§3 STETIGE FUNKTIONEN [WH im „Schweinsgalopp" o.B.]

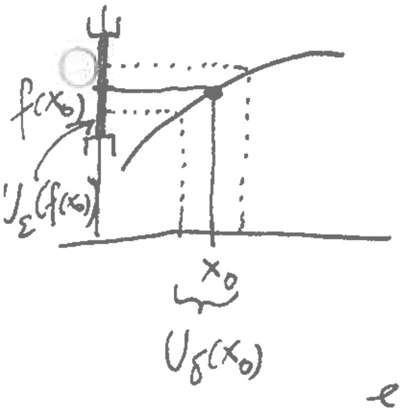
3.1. Definition und Charakterisierung

betrachte $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$; sei $x_0 \in D$

ε-δ-Definition der <u>Stetigkeit von</u> f <u>im Punkt x_0</u>:

f heißt stetig in x_0, wenn gilt

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underbrace{\forall x \in D: \underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in U_\delta(x_0)}}_{\forall x \in D \cap U_\delta(x_0)} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}_{f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))}}$$



zu beliebig vorgegebener ε-Umg. von $f(x_0)$ gibt es δ-Umg. von x_0, sodass $f(D \cap U_\delta(x_0)) \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$

<u>SATZ:</u> f stetig in $x_0 \Longleftrightarrow f$ besitzt <u>Folgenstet.</u> bei x_0,
d.h. für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$

f heißt stetig auf D, falls f stetig in <u>jedem</u> Punkt $x_0 \in D$

3.2. Operationen mit stetigen Funktionen

(i) $f, g: D \to \mathbb{R}$ seien stetig bei $x_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$f+g,\ f \cdot g,\ \lambda \cdot f$ auch stetig in x_0;

falls $g(x_0) \neq 0$, dann auch $\frac{f}{g}: \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0

(ii) $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$
$\Rightarrow h \circ f: D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0

3.3. BEISP: 1) Polynomfunktionen sind stetig $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) rationale Funktionen sind auf ihrem Definitions=bereich (Nennerpol. $\neq 0$) immer stetig

3) $\rho \in \mathbb{R}$, $f:]0,\infty[\to]0,\infty[$, $x \mapsto x^\rho$ Potenzfunktion ist stetig [vgl. 1.8.(B)]

4) $\exp: \mathbb{R} \to]0,\infty[$, $x \mapsto e^x$ ist stetig (ebenso allg. Exp.fkt. $x \mapsto a^x$ mit $a > 0$),
denn in 1.8.(B), Eig. (iv) festgestellt: $x_n \to x \Rightarrow a^{x_n} \to a^x$
bzw. $e^{x_n} \to e^x$

[Bew. sehr ähnlich zu Lösung von Ü-Aufgabe $\boxed{20c)}$]

5) gemäß 3.2 (i) und (ii) ist z.B. auch die Funktion

$$\gamma: \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \underbrace{5^{\frac{1}{1+x}} \cdot e^{x^e}}_{\text{Produkt } f(x)\cdot g(x)} \quad \text{stetig}$$

und $f(x) = 5^{\frac{1}{1+x}} = 5^{h(x)}$ mit $h(x) = \frac{1}{1+x}$ stetig
↑ Verknüpfung von $x \mapsto 5^x$ mit h

und $g(x) = e^{x^e} = e^{\ell(x)}$ mit $\ell(x) = x^e$ stetig
↖ Verkn. von exp mit ℓ

3.4. Drei Haupteigenschaften stetiger Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen

Es sei hier $\boxed{f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ stetig}}$, dann gelten:

1. Der Zwischenwertsatz (Bolzano 1817):

$\forall c\in\mathbb{R}$ mit $f(a)<c<f(b)$ gilt: $\exists\, \xi\in\,]a,b[$, sodass $f(\xi)=c$.

(analoge Aussage, falls $f(b)<c<f(a)$)

Spezialfall (Nullstellensatz): $f(a)<0$ und $f(b)>0 \Rightarrow f$ besitzt Nullstelle in $]a,b[$

$[\exists\, \xi\in\,]a,b[: f(\xi)=0]$

(analog für $f(a)>0$ und $f(b)<0$)

2. Satz vom Maximum und Minimum (Cantor 1870):

f ist auf $[a,b]$ beschränkt (d. h. $f([a,b])\subseteq\mathbb{R}$ beschr. Teilmenge)

und $\exists\, \xi\in[a,b]$, $\exists\, \eta\in[a,b]$:

$$\forall x\in[a,b] \qquad \underset{\text{Min}}{\underset{\uparrow}{f(\xi)}}\le f(x)\le \underset{\text{Max}}{\underset{\uparrow}{f(\eta)}}$$

(und beide werden angenommen)

3. (Heine 1872) f ist auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig, d. h.

$$\forall \varepsilon>0\ \underset{\substack{\uparrow\\ \delta \text{ kann gleichmäßig für alle } x_0\in[a,b] \text{ gewählt werden.}}}{\exists\, \delta>0}\ \forall x_0\in[a,b]\ \forall x\in[a,b]: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

[schauen Sie jetzt nochmal an, wie Sie das jeweils in ihrem 1. Semester bewiesen haben!]

3.5. Grenzwerte von Funktionen: sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

und $D = I$ oder $D = I \setminus \{\gamma\}$ mit $\gamma \in I$

[z.B. ]

sei $\xi \in I$ oder Randpunkt von I [z.B. $\xi = \gamma$]

$c = \lim\limits_{x \to \xi} f(x) :\Longleftrightarrow$ für jede Folge (x_n) in D [d.h. $x_n \in D\ \forall n$] mit $x_n \to \xi$ gilt $f(x_n) \to c$ $(n \to \infty)$.

[$\lim\limits_{x \to \infty}$ ..... D n.o. unbeschr., ... $x_n \to \infty$ .....]

$c = \lim\limits_{x \to \xi+} f(x) :\Longleftrightarrow$ .... $x_n > \xi$ ...... (rechtsseitiger Limes)

Eigenschaften: (i) $c = \lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ ist äquivalent zur Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (x \in D \text{ und } |x - \xi| < \delta) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

(ii) $x_0 \in D$: f stetig in x_0 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

BEISP: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; $\xi = 1$

es gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$, denn für $x_n \to 1$, $x_n \neq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$

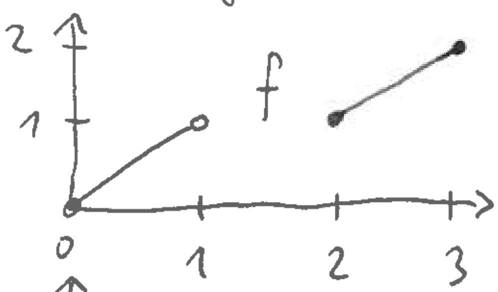
gilt stets $f(x_n) = \dfrac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \dfrac{(x_n - 1)(x_n + 1)}{x_n - 1} = x_n + 1 \to 2$ $(n \to \infty)$

wir setzen $g(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ und erhalten eine

Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die stetig ist und $g|_D = f$ erfüllt.
(stetige Fortsetzung)

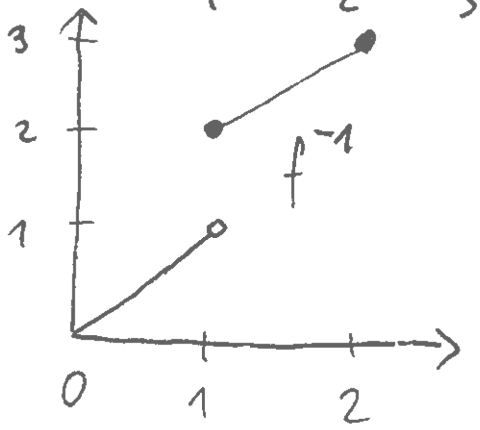
3.6. Stetige Umkehrfunktionen

$\boxed{V_0}$ i.A. müssen Inverse zu stetigen bijektiven Funktionen nicht stetig sein: z.B. $f: [0,1[\cup [2,3] \to [0,2]$, gegeben



durch $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x-1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$;

hat Inverse $f^{-1}: [0,2] \to [0,1[\cup [2,3]$



mit $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$;

- falls f aber auf einem <u>Intervall</u> stetig und monoton, ist die Situation „in Butter"

<u>SATZ:</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to J$, $J \subseteq \mathbb{R}$ stetig, streng monoton (wachsend bzw. fallend) und bijektiv $\Rightarrow$ J ist ein Intervall und $f^{-1}: J \to I$ ist stetig und streng monoton (wachsend bzw. fallend)

<u>BEM:</u> (i) strenge Monotonie $\Rightarrow$ Injektivität

(ii) stetige Bilder von Intervallen sind also wieder Intervalle – dies folgt schon allein aus dem Zwischenwertsatz

3.7. Anwendung: Logarithmus

$\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend;

- $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty$, denn z.B. $\exp(n) = e^n \to \infty$ $(n\to\infty)$, weil $e>2$ und jede Folge (x_m) mit $x_m \to \infty$ übertrifft jedes $n\in\mathbb{N}$ für m groß genug

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, denn $1 = \exp(0) = \exp(y-y) = \exp(y)\cdot\exp(-y)$ ergibt $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$; $e^{-n} \to 0$ $\left(\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\to\infty}\right)$

$\Rightarrow \exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ auch surjektiv [Zwischenwertsatz auf jedem Intervall $[-n,n]$, $n\in\mathbb{N}$]

$\overset{3.6.}{\Longrightarrow}$ Umkehrfunktion $\log := \exp^{-1} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend (natürlicher Logarithmus)

es gilt die Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\forall x,y \in]0,\infty[: \boxed{\log(x\cdot y) = \log(x) + \log(y)}$$

Bew: setze $\xi := \log(x)$, $\eta := \log(y)$ $\Rightarrow$ $\exp(\xi) = x$, $\exp(\eta) = y$

und $\underbrace{x\cdot y}_{} = \exp(\xi)\cdot\exp(\eta) = \underbrace{\exp(\xi+\eta)}_{}$

$\Rightarrow \log(x\cdot y) \;\;=\;\; \log(\exp(\xi+\eta)) = \xi+\eta = \log(x) + \log(y)$ $\square$

Bem: ähnlich hat $x \mapsto a^x$ eine Umkehrfkt. ${}^a\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$; es ist also ${}^e\log(x) = \log(x)$ ... oft $\ln(x)$ geschrieben. =11.4.11=