int_a^b f\cdot g' = \int_a^b (f' g + f\cdot g') = \int_a^b (f\cdot g)'(x)\, dx \underset{\text{HS)I}}{=} (f\cdot g)\Big|_a^b$$

$\square$

5.14. BEISP: 1) $\int_0^b x\, e^{-x}\, dx = x\cdot(-e^{-x})\Big|_0^b - \int_0^b 1\cdot(-e^{-x})\, dx =$

$f'(x)$ … Stammfkt. leicht zu erraten: $-e^{-x}$

$g(x)$ … günstig, weil g' konstant $=1$

$$= -b e^{-b} + 0\cdot e^{-0} + \int_0^b e^{-x}\, dx = -b e^{-b} - e^{-x}\Big|_0^b =$$

Stammfkt. $-e^{-x}$

$$= -b e^{-b} - e^{-b} + e^{-0} = 1 - e^{-b}(b+1)$$

2) $\int_1^e \log(x)\, dx = [\text{Trick!}] = \int_1^e 1\cdot \log(x)\, dx =$

$\log = 1\cdot\log$

$g(x)$ … Abl. leicht

$f'(x)$ … Stammfkt. leicht

$$= x\cdot\log(x)\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\, dx = e\underbrace{\log(e)}_{1} - 1\cdot\underbrace{\log(1)}_{0} - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$$

5.15. SATZ (Substitutionsregel)

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit $\varphi(a), \varphi(b) \in I$ $[\Rightarrow \varphi([a,b]) \subseteq I]$, dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis: sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfkt. von f $\Rightarrow$

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \overset{HSDI}{\Longrightarrow}$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,dt = (F\circ\varphi)(t)\Big|_a^b =$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \underset{[\text{nochmal HSDI}]}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

$\square$

5.16. BEISP: 1) $\displaystyle\int_0^{b^2/4} e^{-2\sqrt{t}}\,dt = \Big[$ Idee: $\varphi(t) := 2\sqrt{t}$, $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ .... Versuche, den „lästigen" Term zu vereinfachen $\Big]$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{b^2/4} \underbrace{e^{-2\sqrt{t}}\cdot 2\sqrt{t}}_{f(\varphi(t))}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}}_{\varphi'(t)}\,dt = \frac{1}{2}\int_{0\,[=\varphi(0)]}^{b\,[=\varphi(\frac{b^2}{4})]} x e^{-x}\,dx \underset{5.14.1)}{=} \frac{1}{2}\cdot\left(1 - e^{-b}(b+1)\right)$$

mit $f(x) = xe^{-x}$

! kürzer symbolisch: $x = 2\sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \Rightarrow dt = \frac{x}{2}\,dx$ und einsetzen $\displaystyle\int_0^{b^2/4} e^{-2\sqrt{t}}\,dt = \int_{0}^{b} x e^{-x}\,dx$

$[t = \frac{b^2}{4} \Rightarrow x = b]$

$[t = 0 \Rightarrow x = 0]$

2) sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differbar, $\varphi(t) > 0 \;\forall t \in [a,b]$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{x}\,dx = \log(x)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

$\left[f(x) = \frac{1}{x}\right]$ $\quad$ $\left[\log'(x) = \frac{1}{x}\right]$

Anwendung: $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$, berechne $\displaystyle\int_a^b \tan(t)\,dt =$

$$= \int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = -\int_a^b \frac{\cos'(t)}{\cos(t)}\,dt = -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{x}\,dx = -\log(x)\Big|_{\cos(a)}^{\cos(b)} =$$

$$= -\big(\log(\cos(b)) - \log(\cos(a))\big) = \log\left(\frac{\cos(a)}{\cos(b)}\right)$$

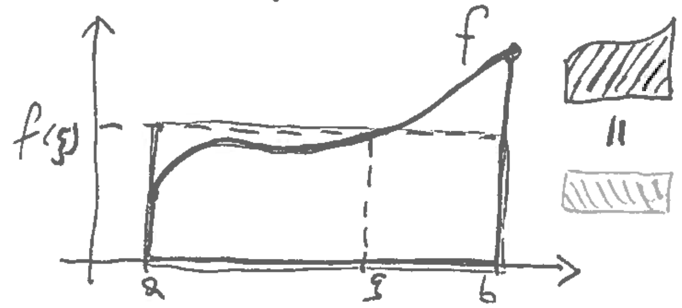
5.17. Mittelwertsatz der Integralrechnung

$f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \geq 0$ (d.h. $\varphi(x) \geq 0 \;\forall x$), dann $\exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\cdot\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Spezialfall $\varphi = 1$ (konst. Fkt. 1):

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$$



Beweis: setze $m := \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

$M := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ (f stetig!)

$$\Rightarrow m \cdot \varphi \leq f \cdot \varphi \leq M \cdot \varphi \Rightarrow m \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

ZwiWe.Satz für f: $\exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = \mu$ □

5.18. Taylorsche Formel und Taylorpolynom

sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differbar (d.h. f 2-mal differbar und f', f'' stetig)

HSDI $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt}$ $\forall x \in I$

es ist $\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x} \underbrace{\left(\frac{d}{dt}(x-t)\right)}_{g(t) \ldots \text{ für part. Int.}} \cdot f'(t)\,dt =$

$$= \underbrace{-(x-t) \cdot f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x}}_{(x-x_0) \cdot f'(x_0)} + \int_{x_0}^{x} (x-t) \cdot f''(t)\,dt$$ einsetzen $\Rightarrow$

(*) $\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\,dt}$

SATZ: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diffbar, $x_0 \in I$.
Dann gilt für alle $x \in I$ die Taylorsche Formel

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),}$$

wobei $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\cdot\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Beweis: wir setzen $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, dann lautet die Behauptung $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$

Für $n=0$ ist dies genau der HSDI; für $n=1$ ist dies genau Gl. (*) oben. Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$:

es gilt $f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x)$, wobei

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\underbrace{(x-t)^{n-1}}_{= -\frac{d}{dt}\frac{(x-t)^n}{n}}\cdot f^{(n)}(t)\,dt \overset{[\text{part. Int.}]}{=}$$

$$= -\frac{(x-t)^n}{(n-1)!\cdot n} f^{(n)}(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt}_{R_{n+1}(x)} = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x) \quad \square$$

DEF: $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal ~~[illegible]~~ diffbar, $x_0 \in I$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, dann heißt

$$T_m[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das Taylorpolynom der Ordnung m von f bei x_0.

Falls f ∞ oft diffbar ist (d.h. n-mal diffb. $\forall n \in \mathbb{N}$), dann heißt

$$T[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylorreihe von f um x_0 (egal, ob konvergent oder nicht)

KOR: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ ∞ oft diffbar und $x_0 \in I$. Für $x \in I$ gilt:

$$f(x) = T[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \iff R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

bemerkenswert, weil $f(x)$ als Limes von Polynomen in x.

Beweis: folgt aus Taylorformel für $n \to \infty$ $\square$

BEM: daher ist es interessant, verschiedene Darstellungen des Restgliedes $R_n(x)$ zu kennen

5.19. SATZ: $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

(i) f $(n+1)$-mal stetig diffbar, $x \in I \Rightarrow \exists\, \xi$ zw. x_0 und x:

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x),$$

wobei $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ ..... Lagrange-Formel für das Restglied.

(ii) f n-mal stetig diffbar $\Rightarrow \exists\, \varphi: I \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$:

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + \underbrace{\varphi(x)\cdot(x-x_0)^n}_{\left[r(x) = o(|x-x_0|^n)\ (x\to x_0),\ \text{weil } \lim\limits_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0\right]}$$

= 30. 5. 2011 =

Beweis: (i): MWS der Int. auf Restglied anwenden: $\exists\, \xi$ zw. x_0 und x, sodass

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \underbrace{\int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt}_{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(ii): gemäß (i) $\exists\, \xi$ $\boxed{[\xi = \xi(x)]}$ zw. x_0 und x: $f(x) - T_{n-1}[f, x_0](x) =$

$$= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi(x)) - f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{=:\ \varphi(x)}(x-x_0)^n$$

für $x \to x_0$ muss $\xi(x) \to x_0$ gelten; $f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow$

$$f^{(n)}(\xi(x)) \to f^{(n)}(x_0) \quad (x \to x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

$\square$

5.20. BEISP 1) $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\forall k \in \mathbb{N}$: $\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow T[\exp, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \ \dots \text{ Taylorreihe von exp um } x_0 = 0$$

Lagrange-Formel für Restglied $R_n(x) = \frac{\exp^{(n)}(\xi)}{n!} x^n = e^{\xi} \cdot \frac{x^n}{n!}$

Ü 28(a): $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ abs. konv., daher $\frac{x^n}{n!} \to 0 \ (n \to \infty)$,

d.h. $R_n(x) \to 0$

[5.18, Kor.] $\Rightarrow$

$$\boxed{e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})}$$

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(1+x)$: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \dots$

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ $(k \geq 1)$; daher $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $\Rightarrow$

Taylorreihe um $x_0 = 0$ $\quad T[f,0](x) = \underbrace{f(0)}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$

Restglied mit $0 \le \xi \le x \le 1$:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\xi)^n} \cdot x^n\right| \le \frac{x^n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty), \text{ somit}$$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k} \qquad (0 \le x \le 1)$$

Bem: auch richtig für $0 > x > -1$ (Bew. später)

speziell für $x = 1$: $\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

5.21. BEM: beachte, dass $f(x) =$ Taylorreihe wirklich nur dann gilt, wenn $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$; selbst, wenn die Taylorreihe konvergent ist, muss ihr Wert nicht mit $f(x)$ übereinstimmen! (explizites Beispiel dafür ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) := 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x \ne 0)$; hat Taylorreihe $T[f,0](x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ [Forster, Beisp. (22.2)])

5.22. Uneigentliche Integrale

A) unbeschränktes Integrationsintervall: $f: [a, \infty[\to \mathbb{R}$ sei auf allen Intervallen $[a, R]$ $(R > a)$ integrierbar;

falls $\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$ existiert, so sagt man, das

<u>uneigentliche Integral</u> $\int_a^\infty f(x)dx$ sei <u>konvergent</u> und wir setzen dann

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx.$$

(ähnlich $\int_{-\infty}^a f(x)dx \ldots$)

<u>Beisp:</u> $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $s > 1$

- $s=1,\ R>1$: $\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(R) \to \infty \quad (R\to\infty)$
- $s\neq 1,\ R>1$: $\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^R = \frac{R^{1-s}-1}{1-s}$ .... konv. für $R\to\infty$ $\Updownarrow$ $s>1$

B) <u>unbeschränkter Integrand auf endlichem Intervall</u>:

$f:]a,b] \to \mathbb{R}$ und $\forall \varepsilon > 0$ sei f integrierbar auf $[a+\varepsilon, b]$; falls $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ existiert, so sagt man, das

<u>uneigentliche Integral</u> $\int_a^b f(x)dx$ sei <u>konvergent</u> und wir setzen dann

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

(ähnlich für Problemstelle am rechten Rand)

Beisp: $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ konv. $\Leftrightarrow$ $s<1$

- $s=1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\log(\varepsilon) \to \infty \quad (\varepsilon \to 0)$
- $s \neq 1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s}$ ..... konv. für $\varepsilon \to 0 \Leftrightarrow s<1$

c) kombinierte Fälle durch Zusammensetzen: z.B.

$f:]a,\infty[\to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[\alpha,\beta]$ $\forall \alpha,\beta$ mit $a<\alpha<\beta$, dann heißt $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konv., falls $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\infty f(x)\,dx$ beide konv. (für ein beliebiges $c \in]a,\infty[$)

Beispiele: 1) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ div. $\forall s \in \mathbb{R}$, denn

- $s \leq 1$: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ div. und • $s \geq 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ div.

2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ konvergent und $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$

$$\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(-1+\varepsilon) \to -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \to 0)$$

und

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\varepsilon) \to \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon \to 0)$$

D) Cauchy-Prinzip [o.B.]: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konv. $\iff$

$\forall \varepsilon>0\ \exists R>a:\ \forall r,s\geq R:\quad \left|\int_r^s f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

E) Vergleichstest [o.B.]: (i) $|f(x)|\leq h(x)\ \forall x$, $h\geq 0$, $\int_a^\infty h(x)\,dx$ konv.

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konv.

(ii) $f(x)\geq g(x)\ \forall x$, $g\geq 0$, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ div.

Beispiele: 1) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ konv., weil $\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$

und $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konv. [vgl. A)]

2) $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konv. nach Cauchy-Prinzip (und Vergl. test).

$$1<r<s:\ \left|\int_r^s \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \underset{\substack{\text{part. Int.}\\ f(x)=\frac{1}{x},\ g'(x)=\sin x}}{=} \left|-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\cos(r)}{r}-\frac{\cos(s)}{s}\right| + \left|\int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right| \leq \frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\int_r^s\frac{dx}{x^2}$$

r,s groß: „klein" (für $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$); $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konv., daher „klein" (für $\int_r^s\frac{dx}{x^2}$)

5.23. Integraltest für Reihen:

SATZ: Sei $f: [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \ \forall x$, f mon. fallend.

Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ ist konvergent } \Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ ist konvergent}$$

Beweis: für $n \leq x \leq n+1$ gilt $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ [f fallend]

(nur Skizze besprochen)

daher für $N \in \mathbb{N}$ stets (mit $Z_N := \{1,2,\dots,N\}$)

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = U(f, Z_N) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq O(f, Z_N) = \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

- falls $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konv. $\Rightarrow$ $O(f, Z_N) - U(f, Z_N) \to 0$ $(N \to \infty)$

  $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

- falls $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow$ $\left(\sum_{n=2}^{N} f(n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt

  [$f \geq 0$]

  $\Rightarrow$ Reihe konv.

$\square$

Beisp: $s > 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konv. $\Longleftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ konv. $\Longleftrightarrow$ $s > 1$ [5.22.A)]

[$x \mapsto \frac{1}{x^s}$ fallend]

(für $s \leq 0$ ist $\sum \frac{1}{n^s}$ natürlich div., weil unbeschr.)

= 6.6.2011 =