Übung: Differentialgleichungen für LAK

zur VO DGL für LAK von Günther Hörmann

WS 13/14

1. Stammfunktionen als Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = f(x)$.
   (a) Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ stetig. Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = f(x)$.
   (b) Sei zusätzlich für $x_0 \in]a, b[$ die Anfangsbedingung $y(x_0) = c_0$ ($c_0 \in \mathbb{R}$) vorgegeben. Ist die zugehörige Lösung eindeutig?
   (c) Sei nun $I =]-1, 1[\cup]2, 3[$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Ist das Anfangswertproblem
   $$\begin{cases} y'(x) &= f(x) \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$
   auf I eindeutig lösbar?
2. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'(x) = y(x)$ für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweisen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $y(x) = ce^x$.
   (*Hinweis:* Verwenden Sie die Hilfsfunktion $h(x) := e^{-x}y(x)$).
3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.
   (a) Was versteht man unter einer Stammfunktion für f? Wiederholen Sie aus der Analysis Bedingungen für die Existenz einer Stammfunktion (Kurvenintegrale, Integrabilitätsbedingung, ...).
   (b) Wiederholen Sie die Begriffe differenzierbare Kurve (Weg, Pfad) und Tangentialvektor.
4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $\gamma : I \to U$ eine differenzierbare Kurve und h eine Stammfunktion des Vektorfeldes f auf U.
   (a) Zeigen Sie: Ist γ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ ($t \in I$), dann ist $h \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.
   (b) Wiederholen Sie den Zusammenhang zwischen Richtungsableitung und Gradient für Funktionen $U \to \mathbb{R}$.
5. In einer Bakterienkultur sei die Vermehrungsrate proportional zur derzeitigen Anzahl an Bakterien. Formulieren Sie dies in Form einer Differentialgleichung.
   (a) Angenommen die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 4 Stunden. Wieviele Bakterien sind dann nach 12 Stunden vorhanden?
   (b) Wieviele Bakterien waren es ursprünglich, wenn nach 3 Stunden 10000 und nach 5 Stunden 40000 Bakterien vorhanden sind?

6. Ab dem Zeitpunkt des Schlagens eines Baumes zerfällt der im Holz vorhandene Kohlenstoff C^{14} derart, dass die zum Zeitpunkt t vorhandene Kohlenstoffmenge $x(t)$ einer Differentialgleichung der Form

$$\dot{x} = ax$$

mit $a < 0$ genügt. Die mittlere Zerfallsrate $\dot{x}(t)$ ist also der vorhandenen Menge $x(t)$ proportional.

   (a) Berechnen Sie die Proportionalitätskonstante a aus der Information, dass C^{14} eine Halbwertszeit (= Zeitraum, in der jeweils die Hälfte der vorhandenen Menge zerfällt) von 5568 Jahren besitzt.

   (b) Im Vergleich zur Zerfallsrate 6.68 von lebendem Holz wies die im Jahr 1950 gefundene Holzkohle in einer Höhle bei Lascaux in Frankreich eine Zerfallsrate von 0.97 auf. Aus welcher Zeit stammen somit diese Holzkohle und damit auch die berühmten Höhlenzeichnungen von Lascaux?

7. (a) Bestimmen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ auf dem Gebiet $G = \mathbb{R}\times]0, \infty[$.

   (b) Betrachten Sie Ihr Bild aus (a), um die Lösungen der Differentialgleichung zu erraten. Verifizieren Sie, dass es sich tatsächlich um Lösungen handelt

8. (a) Bestimmen Sie Richtungsfeld und Isoklinen der Differentialgleichung

$$y'(x) = \log(x).$$

   Können Sie daraus einen Zusammenhang zwischen den Lösungskurven zu verschiedenen Anfangswerten entnehmen?

   (b) Leiten Sie, analog zu (a), eine allgemeine Aussage über Isoklinen für Differentialgleichungen der Form $y'(x) = f(x)$ her.

9. (a) Seien I, J Intervalle und $g : I \to \mathbb{R}$, $h : J \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(x) = g(x)h(y)$$

   Zeigen Sie: ist y_0 eine Nullstelle von h, so ist $y(x) \equiv y_0$ eine konstante Lösung.

   (b) Für welche der folgendenden DGL existieren konstante Lösungen?

   (α) $y' = e^{y^2}$, (β) $\dot{E}(t) = \frac{k}{N}(N - E(t))$, ($\gamma$) $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

10. Bestimmen Sie die Ordnung der folgenden (Systeme von) Differentialgleichungen und stellen Sie fest, ob diese linear bzw. autonom sind.

   (a) $y^{(4)} + (x^2 y)'' = 0$ (b) $y'' = x^3 + y + (y')^2$.

   (c) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 y_2 \\ y_2' &= y_1 - 4y_2 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} y_1' &= x^5 y_2 - y_1 \\ y_2' &= y_2 + y_1 \end{aligned}$

11. Lösen Sie die folgenden Aufgabenstellungen als Spezialfälle der Methode der Trennung der Variablen.

    (a) Bestimmung der Stammfunktion: $y' = f(x)$.

    (b) Autonome Differentialgleichung: $y' = f(y)$.

12. Die Größe der Thunfischpopulation im Mittelmeer werde (nach Normierung aller Konstanten, etwa Wachstumsrate oder Sättigungsniveau) durch die logistische Gleichung
$$\begin{aligned} y' &= y \cdot (1-y) \\ y(0) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$
beschrieben, wenn keine äußeren Einflüsse vorliegen. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass Thunfische mit einer konstanten Fangrate $h > 0$ gefangen werden. Begründen Sie verbal, warum die entsprechend modifizierte Differentialgleichung für y von der Form
$$\begin{aligned} y' &= y \cdot (1-y) - h \\ y(0) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned} \qquad (\star)$$
ist. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem für den Wert $h = \frac{3}{4}$ (hohe Fangrate) und zeigen Sie, dass es einen Zeitpunkt $0 < t^* < \pi/\sqrt{2}$ gibt, an dem $y(t^*) = 0$ gilt, also alle Thunfische ausgestorben sind.

13. Nun sei im Modell der vorigen Aufgabe die Fangrate $h = 5/36$ (klein bzw. gemäßigt). Bestimmen Sie die Lösung von $(\star)$ in diesem Fall explizit. Zeigen Sie, dass nun
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 5/6.$$
Gibt es Anfangswerte $0 < y_0 < 1$, für die die Lösung konstant gleich y_0 auf ganz $\mathbb{R}$ ist? Skizzieren Sie die Lösung y zusammen mit den allfälligen konstanten Lösungen.

14. (a) Was versteht man unter der Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I. (Definition, geometrische Bedeutung, Beispiele.)

    (b) Zeigen Sie, dass Lipschitz-Stetigkeit gleichmäßige Stetigkeit impliziert, aber nicht umgekehrt (Gegenbeispiel).

    (c) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die Lipschitz-stetig, aber nicht (überall) differenzierbar ist.

    (d) Zeigen Sie, dass jede stetig differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall automatisch Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie außerdem, dass eine stetig differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall nicht (global) Lipschitz-stetig zu sein braucht

15. Bestimmen Sie explizit die Folge der Picard-Iterierten für das Anfangswertproblem
$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= C \end{aligned}$$
und zeigen Sie, dass diese gegen die Lösung konvergiert.

16. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y^{2/3} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie zunächst, dass die Funktionen $\varphi(x) = 0$ und $\psi_0(x) = \frac{1}{27}x^3$ zwei verschiedene Lösungen sind.

   (b) Zeigen Sie: Unendlich viele weitere Lösungen sind für beliebige $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < 0 < c$ gegeben durch (für $b \leq c$)

$$\psi_{b,c}(x) := \begin{cases} \frac{1}{27}(x-b)^3 & x < b, \\ 0 & b \leq x \leq c, \\ \frac{1}{27}(x-c)^3 & x > c. \end{cases}$$

   Skizzieren Sie diese Lösungen.

   (c) Wie passt diese Vielfalt von Lösungen zum Satz von Picard-Lindelöf?

17. Ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= e^{xy}, \\ y(x_0) &= y_0, \end{aligned}$$

für jedes $y_0 > 0$ eindeutig lösbar? Auf welchem Intervall um x_0 ist dies garantiert? (Können Sie eine explizite Lösung angeben?)

18. Finden Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= e^u \sin(t), \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

19. Zeigen Sie: die Differentialgleichung $y' = f(ax + by + c)$ mit $b \neq 0$ geht durch die Substitution $z := ax + by + c$ in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen über. Verwenden Sie dies, um Lösungen der folgenden Differentialgleichung zu finden:

$$y' = (x + y)^2$$

Geben Sie zu den Differentialgleichungen (mit Anfangsbedingungen) in den folgenden beiden Aufgaben jeweils ein äquivalentes System erster Ordnung (mit entsprechenden Anfangsbedingungen) an:

20. (a) (Nichtlineare Schwingung)

$$\begin{aligned} y'' &= -f(y) \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{aligned}$$

   ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig).

(b) (Kraftgesetz mit Reibung)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(t, x, \dot{x}) \\ x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= x_1 \end{aligned}$$

($m > 0$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig).

21. (a) $y''' = 2y - (y')^2 + 5y''$. Welche Anfangsbedingungen sind für eindeutige Lösbarkeit erforderlich?

    (b) Lineare Differentialgleichung m-ter Ordnung:

    $$y^{(m)} = g(x) + a_0(x)y + \ldots a_{m-1}(x)y^{(m-1)}$$

    Welche Anfangsbedingungen sind für eindeutige Lösbarkeit erforderlich? Ist das äquivalente System erster Ordnung selbst linear (Matrixschreibweise)?

22. Unter der *Subtangente* einer Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ versteht man für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die Länge $l(x)$ der Strecke vom Punkt $(x, 0)$ zum Schnittpunkt der x-Achse mit der Tangente an den Graphen von y im Punkt $(x, y(x))$ (Skizze!). Für konstantes $l_0 > 0$ sollen jene differenzierbaren Funktionen y bestimmt werden, für die alle Subtangenten $l(x)$ von y die gleiche Länge l_0 haben. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diesen Sachverhalt beschreibt und lösen Sie diese (und damit das Subtangentenproblem).

23. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' + 2y &= e^{-x} \\ y(0) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

24. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} - 1 - e^{-\frac{y}{x}} \\ y(1) &= 0 \end{aligned}$$

25. Wie lautet die Lösung des folgenden Anfangswertproblems?

$$\begin{aligned} 2x\sin(y) + y'(x)x^2\cos(y) &= 0 \\ y(1) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

26. Bestimmen Sie die Lösung von $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(1) = 0$.

27. Finden Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL:

$$xy^2 + y - xy' = 0$$

(Hinweis: Finden Sie einen integrierenden Faktor der Form $m(y)$.)

28. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$h(x,y) + g(x,y)y' = 0\,.$$

Zeigen Sie: hängt $f := \frac{\partial_y h - \partial_x g}{h}$ nur von y ab, so ist $m(y) := e^{-F(y)}$ ein integrierender Faktor, wobei F eine Stammfunktion von f bezeichnet.

29. Betrachten Sie das inhomogene lineare System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + 1 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned}$$

auf $I = \mathbb{R}$.

(a) Bilden $\varphi_1(x) = \binom{\cosh x}{\sinh x}$ und $\varphi_2(x) = \binom{\sinh x}{\cosh x}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die zugehörige homogene Gleichung?

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems mittels der Methode der Variation der Konstanten. Wie kann die allgemeine Lösung des Systems dargestellt werden?

30. Gegeben ist das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + x \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 + 2 \end{aligned}$$

auf $I = \mathbb{R}$.

(a) Bilden $\varphi_1(x) = \binom{e^{-x}}{2e^{-x}}$ und $\varphi_2(x) = \binom{xe^{-x}}{(2x-1)e^{-x}}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für die zugehörige homogene Gleichung?

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems mittels der Methode der Variation der Konstanten. Wie kann die allgemeine Lösung des Systems dargestellt werden?

31. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - y = \sin x \qquad (*)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi_1(x) = e^x$, $\varphi_2(x) = e^{-x}$ eine Basis des Lösungsraums der zugehörigen homogenen Gleichung bilden (Wronski-Determinante).

(b) Bilden Sie das äquivalente 2×2 System und bestimmen Sie eine spezielle Lösung mittels Variation der Konstanten. Wie lautet die allgemeine Lösung von $(*)$?

Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen in den folgenden beiden Aufgaben jeweils ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen durch Betrachtung der Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms. (*Hinweis:* gehen Sie ähnlich wie in den verschiedenen Fällen aus Punkt 4.6 der Vorlesung vor.)

32. (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (b) $y'' + 4y = 0$

33. (a) $y'' - 2y' + 2y = 0$ (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

Bestimmen Sie in den folgenden drei Aufgaben jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

34. $y^{(3)} - 2y'' - 4y' + 8y = 0$

35. $y'' - 4y' + 5y = 0$

36. $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$

37. Die Schwingung eines harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 unter der Wirkung einer periodischen äußeren Kraft $a\cos(\omega t)$ wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = a\cos(\omega t) \qquad (\omega_0,\, \omega > 0, a \neq 0)$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

(b) Um spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung zu konstruieren, betrachten Sie die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = ae^{i\omega t}$$

Im Fall $\omega \neq \omega_0$ führt der Ansatz $\psi(t) = ce^{i\omega t}$ zum Ziel. Es ist dann $\mathrm{Re}(\psi)$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung. Bestimmen Sie diese.

38. Betrachten Sie im Modell der vorigen Aufgabe den Fall $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall). Hier empfiehlt sich der Ansatz $\psi(t) = cte^{i\omega_0 t}$. Gehen Sie wieder analog zum vorigen Fall vor. Beschreiben Sie das Verhalten dieser speziellen Lösung für $t \to \infty$.

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

39. (a) $y'' + 3y' + 2y = 2$ (b) $y'' + y' - 12y = 864x^2$

40. (a) $y^{(4)} + 2y'' + y = 25e^{2x}$ (b) $y^{(3)} - y'' + y' = 1$

41. Gegeben ist das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des entsprechenden homogenen Systems.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem für $y(0) = (0, 0)$.

Bestimmen Sie für die Matrix A jeweils Eigenwerte und Eigenvektoren sowie eine Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Normalform hat.

42. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

43. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

44. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie für die Matrizen A jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = Ay$. Skizzieren Sie außerdem jeweils das Phasenportrait des entsprechenden Systems in Normalform $y' = (S^{-1}AS)y$.

45. A aus Aufgabe 42

46. A aus Aufgabe 43

47. A aus Aufgabe 44