Grundbegriffe der Topologie

Günther Hörmann
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
guenther.hoermann@univie.ac.at

Sommersemester 2013

Inhaltsverzeichnis

0 Wiederholung: Metrische Räume

Metrische Räume sind aus den Analysis-Vorlesungen bereits bekannt und dieser Abschnitt gibt einen sehr kurzen Rückblick auf grundlegende Begriffe und Methoden dieser Theorie, die sich zum guten Teil als konkretere Vorstufe für die allgemeine Topologie begreifen lässt.

0.1. Definition: Es sei M eine Menge. Eine Abbildung $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf M, wenn sie folgende Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$ erfüllt:

(M1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$,

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (M,d) wird *metrischer Raum* genannt.

0.2. Beispiel: 1) $\mathbb{R}^m$ mit der *euklidischen Metrik* $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2} = \|x - y\|$; speziell für $m = 1$ ist $d(x,y) = |x - y|$. Ist allgemeiner $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum, dann definiert $d(x,y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf V.

2) Auf einer beliebigen Menge M gibt es stets die *diskrete Metrik* $d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$

3) Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann definiert die Einschränkung $d|_{A\times A}$ eine Metrik auf A, die wir meistens wieder mit d bezeichnen.

0.3. Definition: (i) Sei X eine beliebige Menge. Eine *Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist eine Abbildung $\tilde{x}\colon \mathbb{N} \to X$, wobei wir $x_n = \tilde{x}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen; Kurzschreibweise (x_n).

(ii) Sei (M,d) ein metrischer Raum und $x \in M$. Eine Folge (x_n) in M *konvergiert gegen* x, wir schreiben $x_n \to x$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\colon\ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Der Punkt x heißt dann *Grenzwert* oder *Limes* der Folge (x_n).

0.4. Beispiel: 1) Aus der Analysis ist bekannt: Im $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Metrik konvergiert eine Folge genau dann, wenn jede Komponentenfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert. Die Komponenten des Grenzwertes entsprechehn dann den Limiten der Komponentenfolgen.

2) Trägt M die diskrete Metrik, so gilt: $x_n \to x \ \Leftrightarrow\ \exists N\ \forall n \geq N\colon x_n = x$.

Eine Metrik vermittelt eine „Abstandsmessung“, die zur Entscheidung über relative Nähe und Nachbarschaft herangezogen werden kann. Später in topologischen Räumen geht es dann darum, den Begriff der Umgebung auch ohne Abstandsbegriff zu fassen.

0.5. Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum. Für $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x) = B_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

die *ε-Umgebung von x* oder die *(offene) ε-Kugel um x*.

Die folgende Aussage ist nur die Umformulierung der Konvergenzdefinition mit der eben eingeführten Notation.

0.6. Proposition: Sei (M,d) ein metrischer Raum, $x \in M$ und (x_n) eine Folge in M, dann gilt:

$$x_n \to x \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\colon x_n \in U_\varepsilon(x).$$

Metrische Räume haben die sogenannte *Hausdorff-Eigenschaft*, d.h. Punkte können mittels disjunkter Umgebungen „getrennt“ werden. Eine wichtige Folgerung davon ist die Eindeutigkeit von Grenzwerten.

0.7. Korollar: Sei (M,d) ein metrischer Raum.

(i) Sind $x, y \in M$ mit $x \neq y$, dann besitzen diese Punkte disjunkte ε-Umgebungen, d.h. $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, sodass $U_{\varepsilon_1}(x) \cap U_{\varepsilon_2}(y) = \emptyset$.

(ii) Grenzwerte konvergenter Folgen sind eindeutig.

Beweis: (i) Es ist $d(x,y) > 0$; setze $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 := d(x,y)/3$, dann erhielten wir für $z \in U_{\varepsilon_1}(x) \cap U_{\varepsilon_2}(y)$ den Widerspruch $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2d(x,y)/3$.

(ii) Für $x_n \to x$ und $x_n \to y$ mit $x \neq y$ wähle disjunkte ε-Umgebungen $U_{\varepsilon_1}(x)$ und $U_{\varepsilon_2}(y)$ wie in (i). Dann müssten gemäß Konvergenzdefinition die Folgenglieder schließlich im Durchschnitt dieser Umgebungen liegen, was absurd ist. □

Teilmengen metrischer Räume, die um jeden ihrer Punkte auch noch ganze „Schutzkugeln“ enthalten, werden *offen* genannt.

0.8. Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $W \subseteq M$ heißt *offen*, falls gilt:

$$\forall x \in W\, \exists \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(x) \subseteq W.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *abgeschlossen*, falls $M \setminus A$ offen ist.

0.9. Proposition: Sei (M,d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) Falls $x \in M$ die Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 \colon U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

besitzt, dann gilt $x \in A$.

(iii) Ist $x \in M$ und (x_n) eine Folge in A [d.h. $x_n \in A \; \forall n$] mit $x_n \to x$, dann gilt $x \in A$.

Beweis als Übungsaufgabe.

Die im folgenden Theorem beschriebenen drei Grundeigenschaften des Systems aller offenen Teilmengen eines metrischen Raumes werden wir in abstrakteren topologischen Räumen dann als grundlegende Axiome an die Spitze stellen.

0.10. Theorem: Sei (M, d) ein metrischer Raum, dann gilt:

(i) $\emptyset$ und M sind offen,

(ii) Vereinigungen (beliebige vieler) offener Mengen sind offen,

(iii) endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.

Beweis: (i) Für jeden Punkt $x \in M$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(x) \subseteq M$, daher ist M offen. Die leere Menge enthält gar keinen Punkt, daher gilt die Bedingung in der Definition der Offenheit nach dem Prinzip „ex falso quodlibet".

(ii) Sei Λ eine Menge und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei W_λ eine offene Teilmenge von M. Ist $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$, dann gibt es ein $\lambda_0 \in \Lambda$, sodass $x \in W_{\lambda_0}$. Nachdem W_{λ_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq W_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$. Somit ist die Menge $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ offen.

(iii) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $W_1, \ldots, W_m$ offene Teilmengen von M. Ist $x \in \bigcap_{i=1}^m W_i$, dann gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein $\varepsilon_i > 0$, sodass $U_{\varepsilon_i}(x) \subseteq W_i$. Wir setzen $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ und erhalten $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^m W_i$. Somit ist $\bigcap_{i=1}^m W_i$ offen. $\square$

0.11. Bemerkung: Mit Hilfe der Gesetze von de Morgan erhalten wir entsprechende Aussagen für die abgeschlossenen Teilmengen in einem metrischen Raum (M, d):

(i) $\emptyset$ und M sind abgeschlossen,

(ii) Durchschnitte (beliebig vieler) abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen,

(iii) endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

0.12. Beispiel: 1) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik gilt für $c \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ einfach

$$U_\varepsilon(c) =]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$$

und für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist $]a, b[$ offen, $[a, b]$ abgeschlossen, und die (sogenannten halboffenen) Intervalle $[a, b[$, $]a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.

Als Übungsaufgabe überlegt man sich mit Intervallen in $\mathbb{R}$ auch leicht ein Beispiel dafür, dass (iii) im obigen Theorem für unendliche Durchschnitte im Allgemeinen nicht mehr gilt.

Nach Eigenschaft (ii) bilden andererseits beliebige Vereinigungen offener Intervalle stets eine offene Menge. Man kann auf elementare Weise zeigen (Übungsaufgabe), dass sogar alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (bzgl. der euklidischen Metrik) in dieser Art entstehen, genauer gilt: $W \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn W (höchstens) abzählbare Vereinigung disjunkter offener Intervalle ist.

2) Sei (M, d) ein metrischer Raum: Für jedes $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(x)$ stets offen, denn zu $y \in U_\varepsilon(x)$ können wir $\delta := (\varepsilon - d(x, y))/2$ setzen und erhalten für jedes $z \in U_\delta(y)$

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{d(x, y)}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

somit $U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$.

Einpunktige Mengen $\{x\} \subseteq M$ sind stets abgeschlossen, denn $W := M \setminus \{x\}$ ist offen: Ist nämlich $y \in W$, dann folgt $y \neq x$ und somit $\varepsilon := d(x, y)/2 > 0$; für jedes $z \in U_\varepsilon(y)$ gilt nun $d(z, x) \geq d(y, x) - d(y, z) = 2\varepsilon - d(y, z) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0$, daher $z \neq x$, d.h. $z \in W$; somit gilt $U_\varepsilon(y) \subseteq W$.

Falls d die diskrete Metrik ist, gilt für $0 < \varepsilon < 1$ stets $U_\varepsilon(x) = \{x\}$. In diesem Fall sind also einpunktige Mengen sowohl abgeschlossen als auch offen. Daher ist nach Eigenschaft (ii) im obigen Theorem jede Teilmenge von M offen; weiters also auch jede Teilmenge abgeschlossen.

0.13. Definition: Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig bei* $x \in X$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X\colon d_1(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Wir nennen f *stetig*, wenn f stetig bei jedem $x \in X$ ist.

0.14. Theorem: Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon f(U_\delta^{d_1}(x)) \subseteq U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$. [Umgebungen bzgl. d_1 bzw. d_2]

(iii) $\forall x \in X$: Ist (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to x$, dann gilt auch $f(x_n) \to f(x)$ in Y.

(iv) Urbilder offener Mengen [bzgl. (Y, d_2)] unter f sind offen [bzgl. (X, d_1)].

(v) Urbilder abgeschlossener Mengen unter f sind abgeschlossen.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist klar, weil (ii) nur eine Umformulierung der Stetigkeitsdefinition ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist eine typische Analysis-Übungsaufgabe: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ gemäß (ii); nun wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U_\delta^{d_1}(x)$ für $n \geq N$ gilt; dann folgt $f(x_n) \in U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$ für $n \geq N$, also $f(x_n) \to f(x)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) zeigen wir indirekt: Sei $B \subseteq Y$ offen, sodass $f^{-1}(B)$ nicht offen in X ist, d.h. es gibt einen Punkt $x \in f^{-1}(B)$ (d.h. $f(x) \in B$), für den keine ε-Umgebung ganz in $f^{-1}(B)$ enthalten ist. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$ mit $x_n \notin f^{-1}(B)$. Es gilt also $x_n \to x$, aber $f(x_n) \notin B$ für jedes n. Da B offen ist und $f(x) \in B$, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon^{d_2}(f(x)) \subseteq B$ und somit folgt $f(x_n) \notin U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$ für jedes n — ein Widerspruch zu (iii).

(iv) $\Rightarrow$ (ii): $U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$ ist nach dem obigen Beispiel offen, daher ist $f^{-1}(U_\varepsilon^{d_2}(f(x)))$ offen und enthält klarerweise x; also gibt es ein $\delta > 0$, sodass $U_\delta^{d_1}(x) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon^{d_2}(f(x)))$ gilt; somit folgt $f(U_\delta^{d_1}(x)) \subseteq f(f^{-1}(U_\varepsilon^{d_2}(f(x)))) \subseteq U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) folgt aus elementaren Regeln für Urbilder unter Abbildungen:

$\Rightarrow$: Für $F \subseteq Y$ abgeschlossen ist $Y \setminus F$ offen und somit auch $f^{-1}(Y \setminus F)$ offen; wegen $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ ist daher $f^{-1}(F)$ abgeschlossen.

$\Leftarrow$: Für $B \subseteq Y$ offen ist $Y \setminus B$ abgeschlossen und somit $f^{-1}(Y \setminus B)$ abgeschlossen; wegen $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ ist daher $f^{-1}(B)$ offen. $\square$

Den für die Analysis und alle Anwendungen der Theorie metrischer Räume so essentiellen Begriff der *Kompaktheit* haben wir in diesem Rückblick noch nicht einmal gestreift. Wir werden im Schlussteil der Vorlesung darauf zurückkommen, nachdem wir kompakte topologische Räume allgemein studiert haben.

In der Analysis fließen viele der tiefsten Sätze aus verschiedenen Varianten von Vollständigkeitseigenschaften. Im Rahmen der metrischen Räume lässt sich die Vollständigkeit mittels Cauchy-Folgen definieren. Es ist übrigens interessant zu bemerken, dass dies kein rein topologisch geprägter Begriff ist, weil dafür bereits eine Form von „Gleichmäßigkeit der Nähe“ formuliert werden muss — unabhängig von der Lage eines prospektiven Grenzwertes. Dies kann allgemeiner in der Struktur der *uniformen Räume* beschrieben werden, deren Theorie wir aber in dieser Vorlesung nicht behandeln werden.

0.15. Definition: Sei (M, d) ein metrischer Raum.

(i) Eine Folge (x_n) in M heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N \colon d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

(ii) (M, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

0.16. Beispiel: 1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge: Angenommen $x_n \to x$; zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x, x_l) < \varepsilon/2$ gilt $\forall l \geq N$; dann folgt für beliebige $m, n \geq N$ direkt $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$.

2) $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^p$ mit der euklidischen Metrik sind vollständig. (Siehe Analysis-VO.)

3) $\mathbb{Q}$ mit der von $\mathbb{R}$ vererbten euklidischen Metrik ist nicht vollständig. (Betrachte z.B. die Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$.)

Eine Teilmenge $A \subseteq M$ eines metrischen Raumes nennen wir vollständig, falls sie es bzgl. der von M auf A vererbte Metrik ist.

0.17. Proposition: Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq M$, dann gilt:

$$A \text{ ist vollständig} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ ist abgeschlossen.}$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Sei (x_n) eine Folge in A mit $x_n \to x$ in M; als konvergente Folge ist (x_n) eine Cauchy-Folge in M, somit auch eine Cauchy-Folge in A, daher konvergent in A; somit muss $x \in A$ gelten.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in A. Dann ist (x_n) auch eine Cauchy-Folge in M und somit konvergent in M, d.h. es gibt ein $x \in M$ mit $x_n \to x$. Die Abgeschlossenheit von A impliziert nun $x \in A$, also konvergiert die Cauchy-Folge (x_n) in A; somit ist A vollständig. $\square$

In vielfältigen Anwendungen und insbesondere bei Fragen der Lösbarkeit von nichtlinearen Differentialgleichungen sind Fixpunktsätze oft der Schlüssel zum Erfolg. Eine elementare und dennoch weitreichend anwendbare Variante ist der Fixpunktsatz von Banach, an den wir abschließend noch erinnern wollen.

0.18. Definition: Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Kontraktion*, falls es eine Konstante $0 < q < 1$ gibt, sodass

$$\forall x, y \in X\colon\; d_2(f(x), f(y)) \leq q \cdot d_1(x, y).$$

(Insbesondere ist eine Kontraktion stets (gleichmäßig) stetig.)

0.19. Theorem (Banachscher Fixpunktsatz): Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt, das heißt $\exists!\, z \in X$ mit $f(z) = z$.

(Ein Beweis findet sich in den üblichen Vorlesungen oder Lehrbüchern zur Analysis. Die Eindeutigkeit des Fixpunktes folgt sofort aus der Kontraktionseigenschaft. Der Existenzbeweis wird meist so geführt, dass ausgehend von einem beliebigen Startpunkt $x_0 \in X$ iterativ durch $x_{n+1} := f(x_n)$ eine Folge (x_n) konstruiert wird, die dann mittels Kontraktionsungleichung als Cauchy-Folge entlarvt wird.)

1 Topologische Räume

1.1. Definition: Es sei X eine Menge.

(i) Eine Teilmenge τ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ heißt *Topologie* auf X, falls gilt:

($\mathcal{O}1$) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$,

($\mathcal{O}2$) beliebige Vereinigungen von Mengen aus τ gehören zu τ,

($\mathcal{O}3$) endliche Durchschnitte von Mengen aus τ gehören zu τ.

Das Paar (X, τ) ist dann ein *topologischer Raum* und die Mengen aus τ heißen *offen*. Wir werden in so einer Situation später oft einfach nur vom „topologischen Raum X" sprechen.

(ii) Sind τ_1 und τ_2 zwei Topologien auf X, so heißt τ_1 *gröber* (oder auch schwächer) als τ_2, falls $\tau_1 \subseteq \tau_2$ gilt; in diesem Fall heißt τ_2 *feiner* (oder auch stärker) als τ_1.

1.2. Beispiel: 1) Sei (M, d) ein metrischer Raum, dann bildet die Menge aller gemäß Definiton 0.8 als offen bezeichneten Teilmengen laut Theorem 0.10 eine Topologie τ_d auf M, die *von der Metrik induzierte Topologie.*

Bemerkung: Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *metrisierbar*, falls es eine Metrik d auf X gibt, für die $\tau = \tau_d$ gilt.

2) Ein Spezialfall von 1) ist $\mathbb{R}^n$ mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie, die wir die *euklidische Topologie auf* $\mathbb{R}^n$ nennen.

3) Sei X eine beliebige Menge, dann ist $\tau = \mathcal{P}(X)$ die sogenannte *diskrete Topologie* auf X. Es ist also jede Teilmenge von X offen und τ ist gerade die von der diskreten Metrik induzierte Topologie (vgl. mit dem Ende von Beispiel 0.12.2)).

4) Sei X eine beliebige Menge, dann ist $\tau = \{\emptyset, X\}$ die *triviale* oder *chaotische* Topologie (oder auch „Klumpentopologie"). (Falls X mindestens zwei Elemente enthält, ist die chaotische Topologie nicht metrisierbar, weil die Hausdorff-Eigenschaft 0.7(i) verletzt ist: Wäre d eine Metrik auf X mit $\tau = \tau_d$ und $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so gebe es $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ mit $U_{\varepsilon_1}(x) \cap U_{\varepsilon_2}(y) = \emptyset$; nach 0.12.2) sind $U_{\varepsilon_1}(x)$ und $U_{\varepsilon_2}(y)$ offen, wegen $x \in U_{\varepsilon_1}(x)$ und $y \in U_{\varepsilon_2}(y)$ sind beide nichtleer und daher gilt $U_{\varepsilon_1}(x) = X = U_{\varepsilon_2}(y)$; somit können diese Mengen nicht gleichzeitig disjunkt sein.)

5) Auf der Menge $X = \{1, 2\}$ ist $\tau = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ eine nichttriviale Topologie, die nicht metrisierbar ist: Angenommen, es wäre d eine Metrik auf X mit $\tau = \tau_d$. Da $\{1\}$ offen ist und $1 \in \{1\}$ gilt, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(1) \subseteq \{1\}$ (und somit $U_\varepsilon(1) = \{1\}$, weil stets

$x \in U_\varepsilon(x)$ gilt). Wegen $2 \notin \{1\}$ muss $d(2,1) \geq \varepsilon$ gelten und daher $U_\varepsilon(2) = \{2\}$. Gemäß Beispiel 0.12.2) müsste nun auch $\{2\}$ offen sein, was aber der Definition von τ widerspricht.

1.3. Definition: Es sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus F$ offen ist.

Nach den Regeln von de Morgan für Komplemente von Durchschnitten und Vereinigungen von Mengen ergeben sich direkt aus den Axiomen $(\mathcal{O}1)$-$(\mathcal{O}3)$ die folgenden Eigenschaften des Systems aller abgeschlossen Mengen.

1.4. Proposition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann gilt:

(i) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen,

(ii) beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen,

(iii) endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Insbesondere ist der ganze Raum stets eine abgeschlossene Obermenge jeder Teilmenge von X. In der folgenden Definition wird für jede Teilmenge $E \subseteq X$ die kleinste abgeschlossene Menge beschrieben, die E umfasst.

1.5. Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $E \subseteq X$. Der *Abschluss* von E ist die Menge

$$\overline{E} := \bigcap_{\substack{E \subseteq F, \\ F \text{ abge-} \\ \text{schlossen}}} F.$$

Der Abschluss $\overline{E}$ ist demnach abgeschlossen und erfüllt $E \subseteq \overline{E} \subseteq X$. Für jede abgeschlossene Teilmenge F von X mit $E \subseteq F$ gilt auch $\overline{E} \subseteq F$.

1.6. Proposition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann gilt für Teilmengen $A, B \subseteq X$:

(i) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ \overline{A} \subseteq \overline{B}$,

(ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(iv) A ist abgeschlossen $\iff$ $\overline{A} = A$. (Insbesondere gilt $\overline{\emptyset} = \emptyset$ und $\overline{X} = X$.)

Beweis als Übungsaufgabe.

1.7. Beispiel: 1) Ist X mit der diskreten Topologie ausgestattet, dann ist jede Teilmenge offen und abgeschlossen. Daher gilt hier $\overline{A} = A$ für alle $A \subseteq X$.

2) Ist X mit der chaotischen Topologie ausgestattet und A eine nichtleere Teilmenge von X, dann gilt $\overline{A} = X$.

3) Es sei (M, d) ein metrischer Raum: Die abgeschlossen Mengen bzgl. der induzierten Topologie τ_d stimmen dann mit jenen gemäß Definition 0.8 überein. Für jedes $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ ist die Menge

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

abgeschlossen, weil $X \setminus K_\varepsilon(x)$ sich wie folgt als offen erweist. Für $z \in X \setminus K_\varepsilon(x)$ muss $d(x, z) > \varepsilon$ gelten. Mit $r := (d(x, z) - \varepsilon)/2 > 0$ ergibt sich dann $U_r(z) \subseteq X \setminus K_\varepsilon(x)$, denn für $y \in U_r(z)$ folgt $d(x, y) \geq d(x, z) - d(z, y) > d(x, z) - r = \frac{d(x,z)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon$.

Wegen $U_\varepsilon(x) \subseteq K_\varepsilon(x)$ gilt also stets $\overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq K_\varepsilon(x)$. (Im $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik gilt hier sogar immer Gleichheit, in allgemeinen metrischen Räumen aber nicht; Übung.)

Für Teilmengen $A, B \subseteq M$ setzen wir $d(A, B) := \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ und verwenden die übliche Schreibweise $d(A, y)$ statt $d(A, \{y\})$. Damit kann folgende Aussage als Übungsaufgabe gezeigt werden: Für jede Teilmenge $A \subseteq M$ gilt

$$\overline{A} = \{y \in M \mid d(y, A) = 0\}.$$

4) Als Spezialfall von 3) betrachten wir $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik d. Für $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ergibt sich $\overline{A} = \mathbb{R} = \overline{B}$, weil es für jedes $x \in \mathbb{R}$ beliebig nahe benachbarte rationale und irrationale Zahlen gibt, demnach also $d(x, A) = 0 = d(x, B)$ gilt. Somit gilt in diesem Fall $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$, während $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ ist, also $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
Bemerkung: Die Relation $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ gilt allgemein.

Die folgende Definition beschreibt nun für eine beliebige Teilmenge $E \subseteq X$ die größte offene Menge, die in E enthalten ist.

1.8. Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $E \subseteq X$. Das *Innere* von E ist die Menge

$$E^\circ := \bigcup_{\substack{G \subseteq E, \\ G \text{ offen}}} G.$$

Das Innere E° ist demnach offen und erfüllt $\emptyset \subseteq E^\circ \subseteq E$. Für jede offene Teilmenge G von X mit $G \subseteq E$ gilt auch $G \subseteq E^\circ$.

1.9. Proposition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum, dann gilt für Teilmengen $A, B \subseteq X$:

(i) $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$ und $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$,

(ii) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A^\circ \subseteq B^\circ$,

(iii) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,

(iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

(v) A ist offen $\quad \Longleftrightarrow \quad A^\circ = A$. (Insbesondere gilt $\emptyset^\circ = \emptyset$ und $X^\circ = X$.)

Beweis: (i) folgt unmittelbar aus den beiden Äquivalenzen

$$(G \text{ offen und } G \subseteq A) \Leftrightarrow (X \setminus G \text{ abgeschlossen und } X \setminus A \subseteq X \setminus G)$$
$$\text{und } (F \text{ abgeschlossen und } A \subseteq F) \Leftrightarrow (X \setminus F \text{ offen und } X \setminus F \subseteq X \setminus A).$$

Die Aussagen (ii)-(v) folgen aus (i) in Kombination mit Proposition 1.6 □

1.10. Beispiel: 1) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $A = [a, b]$. Dann gilt $A^\circ =]a, b[$.
(Es ist nämlich $]a, b[$ offen, $]a, b[\subseteq A$ und keine der Teilmengen $[a, b[$, $]a, b]$, A ist offen).

2) In $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie hat $K_1(0) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ das Innere $K_1(0)^\circ = U_1(0) = B_1(0) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.
(Zunächst ist $B_1(0) \subseteq K_1(0)$ und $B_1(0)$ offen, somit $B_1(0) \subseteq K_1(0)^\circ$; ist andererseits $x \in K_1(0)^\circ$, so gibt es eine offene Menge G mit $x \in G \subseteq K_1(0)$, und weiters ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq G \subseteq K_1(0)$. Es ist jedenfalls $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Im Falle $x_1^2 + x_2^2 = 1$ wäre aber $U_\varepsilon(x) \not\subseteq K_1(0)$ für jedes $\varepsilon > 0$ [z.B. $(1 + \frac{\varepsilon}{2})x \in U_\varepsilon(x) \setminus K_1(0)$]; somit muss $x_1^2 + x_2^2 < 1$ gelten; also gilt auch $K_1(0)^\circ \subseteq B_1(0)$.)

3) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie betrachte wieder $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann folgt $A^\circ = (\mathbb{R} \setminus B)^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{B} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ und ebenso $B^\circ = \emptyset$. Somit gilt $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$, während $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$ ist, also $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$.
Bemerkung: Allgemein gilt $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

1.11. Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $E \subseteq X$. Der *Rand* von E ist die Menge

$$\partial E := \overline{E} \cap \overline{X \setminus E} = \overline{E} \cap (X \setminus E^\circ) = \overline{E} \setminus E^\circ.$$

1.12. Proposition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $E \subseteq X$, dann gilt:

(i) ∂E ist abgeschlossen,

(ii) $\overline{E} = E \cup \partial E$,

(iii) $E^\circ = E \setminus \partial E$.

Beweis: (i) gilt, weil ∂E laut Definition der Durchschnitt der beiden abgeschlossenen Mengen $\overline{E}$ und $\overline{X \setminus E}$ ist.

(ii) $E \cup \partial E = E \cup (\overline{E} \cap \overline{X \setminus E}) = (E \cup \overline{E}) \cap (E \cup \overline{X \setminus E}) = \overline{E} \cap X = \overline{E}$.

(iii) $E \setminus \partial E = E \setminus (\overline{E} \cap (X \setminus E^\circ)) = (E \setminus \overline{E}) \cup (E \setminus (X \setminus E^\circ)) = \emptyset \cup E^\circ = E^\circ$. □

1.13. Beispiel: 1) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $\partial[a, b] = \partial]a, b] = \partial[a, b[= \partial]a, b[= \{a, b\}$.
Weiters erhalten wir $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

2) In jedem topologischen Raum X gilt $\partial X = \emptyset$, weil stets $\overline{X} = X = X^\circ$ erfüllt ist.

3) In $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie gilt

$$\partial K_1(0) = \overline{K_1(0)} \setminus K_1(0)^\circ = K_1(0) \setminus B_1(0) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} = S^1.$$

2 Umgebungen und Basen

Wir wollen nun zu einer „lokalen Beschreibung“ von Topologien gelangen, d.h. wir suchen nach geeigneten abstrakten Begriffen, die eine Topologie „in der Nähe jedes Punktes“ charakterisieren.

2.1. Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmnge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von x, falls es eine Menge $V \in \tau$ mit der Eigenschaft $x \in V \subseteq U$ gibt.

Die Menge $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x heißt das *Umgebungssystem* von x (oder auch der *Umgebungsfilter* von x).

Die Aussagen des folgenden Lemmas illustrieren bereits die Wechselbeziehung zwischen den Begriffen „Umgebung“ und „offene Menge“ bzw. „Inneres“: Einerseits ist eine Menge genau dann Umgebung eines gegebenen Punktes, wenn dieser Punkt zu ihrem Inneren gehört. Andererseits ist eine Menge genau dann offen, wenn sie für jeden ihrer Punkte (Obermenge einer) Umgebung ist.

2.2. Lemma: Es sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(i) Für $x \in X$ und $U \subseteq X$ gilt: $\quad U \in \mathcal{U}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in U^\circ$,

(ii) Für $U \subseteq X$ gilt: $\quad U$ ist offen $\quad \Longleftrightarrow \quad \forall z \in U\ \exists W \in \mathcal{U}(z)\colon W \subseteq U$.

Beweis: (i) $U \in \mathcal{U}(x) \ \Leftrightarrow\ \exists V \in \tau\colon (V \subseteq U \text{ und } x \in V) \ \Leftrightarrow\ x \in U^\circ$.

(ii) $\boxed{\Rightarrow}$: Sei $z \in U$. Wegen $U = U^\circ$ gilt $z \in U^\circ \subseteq U$ und nach (i) ist $U^\circ \in \mathcal{U}(z)$.
$\boxed{\Leftarrow}$: Für jedes $z \in U$ wähle ein $W_z \in \mathcal{U}(z)$ mit $W_z \subseteq U$. Das Innere W_z° ist offen und nach (i) gilt $z \in W_z^\circ$; also gilt $U = \bigcup_{z \in U} W_z^\circ$ und U ist als Vereinigung offener Mengen offen. □

Der folgende Satz fasst im ersten Punkt die Grundeigenschaften von Umgebungssystemen zusammen und besagt im zweiten Punkt, dass wir Topologien alternativ auch durch Umgebungssysteme beschreiben können.

2.3. Theorem: Es sei X eine Menge.

(i) Ist τ eine Topologie auf X und bezeichnet $\mathcal{U}(x)$ für jedes $x \in X$ das Umgebungssystem von x bzgl. τ, dann gilt:

(U1) $U \in \mathcal{U}(x) \quad \Longrightarrow \quad x \in U$,

(U2) $U, V \in \mathcal{U}(x) \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \in \mathcal{U}(x)$, (U3) $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists V \in \mathcal{U}(x)\ \forall z \in V: U \in \mathcal{U}(z)$,

(U4) $U \in \mathcal{U}(x), V \subseteq X\colon\ V \supseteq U \quad \Longrightarrow \quad V \in \mathcal{U}(x)$.

(ii) Ist jedem $x \in X$ ein nichtleeres System $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ zugeordnet, das (U1)-(U4) erfüllt, dann existiert genau eine Topologie τ auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ gerade $\mathcal{U}(x)$ das Umgebungssystem von x bzgl. τ ist.

Beweis: (i): (U1) und (U4) folgen unmittelbar aus der Definition einer Umgebung.
(U2): Nach dem obigen Lemma gilt $x \in U^\circ \subseteq U$ und $x \in V^\circ \subseteq V$. Daher folgt $x \in U^\circ \cap V^\circ \subseteq U \cap V$ und somit $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$, weil $U^\circ \cap V^\circ$ offen ist.
(U3): Setze $V = U^\circ$. Für jedes $z \in V = U^\circ$ gilt dann $z \in U^\circ \subseteq U$, also $U \in \mathcal{U}(z)$.

(ii): *Eindeutigkeit:* Gemäß obigem Lemma und Eigenschaft (U4) sind offene Mengen bzgl. einer Topologie genau als jene Mengen festgelegt, die Umgebungen jedes ihrer Punkte sind.

Existenz: Wir definieren nun die gesuchte Topologie genau so, wie es eben durch das obige Lemma und (U4) nahegelegt wird, nämlich durch

$$\tau := \{G \subseteq X \mid \forall x \in G\colon G \in \mathcal{U}(x)\}.$$

Dadurch wird tatsächlich eine Topologie auf X definiert: Es ist $\emptyset \in \tau$ und wegen (U4) auch $X \in \tau$, also gilt ($\mathcal{O}$1); ($\mathcal{O}$2) folgt aus (U4) und ($\mathcal{O}$3) folgt durch Induktion aus (U2).

Es bezeichne $\mathcal{U}'(x)$ das Umgebungssystem von $x \in X$ bzgl. τ gemäß Definition 2.1. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(x)$ für jedes $x \in X$ gilt.

Sei $x \in X$ und $U' \in \mathcal{U}'(x)$, dann gibt es eine Menge $G \in \tau$ mit $x \in G \subseteq U'$. Nach Definition von τ ist $G \in \mathcal{U}(x)$ und daher nach (U4) auch $U' \in \mathcal{U}(x)$. Somit $\mathcal{U}'(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$.

Sei $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$. Wir betrachten die Menge $\widetilde{U} := \{y \in U \mid U \in \mathcal{U}(y)\}$, die sozusagen aus den inneren Punkten von U im Sinne der Systeme $\mathcal{U}(z)$ $(z \in X)$ besteht. Nach (U1) gilt $x \in U$ und somit auch $x \in \widetilde{U}$. Weiters werden wir unten auch noch $\widetilde{U} \in \tau$ zeigen. Danach sind wir fertig, weil zusammen mit $x \in \widetilde{U} \subseteq U$ daraus $U \in \mathcal{U}'(x)$ folgt; somit erhalten wir $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{U}'(x)$ und insgesamt $\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(x)$.

Wir zeigen also schließlich noch, dass $\widetilde{U}$ zu τ gehört: Sei $y \in \widetilde{U}$. Laut Definition von $\widetilde{U}$ gilt daher $U \in \mathcal{U}(y)$. Nach (U3) gibt es eine Menge $V \in \mathcal{U}(y)$, sodass $U \in \mathcal{U}(z)$ für jedes $z \in V$ gilt, wegen (U1) daher insbesondere $V \subseteq U$. Hieraus folgt $V \subseteq \widetilde{U}$, also ergibt sich aus (U4) nun $\widetilde{U} \in \mathcal{U}(y)$. Da y beliebig aus $\widetilde{U}$ war, haben wir $\widetilde{U} \in \tau$ gezeigt. □

Auf Grund der Eigenschaft (U4) sind Obermengen von Umgebungen ebenfalls Umgebungen und es genügt für die meisten Zwecke, mit einem Teilsystem von „hinreichend kleinen“ Umgebungen zu arbeiten.

2.4. Definition: Es sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Mengensystem $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* bei x, falls es zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $V \in \mathcal{B}(x)$ mit $V \subseteq U$ gibt.

Somit gilt in diesem Fall $\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq X \mid \exists V \in \mathcal{B}(x)\colon V \subseteq U\}$.

2.5. Beispiel: 1) In jedem topologischen Raum (X, τ) ist $\mathcal{B}(x) := \{V \in \tau \mid x \in V\}$ eine Umgebungsbasis bei $x \in X$, denn für jede Umgebung U von x gilt: U° ist offen und $x \in U^\circ$.

2) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $x \in M$: Das abzählbare Mengensystem

$$\mathcal{B}(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist eine Umgebungsbasis bei x. Dazu genügt die Beobachtung, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < \varepsilon$ gibt und daher $U_{1/n}(x) \subseteq U_\varepsilon(x)$ gilt. (Kleiner „Test“: Warum genügt dies?)

3) In $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie besteht die Umgebungsbasis gemäß 2) bei $x \in \mathbb{R}^2$ aus den offenen Kreisscheiben um den Mittelpunkt x mit Radien $1, 1/2, 1/3, \ldots$
Genausogut können hier aber auch achsenparallele Quadrate (egal, ob offen oder nicht) mit Mittelpunkt x und rationalen Seitenlängen als abzählbare Umgebungsbasis bei x dienen.

4) Ist X mit der diskreten Topologie ausgestattet und $x \in X$, so bildet $\mathcal{B}(x) := \{\{x\}\}$ eine Umgebungsbasis bei x.

5) Sei X mit der chaotischen Topologie versehen und $x \in X$, dann ist $\mathcal{B}(x) = \{X\}$ die einzige Umgebungsbasis bei x.

Die folgende Charakterisierung von offenen Mengen ist die naheliegende Variante von Lemma 2.2(ii) mit Umgebungsbasen statt Umgebungen.

2.6. Lemma: Es sei (X, τ) ein topologischer Raum und für jedes $x \in X$ sei $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis bei x. Für eine Teilmenge $G \subseteq X$ gilt dann:

$$G \text{ ist offen} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in G\ \exists V \in \mathcal{B}(x)\colon V \subseteq G.$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$: Zu $x \in G$ gibt es nach Lemma 2.2(ii) ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subseteq G$. Weiters gibt es dann ein $V \in \mathcal{B}(x)$ mit $V \subseteq U \subseteq G$. $\boxed{\Leftarrow}$ ist wegen $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ und 2.2(ii) klar. $\square$

Die Variante des Satzes zur Beschreibung von Topologien durch Umgebungsbasen an Stelle von ganzen Umgebungssystemen liest sich nun so.

2.7. Theorem: Es sei X eine Menge.

(i) Ist τ eine Topologie auf X und ist $\mathcal{B}(x)$ für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis bei x, dann gilt:

(UB1) $V \in \mathcal{B}(x) \quad \Longrightarrow \quad x \in V$,

(UB2) $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(x) \quad \Longrightarrow \quad \exists V_3 \in \mathcal{B}(x)\colon V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$,

(UB3) $\forall V \in \mathcal{B}(x)\ \exists V_0 \in \mathcal{B}(x)\ \forall z \in V_0\ \exists W \in \mathcal{B}(z)\colon W \subseteq V$.

(ii) Ist jedem $x \in X$ ein nichtleeres System $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ zugeordnet, das (UB1)-(UB3) erfüllt, dann existiert genau eine Topologie τ auf X mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{B}(x)$ für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis bei x bzgl. τ ist.

Beweis: (i) folgt direkt aus den Eigenschaften (U1)-(U3) für Umgebungen und der Definition einer Umgebungsbasis.

(ii) Die *Eindeutigkeit* folgt unmittelbar aus dem vorigen Lemma, weil damit die offenen Mengen schon aus der Kenntnis von Umgebungsbasen bestimmt sind.

Existenz: Wir definieren für jedes $x \in X$ das „prospektive Umgebungssystem“ bei x durch

$$\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}(x) \colon B \subseteq U\}.$$

Wir zeigen, dass die Systeme $\mathcal{U}(x)$ ($x \in X$) die Eigenschaften (U1)-(U4) erfüllen, dann folgt die Aussage aus Theorem 2.3.

(U4): Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U \subseteq V \subseteq X$, so gilt nach Konstruktion von $\mathcal{U}(x)$ auch $V \in \mathcal{U}(x)$.

(U1): Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $B \subseteq U$. Nach (UB1) gilt $x \in B$, somit auch $x \in U$.

(U2): Zu $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ gibt es $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)$ mit $B_1 \subseteq U_1$ und $B_2 \subseteq U_2$. Nach (UB2) gibt es eine Menge $B_3 \in \mathcal{B}(x)$, sodass $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Daher gilt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

(U3): Sei $U \in \mathcal{U}(x)$ und $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $B \subseteq U$. Gemäß (UB3) existiert ein $B_0 \in \mathcal{B}(x)$, sodass gilt: $\forall z \in B_0 \; \exists W_z \in \mathcal{B}(z) \colon W_z \subseteq B$. Insbesondere gilt also $B \in \mathcal{U}(z)$, daher mit (U4) auch $U \in \mathcal{U}(z)$, für jedes $z \in B_0$. Das heißt aber, es gilt (U3) mit $V = B_0 \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. $\square$

2.8. Beispiel (Die Sorgenfrey-Gerade): Für jedes $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\mathcal{B}(x) := \{[x, z[\mid z > x\}.$$

Als Übungsaufgabe kann man zeigen, dass $\mathcal{B}(x)$ die Eigenschaften (UB1)-(UB3) erfüllt, also dadurch eine Topologie τ_S auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

Die Aussagen des folgenden Satzes kann man gut durch Umgebungsbasen aus Kugeln in der euklidischen Topologie des $\mathbb{R}^n$ illustrieren: Innere Punkte einer Menge E besitzen „Schutzkugeln“, die zur Gänze innerhalb E liegen; für Punkte im Abschluss einer Menge E enthält jede Kugel Elemente aus E; und Randpunkte von E sind dadurch charakterisiert, dass jede Kugel sowohl die Menge E als auch deren Komplement trifft.

2.9. Theorem: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und für jedes $x \in X$ sei $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis bei x. Dann gilt für $E \subseteq X$:

(i) $\overline{E} = \{x \in X \mid \forall B \in \mathcal{B}(x) \colon B \cap E \neq \emptyset\}$,

(ii) $E^\circ = \{x \in X \mid \exists B \in \mathcal{B}(x) \colon B \subseteq E\}$,

(iii) $\partial E = \{x \in X \mid \forall B \in \mathcal{B}(x) \colon B \cap E \neq \emptyset \text{ und } B \cap (X \setminus E) \neq \emptyset\}$.

Beweis: (i) Es bezeichne A die Menge auf der rechten Seite der behaupteten Gleichung. Die Menge $X \setminus \overline{E}$ ist offen, daher können wir mit Hilfe von Lemma 2.6 schließen:

$$x \in X \setminus \overline{E} \;\Leftrightarrow\; \exists B \in \mathcal{B}(x)\colon B \subseteq X \setminus \overline{E} \;\Leftrightarrow\; \exists B \in \mathcal{B}(x)\colon B \cap \overline{E} = \emptyset$$
$$\overset{\star}{\Rightarrow}\; \exists B \in \mathcal{B}(x)\colon B \cap E = \emptyset \;\Leftrightarrow\; x \in X \setminus A.$$

Hier gilt aber der mit $\star$ markierte Implikationspfeil auch umgekehrt: nach Lemma 2.2(i) ist $x \in B^\circ$, insbesondere $B^\circ \in \mathcal{U}(x)$, daher gibt es ein $B_1 \in \mathcal{B}(x)$ mit $B_1 \subseteq B^\circ$; die Menge $X \setminus B^\circ$ ist abgeschlossen und aus $B^\circ \cap E \subseteq B \cap E = \emptyset$ folgt $E \subseteq X \setminus B^\circ$, also $\overline{E} \subseteq X \setminus B^\circ$; somit gilt $B_1 \cap \overline{E} \subseteq B^\circ \cap \overline{E} = \emptyset$.

(ii) $X \setminus E^\circ = \overline{X \setminus E} \overset{\text{(i)}}{=} \{x \in X \mid \forall B \in \mathcal{B}(x)\colon B \cap (X \setminus E) \neq \emptyset\} =$
$\quad = X \setminus \{x \in X \mid \exists B \in \mathcal{B}(x)\colon B \cap (X \setminus E) = \emptyset\} = X \setminus \{x \in X \mid \exists B \in \mathcal{B}(x)\colon B \subseteq E\}$.

(iii) folgt aus $\partial E = \overline{E} \cap \overline{(X \setminus E)}$ zusammen mit (i). $\square$

2.10. Bemerkung: 1) Ist A eine Teilmenge des topologischen Raumes X, dann nennen wir $x \in X$ einen *Häufungspunkt* von A, falls $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ (oder aus einer Umgebungsbasis bei x) gilt. Zur Übung kann man zeigen, dass beim Abschluss höchstens die Häufungspunkte zu A hinzukommen, d.h.

$$\overline{A} = A \cup \{x \in X \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

2) Seien τ_1 und τ_2 Topologien auf der Menge X und für jedes $x \in X$ seien $\mathcal{B}^1(x)$ bzw. $\mathcal{B}^2(x)$ Umgebungsbasen bei x bzgl. τ_1 bzw. τ_2. Dann gilt (Beweis als Übungsaufgabe):

$$\tau_1 \text{ ist gröber als } \tau_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \forall x \in X\; \forall B^1 \in \mathcal{B}^1(x)\; \exists B^2 \in \mathcal{B}^2(x)\colon B^2 \subseteq B^1.$$

Ähnlich wie für Umgebungen können wir auch die Beschreibung aller offenen Mengen auf gewisse Grundmengen reduzieren.

2.11. Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \tau$ der Topologie heißt *Basis* für τ, falls es zu jedem $G \in \tau$ ein Teilsystem $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ mit $G = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$ gibt.
Mit anderen Worten gilt $\tau = \{\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$.

2.12. Lemma: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \tau$, dann gilt:

$$\mathcal{B} \text{ ist eine Basis für } \tau \quad\Longleftrightarrow\quad \forall G \in \tau\; \forall p \in G\; \exists B \in \mathcal{B}\colon p \in B \subseteq G.$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$: Sei $G = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$ mit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Zu $p \in G$ gibt es demnach eine Menge $B \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ mit $p \in B \subseteq G$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Sei $G \in \tau$. Für jedes $p \in G$ wähle ein $B_p \in \mathcal{B}$ mit $p \in B_p \subseteq G$. Wir setzen $\mathcal{C} := \{B_p \mid p \in G\}$, dann folgt $G = \bigcup_{p \in G} B_p = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$. $\square$

2.13. Beispiel: 1) Wenn die Menge X die diskrete Topologie trägt, dann ist $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ eine Basis dafür.

2) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist $\mathcal{B} = \{I \subseteq \mathbb{R} \mid I \text{ ist ein offenes Intervall } \}$ eine Basis, was aus der Aussage am Ende von Beispiel 1) in 0.12 folgt; es genügt sogar, nur die offenen Intervalle mit rationalen Randpunkten zu betrachten.

3) In einem metrischen Raum (M, d) bildet die Menge aller offenen Kugeln $\mathcal{B} = \{U_r(x) \mid x \in M, r > 0\}$ eine Basis für τ_d.

2.14. Theorem: Es sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{B}$ ist Basis einer (eindeutigen) Topologie auf X.

(ii) $\mathcal{B}$ erfüllt die beiden Eigenschaften (a) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ und

(b) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $p \in B_1 \cap B_2 \implies \exists B_3 \in \mathcal{B} \colon p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt direkt aus der Definition und dem vorigen Lemma.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es ist naheliegend $\tau := \{\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$ anzusetzen.

Wir zeigen, dass τ eine Topologie auf X ist: Nach (a) ist $X \in \tau$ und $\emptyset \in \tau$ ergibt sich aus der Definition von τ mit $\mathcal{C} = \emptyset$ (Vereinigung über eine leere Familie), also ist $(\mathcal{O}1)$ erfüllt. Eigenschaft $(\mathcal{O}2)$ bzgl. beliebiger Vereinigungen folgt direkt aus der Konstruktion von τ.

Schließlich zeigen wir $(\mathcal{O}3)$, wobei es genügt, einen Durchschnitt von zwei Mengen zu betrachten: Sind $G_1, G_2 \in \tau$, dann gibt es $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{B}$ mit $G_1 = \bigcup_{A\in\mathcal{C}_1} A$ und $G_2 = \bigcup_{B\in\mathcal{C}_2} B$ und somit zunächst

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{\substack{A\in\mathcal{C}_1,\\ B\in\mathcal{C}_2}} (A \cap B).$$

Sind $A \in \mathcal{C}_1$ und $B \in \mathcal{C}_2$, dann gibt es gemäß Eigenschaft (b) für jedes $p \in A \cap B$ eine Menge $C_p \in \mathcal{B}$ mit $p \in C_p \subseteq A \cap B$. Daher können wir $A \cap B = \bigcup_{p\in A\cap B} C_p$ schreiben und erhalten insgesamt

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{\substack{A\in\mathcal{C}_1,\\ B\in\mathcal{C}_2}} \bigcup_{p\in A\cap B} C_p = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C,$$

wobei $\mathcal{C} := \{C_p \mid p \in A \cap B, A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\}$ gesetzt wurde. Somit gilt $G_1 \cap G_2 \in \tau$.

Laut Konstruktion ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie τ, die als Menge aller Vereingungen beliebiger Teilfamilien von $\mathcal{B}$ auch eindeutig mit dieser Eigenschaft ist. $\square$

Für Teilsysteme der offenen Mengen sind die Begriffe der Basis einer Topologie und der Umgebungsbasen für jeden Punkt auf einfache Weise verknüpft.

2.15. Theorem: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{B}$ ist eine Basis für τ.

(ii) $\forall x \in X \colon \mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ ist eine Umgebungsbasis bei x.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Jedes $B \in \mathcal{B}(x)$ ist offen und daher auch Umgebung von x, somit $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. Sei nun $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig. Dann gilt $x \in U^\circ \in \tau$, daher gibt es nach Lemma 2.12 ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq U^\circ$. Wir erhalten $B \in \mathcal{B}(x)$ und $B \subseteq U^\circ \subseteq U$, also ist $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis bei x.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ die Bedingung in Lemma 2.12 erfüllt. Sei $G \in \tau$ und $p \in G$. Weil $\mathcal{B}(p)$ Umgebungsbasis bei p ist, gibt es eine Menge $B_p \in \mathcal{B}(p)$ mit $B_p \subseteq G$, was wegen $\mathcal{B}(p) \subseteq \mathcal{B}$ den Beweis beendet. $\square$

Für die konkrete Konstruktion von Topologien auf gegebenen Mengen ist es bequemer, die nötigen Grundbausteine sogar noch weiter zu reduzieren.

2.16. Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subseteq \tau$ heißt *Subbasis* für τ, falls das System $\mathcal{B} := \{\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ endlich}\}$ aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ eine Basis für τ ist, wobei wir uns im Falle $\mathcal{F} = \emptyset$ der Konvention $\bigcap_{S \in \emptyset} S = X$ bedienen.

Interessant ist, dass jedes Mengensystem von Teilmengen schon als Subbasis einer geeigneten Topologie dienen kann.

2.17. Proposition: Es sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis für die gröbste Topologie τ auf X bezüglich der alle Elemente von $\mathcal{S}$ offen sind, d.h. $\mathcal{S} \subseteq \tau$.

Beweis: Wir setzen $\mathcal{B} := \{\bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ endlich}\}$ und zeigen, dass $\mathcal{B}$ die Eigenschaften (a) und (b) aus Theorem 2.14(ii) erfüllt: Wegen der in obiger Definition erwähnten Konvention gilt $X = \bigcap_{S \in \emptyset} S \in \mathcal{B}$, also ist (a) erfüllt; und (b) folgt aus der einfachen Tatsache $\bigcap_{S \in \mathcal{F}_1} S \cap \bigcap_{T \in \mathcal{F}_2} T = \bigcap_{R \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2} R \in \mathcal{B}$, falls $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{S}$ endlich.

Somit gibt es eine eindeutige Topologie τ auf X, die $\mathcal{B}$ als Basis besitzt und insbesondere $\mathcal{S}$ enthält. Ist τ' eine beliebige Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subseteq \tau'$, dann folgt auch $\mathcal{B} \subseteq \tau'$ und daraus weiters $\tau \subseteq \tau'$. $\square$

2.18. Beispiel: In $\mathbb{R}$ ist $\mathcal{S} := \{]-\infty, b[\mid b \in \mathbb{Q}\} \cup \{]a, \infty[\mid a \in \mathbb{Q}\}$ eine Subbasis für die euklidische Topologie.

Wir hatten bei den metrischen Räumen bemerkt, dass Teilmengen durch entsprechende Einschränkung der Metrik selbst zum metrischen Raum werden. In allgemeinen topologischen Räumen können wir die offenen Mengen einfach mit der gegebenen Teilmenge schneiden.

2.19. Definition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann wird durch $\tau_A := \{G \cap A \mid G \in \tau\}$ die (Relativ- oder) *Spurtopologie* von τ auf A definiert. Es ist leicht zu sehen, dass τ_A eine Topologie auf A ist. Das Paar (A, τ_A) wird als *(topologischer) Teilraum* von (X, τ) bezeichnet.

Wir versammeln im folgenden Satz einige Eigenschaften der Spurtopologie, die „im täglichen Umgang“ mit deren grundlegenden Begriffen nützlich sind.

2.20. Proposition: Sei (X, τ) ein topologischer Raum und (A, τ_A) ein Teilraum, dann gelten folgende Aussagen:

(i) Für $H \subseteq A$: H ist offen in A (bzgl. τ_A) $\iff$ $\exists G$ offen in X (bzgl. τ): $H = G \cap A$.

(ii) Für $F \subseteq A$: F ist abgeschlossen bzgl. τ_A $\iff$ $\exists Z$ abgeschlossen in X: $F = Z \cap A$.

(iii) Für $E \subseteq A$: Der Abschluss von E bzgl. τ_A ist gleich $A \cap \overline{E}$. ($\overline{E}$ Abschluss bzgl. τ.)

(iv) Für $x \in V \subseteq A$: V ist Umgebung von x bzgl. τ_A $\iff$ $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ bgl. τ: $V = A \cap U$.

(v) Ist $x \in A$ und $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebunsgbasis bei x bzgl. τ, dann ist $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}(x)\}$ eine τ_A-Umgebungsbasis bei x.

(vi) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie τ, dann ist $\{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis für τ_A.

Beweis: (i) ist nur eine Umformulierung der Definition und (ii) folgt sofort daraus durch Komplementbildung.

(iii) Der τ_A-Abschluss von E wird beschrieben durch

$$\bigcap_{\substack{F\ \tau_A\text{-abg.,}\\ F \supseteq E}} F \overset{[(ii)]}{=} \bigcap_{\substack{Z\ \tau\text{-abg.,}\\ Z \cap A \supseteq E}} (Z \cap A) \overset{[E \subseteq A]}{=} \Big(\bigcap_{\substack{Z\ \tau\text{-abg.,}\\ Z \supseteq E}} Z \Big) \cap A = \overline{E} \cap A.$$

(iv) V ist τ_A-Umgebung von x $\Leftrightarrow$ $\exists H \in \tau_A \colon x \in H \subseteq V$ $\overset{[(i)]}{\Leftrightarrow}$ $\exists G \in \tau \colon x \in G \cap A \subseteq V$ $(\star)$.

Wir zeigen $(\star)$ $\Leftrightarrow$ $\exists U \in \mathcal{U}(x) \colon V = A \cap U$:
Sei $(\star)$ erfüllt, dann ist G offen und enthält x, somit $G \in \mathcal{U}(x)$; setzen wir $U := G \cup V$, so erhalten wir $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U \cap A = (G \cup V) \cap A = (G \cap A) \cup (V \cap A) = (G \cap A) \cup V = V$.
Umgekehrt gibt es $G \in \tau$, sodass $x \in G \subseteq U$ gilt; daher weiters auch $G \cap A \subseteq U \cap A = V$.

(v) Nach (iv) ist $B \cap A$ eine τ_A-Umgebung von x für jedes $B \in \mathcal{B}(x)$. Sei V eine beliebige τ_A-Umgebung von x, dann gibt es wiederum nach (iv) ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $V = U \cap A$. Zu U gibt es ein $B \in \mathcal{B}(x)$ mit $B \subseteq U$ und somit $B \cap A \subseteq U \cap A = V$.

(vi) folgt direkt aus (v) zusammen mit Theorem 2.15. □

2.21. Beispiel: 1) Für $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Topologie und $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ entspricht τ_A gerade der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$, d.h. $G \times \{0\}$ ist offen bzgl. τ_A genau dann, wenn G offen in $\mathbb{R}$ ist.

2) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ergibt die Spurtopologie auf $\mathbb{Z}$ die diskrete Topologie, was man mittels der Schnittmengen $U_{1/2}(k) \cap \mathbb{Z} = \{k\}$ für $k \in \mathbb{Z}$ leicht sieht.

3) Teilräume diskreter topologischer Räume sind diskret und die chaotische Topologie vererbt stets die chaotische Topologie auf Teilmengen.

4) Ist (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$, dann stimmt die Spurtopologie von τ_d auf A mit jener Topologie überein, die von der Einschränkung der Metrik auf $A \times A$ als metrische Topologie erzeugt wird. (Beweis als Übungsaufgabe.)

2.22. Ordnungstopologien: Sei X eine Menge und $\leq$ eine Totalordnung[1] auf X. Sind $a, b \in X$, dann schreiben wir wie üblich $a < b$, falls $a \leq b$ und $a \neq b$ gilt.

Für $a, b \in X$ mit $a \leq b$ definieren wir die „Intervalle“ $[a, b] := \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$, $[a, b[:= \{x \in X \mid a \leq x < b\}$ usw., sowie $]-\infty, b[:= \{x \in X \mid x < b\}$, $]-\infty, b] := \{x \in X \mid x \leq b\}$ und $]a, \infty[:= \{x \in X \mid a < x\}$, $[a, \infty[:= \{x \in X \mid a \leq x\}$.

Wir verwenden das System

$$\mathcal{S} := \{\,]-\infty, b[\mid b \in X\} \cup \{\,]a, \infty[\mid a \in X\}$$

als Subbasis für eine Topologie gemäß Proposition 2.17, die wir als *Ordnungstopologie* $\tau_{\leq}$ auf X bezeichnen.

Es gilt stets $]-\infty, a[,]a, \infty[\in \mathcal{S} \subseteq \tau$ und weiters ist $]a, b[$ stets $\tau_{\leq}$-offen für $a \leq b$, weil wir $]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, \infty[$ schreiben können.

Beispiele: 1) Auf $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Ordnung ergibt $\tau_{\leq}$ die diskrete Topologie. Hier sind übrigens „abgeschlossene Intervalle“ auch „offene Intervalle“, z.B. $[1, 2] =]0, 3[$.

2) Auf $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung $\leq$ ergibt $\tau_{\leq}$ die euklidische Topologie τ_e: Wegen $\mathcal{S} \subseteq \tau_e$ ist $\tau_{\leq} \subseteq \tau_e$ und aus Beispiel 2.18 folgt auch $\tau_e \subseteq \tau_{\leq}$; also gilt $\tau_{\leq} = \tau_e$.

2.23. Beispiel (Der Ordinalzahlraum): Sei X eine überabzählbare Menge mit einer *Wohlordnung* $\leq$, d.h. $\leq$ ist eine Totalordnung mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. (Nach einem Satz von Zermelo kann unter der Annahme des Auswahlaxioms jede Menge wohlgeordnet werden; siehe Appendix.)
In einer wohlgeordneten Menge besitzt jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum, nämlich das Minimum der Menge aller oberen Schranken.

Wir bezeichnen mit 0 das kleinste Element von X bzgl. $\leq$, in Kurzschreibweise $0 := \min X$. Weiters sei $Y := \{y \in X \mid [0, y] \text{ ist überabzählbar}\}$. Es gilt $X = \bigcup_{y \in X} [0, y]$ und $[0, y_1] \subseteq [0, y_2]$ für $y_1 \leq y_2$. Wegen der Überabzählbarkeit von X gibt es daher ein $y \in X$, sodass $[0, y]$ überabzählbar ist, d.h. $Y \neq \emptyset$. Wir setzen nun $\omega_1 := \min Y$ und

$$\Omega := [0, \omega_1] = \{x \in X \mid 0 \leq x \leq \omega_1\}.$$

Nach Konstruktion gilt also: (a) ω_1 ist das größte Element von Ω,
(b) $\forall \alpha \in \Omega$ mit $\alpha < \omega_1$ ist die Menge $[0, \alpha]$ abzählbar.

Bemerkung: ω_1 ist die kleinste überabzählbare Ordinalzahl und stimmt weiters auch mit der kleinsten überabzählbaren Kardinalzahl überein.

[1] d.h. eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation und je zwei Elemente sind vergleichbar.

Wir bezeichen mit $\leq$ auch die Einschränkung der Wohlordnung auf Ω und erhalten als Subbasis $\mathcal{S}$ für die Ordnungstopologie auf Ω alle Mengen der Form

$$[0,\alpha[\,=\,]-\infty,\alpha[\text{ und }]\alpha,\omega_1]\,=\,]\alpha,\infty[\quad (\alpha \in \Omega).$$

Der dadurch definierte topologische Raum $(\Omega,\tau_{\leq})$ heißt *Ordinalzahlraum.*

Wir setzen $\Omega_0 := \Omega \setminus \{\omega_1\} = [0,\omega_1[$ und geben zwei grundlegende Eigenschaften dieser Menge an:

- Ist $A \subseteq \Omega_0$ eine nichtleere abzählbare Teilmenge, so gilt $\sup A < \omega_1$.

  Beweis: A ist jedenfalls durch ω_1 nach oben beschränkt, daher existiert $\sup A$. Für die Menge $B := \{\beta \in \Omega \mid \exists \alpha \in A\colon \beta \leq \alpha\}$ gilt $B = \bigcup_{\alpha\in A}[0,\alpha]$, daher ist sie als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen selbst abzählbar und es gilt $A \subseteq B \neq \Omega$. Wegen der Wohlordnungseigenschaft von $\leq$ existiert $\gamma := \min \Omega \setminus B$ und für alle $\alpha \in A$ gilt $\alpha < \gamma$. Daher gilt $\sup A \leq \gamma$.

  Laut Konstruktion ist für $\beta \in \Omega$ die Bedingung $\beta \in B$ äquivalent zu $\beta < \gamma$, daher gilt $[0,\gamma] = B \cup \{\gamma\}$ und diese Menge ist sicher abzählbar. Daher muss $\gamma < \omega_1$ gelten und somit $\sup A \leq \gamma < \omega_1$. $\square$

- Es gilt $\omega_1 \in \overline{\Omega_0}$. (Wegen $\omega_1 \notin \Omega_0$ ist ω_1 also ein Häufungspunkt von Ω_0.)

  Beweis: Dies folgt aus $]\alpha,\omega_1] \cap \Omega_0 =]\alpha,\omega_1[\neq \emptyset$ für alle $\alpha < \omega_1$, weil $\{\,]\alpha,\omega_1] \mid \alpha < \omega_1\}$ eine Umgebungsbasis bei ω_1 ist. $\square$

3 Stetigkeit; Konstruktion topologischer Räume

Mit nur geringfügiger Übertreibung darf man sagen, dass die Topologie als Teilgebiet der Mathematik im wesentlichen entwickelt wurde, um den Begriff der Stetigkeit angemessen flexibel beschreiben und studieren zu können. Wir abstrahieren dazu von der Charakterisierung der Stetigkeit für Abbildungen zwischen metrischen Räumen mit Hilfe von Kugelumgebungen und gelangen zum folgenden Begriff.

3.1. Definition: Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig im Punkt* $x \in X$, falls gilt: Für jede Umgebung V von $f(x)$ (in Y) gibt es eine Umgebung U von x (in X), sodass $f(U) \subseteq V$ gilt.
(Es genügt, hier jeweils Umgebungsbasen statt der gesamten Umgebungssysteme zu betrachten[1].)

Die Bedingung $f(U) \subseteq V$ ist gleichwertig mit $f^{-1}(V) \supseteq U$ und Obermengen von Umgebungen sind Umgebungen, sodass wir die definierende Bedingung der Stetigkeit von f in x auch so formulieren können: Urbilder von Umgebungen von $f(x)$ sind Umgebungen von x.

Schließlich sagen wir f sei *stetig (auf X)*, falls f stetig in jedem Punkt aus X ist.

3.2. Theorem: Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig (auf X),

(ii) für jede offene Teilmenge $B \subseteq Y$ ist $f^{-1}(B)$ ist offen in X,

(iii) für jede abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq Y$ ist $f^{-1}(F)$ ist abgeschlossen in X,

(iv) für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Bemerkung: Es ist weiters gleichwertig, Eigenschaft (ii) nur für Mengen B aus einer Subbasis der Topologie von Y zu verlangen.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Für jedes $x \in f^{-1}(B)$ ist B eine (offene) Umgebung von $f(x)$. Daher gibt es eine Umgebung U von x mit $U \subseteq f^{-1}(B)$. Also ist $f^{-1}(B)$ offen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $Y \setminus F$ ist offen, daher ist $f^{-1}(Y \setminus F)$ offen und somit $f^{-1}(F) = X \setminus \big(X \setminus f^{-1}(F)\big) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$ abgeschlossen.

[1]Speziell die Menge aller offenen Umgebungen bildet immer eine Umgebungsbasis (vgl. Beispiel 1) in 2.5).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Wir zeigen, dass für jede abgeschlossene Teilmenge F von Y mit $f(A) \subseteq F$ auch $f(\overline{A}) \subseteq F$ gilt, dann folgt die Behauptung aus der Definition des Abschlusses: $f^{-1}(F)$ ist abgeschlossen und aus $f(A) \subseteq F$ folgt $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(F)$, also gilt $\overline{A} \subseteq f^{-1}(F)$ und weiters $f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(F)) \subseteq F$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Indirekt. Es sei $x \in X$ und V eine Umgebung von $f(x)$ in Y, sodass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Daher gilt $U \cap (X \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x, somit gilt $x \in \overline{E}$ für $E := X \setminus f^{-1}(V)$.

Wir erhalten nun $f(x) \in f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)} = \overline{f(X \setminus f^{-1}(V))}$, daher $V \cap f(X \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$. Letzteres ist aber ein Widerspruch, weil es zu $y \in f(X \setminus f^{-1}(V))$ ein $x_0 \in X \setminus f^{-1}(V)$ mit $f(x_0) = y$ geben muss, d.h. $x_0 \in X$ mit $y = f(x_0) \notin V$. □

3.3. Korollar: Seien X, Y, Z topologische Räume und $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ stetige Abbildungen, dann ist $g \circ f \colon X \to Z$ stetig.

Beweis: $C \subseteq Z$ offen $\Rightarrow$ $g^{-1}(C)$ offen in Y $\Rightarrow$ $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ offen in X. □

3.4. Definition: Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *dicht* in X, wenn $\overline{A} = X$ gilt.

Zum Beispiel sind sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

3.5. Korollar: Es seien X und Y topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung. Ist A dicht in X, dann ist $f(A)$ dicht in Y.

Beweis: Aus der Stetigkeit von f folgt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ und die Surjektivität von f besagt $f(X) = Y$, d.h. zusammen $\overline{f(A)} \supseteq f(\overline{A}) = f(X) = Y$, also $\overline{f(A)} = Y$ □

Wir zeigen in der folgenden Proposition, dass Einschränkungen stetiger Funktionen stetig bzgl. der Spurtopologie sind und geben weiters eine Version für das „Zusammenstückeln" stetiger Funktionen an.

3.6. Proposition: Es seien X und Y topologische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Ist f stetig und $A \subseteq X$, dann ist auch die Einschränkung $f|_A \colon A \to Y$ stetig bzgl. der Spurtopologie auf A.

(ii) Die Teilmengen $A, B \subseteq X$ seien beide offen oder beide abgeschlossen und es gelte $X = A \cup B$. Ist sowohl $f|_A$ als auch $f|_B$ stetig (jeweils bzgl. der Spurtopologie), dann ist f stetig.

Beweis: (i) Ist C offen in Y, so ist $f^{-1}(C)$ offen in X und daher weiters $(f|_A)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap A$ offen in A. Also ist $f|_A$ stetig bzgl. der Spurtopologie auf A.

(ii) Wir zeigen die Variante für offene Teilmengen A, B (für A, B abgeschlossen verläuft der Beweis analog): Wegen $X = A \cup B$ gilt die Relation $f^{-1}(D) = (f|_A)^{-1}(D) \cup (f|_B)^{-1}(D)$ für jede Teilmenge $D \subseteq Y$.

Ist C offen in Y, dann ist zunächst $(f|_A)^{-1}(C)$ offen in A und $(f|_B)^{-1}(C)$ offen in B. Daher gibt es offene Teilmengen G, H in X, sodass $(f|_A)^{-1}(C) = G \cap A$ und $(f|_B)^{-1}(C) = H \cap B$ gilt. Nachdem A und B offen sind, sind auch die beiden Durchschnitte $G \cap A$ und $H \cap B$ offen. Somit ist auch $f^{-1}(C) = (f|_A)^{-1}(C) \cup (f|_B)^{-1}(C)$ offen in X. Also ist f stetig. $\square$

Wir kommen nun quasi zu den „Isomorphismen" für die Theorie der topologischen Räume:

3.7. Definition: Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, falls gilt:

(a) f ist stetig, (b) f ist bijektiv und (c) die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon Y \to X$ ist stetig.

Die topologischen Räume X und Y heißen dann *homöomorph* und wir schreiben $X \cong Y$.

3.8. Bemerkung: 1) Wir erinnern daran, dass die Inverse einer stetigen bijektiven Abbildung im Allgemeinen nicht stetig ist. Betrachte z.B. $X = [0,1] \cup]2,3]$ und $Y = [0,2]$ jeweils mit der Spurtopologie der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ und die stetige bijektive Abbildung $f\colon X \to Y$, gegeben durch $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq 1$ und $f(x) = x - 1$ für $2 < x \leq 3$. Die Inverse $f^{-1}\colon Y \to X$ erfüllt $f^{-1}(y) = y$ für $0 \leq y \leq 1$, $f^{-1}(y) = y + 1$ für $1 < y \leq 2$ und hat bei $y = 1$ eine Sprungstelle.

2) Der Begriff des Homöomorphismus kann als Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume aufgefasst werden. Eine Eigenschaft topologischer Räume wird *topologisch* genannt, falls sie durch Homöomorphismen übertragen wird, d.h. falls gilt: X hat Eigenschaft $\mathcal{E}$ und $X \cong Y \implies Y$ hat Eigenschaft $\mathcal{E}$.

3.9. Theorem: Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist ein Homöomorphismus,

(ii) für $A \subseteq X$ gilt: $f(A)$ ist offen in $Y \iff A$ ist offen in X,

(iii) für $B \subseteq X$ gilt: $f(B)$ ist abgeschlossen in $Y \iff B$ ist abgeschlossen in X.

(Beweis als Übungsaufgabe.)

3.10. Beispiel: Jeweils mit der euklidischen Topologie von $\mathbb{R}$ oder deren Spurtopologie gilt:

- für $a < b$ ist $]a,b[\cong]0,1[$ mittels $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$,
- $]1,\infty[\cong]0,1[$ mittels $x \mapsto \frac{1}{x}$,
- $\mathbb{R} \cong]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ mittels $x \mapsto \arctan(x)$.

3.11. Kartesische Produkte von Mengen: Für endliche viele Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \colon x_i \in X_i\}$$
$$= \{x \colon \{1, \dots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \colon x_i \in X_i\},$$

wobei x_i mit $x(i)$ identifiziert wurde.

Für eine beliebige nichtleere Indexmenge I statt $\{1, \dots, n\}$ ist das kartesische Produkt von Mengen X_i $(i \in I)$ definiert durch (vgl. Appendix)

$$\prod_{i \in I} X_i := \{x \colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I : x(i) \in X_i\}.$$

Zur Notation von $x \in \prod_{i \in I} X_i$ verwenden wir meistens die Schreibweisen $x_i := x(i)$ und $x = (x_i)_{i \in I}$ und nennen x_i auch die i-te Koordinate von x.

Für jedes $j \in I$ definieren wir die *j-te Projektionsabbildung* $\pi_j \colon \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ durch $\pi_j(x) := x_j$ $(= x(j))$.

Bemerkungen: 1) Nach dem Auswahlaxiom ist $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, falls keines der X_i leer ist. Daher ist in dem Fall π_j stets surjektiv.
2) Ist $X_i \subseteq Y_i$ für jedes i, dann folgt $\prod_{i \in I} X_i \subseteq \prod_{i \in I} Y_i$.

Beispiele: 1) Für $I = \mathbb{N}$ und $X_i = X$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ergibt sich $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ und daher als kartesisches Produkt einfach

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} X = X^{\mathbb{N}},$$

also die Menge aller Folgen in X.

2) Für $I = \mathbb{R}$ und $X_i = \mathbb{R}$ für jedes $i \in I$ ergibt sich

$$\prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R} = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},$$

d.h. die Menge aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hier entspricht also der Funktionswert $f(x)$ der x-ten Koordinate von f und die Projektion π_x ist die Auswertung einer Funktion bei x.

Wir wollen nun eine Topologie auf dem kartesischen Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ einführen, die aus den Topologien der einzelnen X_i entspringt und zum Beispiel für $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die euklidische Topologie des $\mathbb{R}^2$ ergibt.

Ein naheliegender Ansatz wäre zunächst, als Basis das Mengensystem $\mathcal{B}_{\text{box}} := \{\prod_{i \in I} U_i \mid \forall i \in I \colon U_i \text{ ist offen in } X_i\}$ zu nehmen, denn es erfüllt die geforderten Eigenschaften in Theorem 2.14(ii) und definiert die sogenannte *Box-Topologie*. Diese stellt sich aber für viele wichtige Konstruktionen als zu fein heraus (erlaubt also „zu viele offene Mengen"), falls die Indexmenge I unendlich ist. Zum Beispiel ist die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $f(t) := (t,t,t,\ldots)$ nicht stetig, wenn auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ die Box-Topologie betrachtet wird, obwohl jede der Abbildungen $\pi_n \circ f$ stetig $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist: Es ist nämlich $f(0) = (0,0,\ldots)$ und $U := \prod_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ eine Umgebung von $(0,0,\ldots)$, für die aber das Urbild $f^{-1}(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ keine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$ ist.

3.12. Definition: Es sei I eine nichtleere Menge und für jedes $i \in I$ sei X_i ein topologischer Raum. Dann erfüllt das Mengensystem

$$\mathcal{B} := \{\prod_{i\in I} U_i \mid \exists J \subseteq I, J \text{ endlich}\colon U_i \text{ offen in } X_i \text{ für } i \in J,\ U_i = X_i \text{ für } i \notin J\}$$

die Eigenschaften einer Basis aus Theorem 2.14(ii) (Beweis als Übungsaufgabe) und definiert die *Produkttopologie* τ_{prod} auf $\prod_{i\in I} X_i$.

Es genügt natürlich auch, für $i \in J$ jeweils U_i aus einer gegeben Basis in X_i zu nehmen.

Die Mengen aus $\mathcal{B}$ können auch mittels Urbildern unter Projektionen umgeschrieben werden, sodass wir

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(U_j) \mid J \subseteq I, J \text{ endlich}, U_j \text{ offen in } X_j\}$$

erhalten. Insbesondere sehen wir nun unmittelbar, dass

$$\mathcal{S} := \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid i \in I, U_i \text{ offen in } X_i\}$$

eine Subbasis für τ_{prod} ist.

3.13. Beispiel: Wie bereits bemerkt erhalten wir für $I = \mathbb{R}$ und $X_i = \mathbb{R}$ $(i \in I)$ als kartesischen Produkt gerade die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Als Subbasis für die Produkttopologie können demnach die Mengen der Form

$$B_{x_0,y_0;\varepsilon} := \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |g(x_0) - y_0| < \varepsilon\} = \pi_{x_0}^{-1}(U_\varepsilon(y_0))$$

mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ dienen.

Daher sehen typische offene Basisumgebungen einer Funktion $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wie folgt aus: Wir wählen zunächst eine endliche Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}$, z.B. $J = \{x_1, \ldots, x_N\}$, und zu jedem $x_l \in J$ ein offenes Intervall U_{x_l} um den Funktionswert $f(x_l)$, z.B. in der Form $U_{x_l} =]f(x_l) - \varepsilon_l, f(x_l) + \varepsilon_l[$ mit $\varepsilon_l > 0$; dann ist die entsprechende offene Umgebung von f gegeben durch

$$\widetilde{U}_{\{x_1,\ldots,x_N\};\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N}(f) := \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |g(x_l) - f(x_l)| < \varepsilon_l \ (l = 1, \ldots, N)\}.$$

Noch etwas einfachere Basisumgebungen erhalten wir mit $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ und J wie oben durch

$$U_{J,\varepsilon}(f) := \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in J\colon |g(x) - f(x)| < \varepsilon\} \subseteq \widetilde{U}_{J;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N}(f).$$

3.14. Definition: Es seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn sie offene (bzw. abgeschlossene) Teilmengen von X in offene (bzw. abgeschlossene) Teilmengen von Y überführt.

3.15. Proposition: Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Dann gilt:

(i) f ist offen $\iff$ f^{-1} ist stetig,

(ii) f ist ein Homöomorphismus $\iff$ f ist stetig und offen,

(iii) f ist ein Homöomorphismus $\iff$ f ist stetig und abgeschlossen.

Beweis: Weil f bijektiv ist, bedeutet nach Theorem 3.2 die Offenheit (bzw. Abgeschlossenheit) von f gerade die Stetigkeit von f^{-1}. Daraus folgen alle drei Aussagen unmittelbar. $\square$

3.16. Proposition: Es sei $\prod_{i\in I} X_i$ mit der Produkttopologie ausgestattet, dann ist für jedes $j \in I$ die Projektion $\pi_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ stetig und offen.

Beweis: Sei $V \subseteq X_j$ offen, dann ist $\pi_j^{-1}(V) = \prod_{i\in I} V_i$, wobei $V_i = X_i$ für $i \neq j$ und $V_j = V$ gilt. Daher ist $\pi_j^{-1}(V)$ nach Definition der Produkttopologie offen. Also ist π_j stetig.

Wir weisen nun nach, dass π_j offen ist. Dazu genügt es, zu zeigen, dass $\pi_j(B)$ offen ist in X_j für jede Menge B aus der Basis $\mathcal{B}$ der Produkttopologie. Sei also $B = \bigcap_{k\in K} \pi_k^{-1}(U_k)$, wobei $K \subseteq I$ eine endliche Teilmenge ist und U_k offen in X_k für $k \in K$. Dann ist $\pi_j(B) = X_j$, falls $j \notin K$, und $\pi_j(B) = U_j$, falls $j \in K$, also in jedem Fall offen in X_j. $\square$

3.17. Bemerkung: Die Projektionen sind zwar nach der eben bewiesenen Proposition stets offen, aber im Allgemeinen nicht abgeschlossen, wie das folgende einfache Beispiel lehrt: Als Übungsaufgabe überlegt man sich leicht, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$ bzgl. der euklidischen Topologien auf jedem Faktor gerade die euklidische Topologie der Ebene ist. Der Hyperbelast $A := \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und für sein Bild unter der Projektion $\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf die x-Achse erhalten wir $\pi_1(A) =]0, \infty[$, also keine abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{R}$.

3.18. Theorem: Sei I eine nichtleere Menge und X_i ein topologischer Raum für jedes $i \in I$. Die Produkttopologie τ_{prod} ist die gröbste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ bezüglich der alle Projektionen π_j $(j \in I)$ stetig sind.

Beweis: Stetigkeit der Projektionen bzgl. τ_{prod} wurde in der obigen Proposition gezeigt. Sei nun τ eine beliebige Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, sodass alle π_j $(j \in I)$ stetig sind. Dann ist für jedes $j \in I$ und für jede offene Teilmenge U_j in X_j das Urbild $\pi_j^{-1}(U_j)$ τ-offen im Produkt $\prod_{i\in I} X_i$. Daher enthält τ die Subbasis $\mathcal{S}$ der Produkttopologie und somit gilt $\tau_{\text{prod}} \subseteq \tau$. $\square$

Im Lichte dieses Theorems lässt sich die grundlegende Konstruktion der Produkttopologie mittels einer Subbasis aus Urbildern von offenen Mengen auf allgemeinere Situationen übertragen.

3.19. Definition: Seien I, X nichtleere Mengen und für jedes $i \in I$ sei X_i ein topologischer Raum und $f_i \colon X \to X_i$ eine Abbildung. Die *initiale Topologie* auf X bezüglich der Familie f_i $(i \in I)$ ist definiert durch die Subbasis aus Mengen der Form $f_i^{-1}(U_i)$, wobei $i \in I$ und U_i offen in X_i ist.

3.20. Bemerkung: 1) Die initiale Topologie ist daher die gröbste Topologie, sodass alle f_i stetig sind. (Die Stetigkeit der f_i ist in die Definition der Subbasis eingebaut; und jede Topologie, die Stetigkeit aller f_i erlaubt, muss zumindest die Mengen dieser Subbasis enthalten.)

2) Mit $f_i = \pi_i$ und $X = \prod_{i \in I} X_i$ ergibt sich die Produkttopologie als die initiale Topologie bzgl. der Projektionen.

3) Sei Z ein topologischer Raum und $A \subseteq Z$. Mit $X = A$, $I = \{1\}$, $X_1 = Z$ und $f_1 = \iota \colon A \hookrightarrow Z$ die Inklusionsabbildung erhalten wir als Basismengen für die initiale Topologie auf A einfach $\iota^{-1}(G) = G \cap A$ mit G offen in Z; also ist hier die initiale Topologie gerade die Spurtopologie auf A.

Treten initiale Topologien im Zielraum einer Abbildung auf, so kann die Stetigkeit einfach durch Verknüpfung mit den einzelnen f_i überprüft werden. Das ist die Verallgemeinerung davon, dass die Stetigkeit einer vektorwertigen Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{R}^m \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ äquivalent zur Stetigkeit der einzelnen Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n \colon U \to \mathbb{R}$ ist.

3.21. Theorem: Die Menge X trage die initiale Topologie bzgl. $f_i \colon X \to X_i$ $(i \in I)$, weiters sei Y ein topologischer Raum und $f \colon Y \to X$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig,

(ii) für jedes $i \in I$ ist $f_i \circ f \colon Y \to X_i$ stetig.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt, weil die Verknüpfung stetiger Funktionen setig ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen, dass die Urbilder unter f von Subbasiselementen der initialen Topologie offen in Y sind, dann ist die Stetigkeit von f gezeigt. Sei $i \in I$ und U_i offen in X_i, dann ist $f^{-1}(f_i^{-1}(U_i)) = (f_i \circ f)^{-1}(U_i)$ und diese Menge ist offen, weil $f_i \circ f$ stetig ist. $\square$

3.22. Korollar: Sei Y ein topologischer Raum, $\prod_{i \in I} X_i$ trage die Produkttopologie und sei $f \colon Y \to \prod_{i \in I} X_i$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I\colon\ \pi_i \circ f \colon Y \to X_i \ \text{ ist stetig.}$$

Die Abbildung $\pi_i \circ f$ wird auch als i-te Komponentenfunktion von f bezeichnet.

Beweis: Setze $f_i = \pi_i$ im obigen Theorem. $\square$

3.23. Bemerkung: Gewissermaßen dual zur initialen Topologie gibt es auch das Konzept der *finalen Topologie* auf einer Menge Y für die Situation mit einer Familie von Abbildungen $f_i \colon X_i \to Y$ $(i \in I)$. Sie lässt sich dadurch charakterisieren, dass eine Abbildung $f \colon Y \to Z$ in einen topologischen Raum Z genau dann stetig ist, wenn $f \circ f_i$ für alle $i \in I$ stetig ist.

Eine Teilmenge $B \subseteq Y$ wird dabei als offen erklärt, falls für $i \in I$ die Menge $f_i^{-1}(B)$ offen in X_i ist. Weiters ist die finale Topologie gerade die feinste Topologie auf Y, sodass alle $f_i \colon X_i \to Y$ stetig sind.

Ein wichtiger Spezialfall davon ist der Quotient $Y := X/\backsim$ eines topologischen Raumes X nach einer Äquivalenzrelation $\backsim$ mit der kanonischen Surjektion $q \colon X \to Y$, die $x \in X$ auf die Klasse von x bzgl. $\backsim$ abbildet; die finale Topologie auf Y mit $I = \{1\}$, $X_1 = X$ und $f_1 = q$ heißt *Quotiententopologie*; $G \subseteq Y$ ist offen, falls $q^{-1}(G)$ offen in X ist. Weiters ist eine Abbildung $f \colon Y \to Z$ in einen topologischen Raum Z genau dann stetig, wenn $f \circ q \colon X \to Z$ stetig ist.

Ein einfaches Beispiel ist $X = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie und $x \backsim y$, falls $y - x$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Dann können wir den Quotienten mit $Y = S^1$ identifizieren und die Quotientenabbildung mit $q \colon \mathbb{R} \to S^1$, $q(x) = (\cos(x), \sin(x))$. Die Quotiententopologie auf S^1 entspricht hier der Spurtopologie von $\mathbb{R}^2$ auf S^1, wie man sich an Hand von „intervallartigen“ offenen Umgebungen von Punkten am Kreisbogen überlegen kann.

4 Zusammenhängende Räume

4.1. Definition: Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = U \cup V$ mit offenen, nichtleeren, disjunkten Mengen $U, V \subseteq X$ gibt. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn A als topologischer Raum mit der Spurtopologie zusammenhängend ist.

4.2. Bemerkung: Ist X nicht zusammenhängend, so gibt es also nichtleere offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $X = U \cup V$. Daher sind $U = X \setminus V$ und $V = X \setminus U$ auch abgeschlossen, also beide Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen.

Ist umgekehrt $U \subseteq X$ nichtleer, $U \neq X$ und U sowohl offen als auch abgeschlossen, dann erhalten wir durch $X = U \cup (X \setminus U)$ eine disjunkte Zerlegung durch nichtleere offene Teilmengen, also ist X nicht zusammenhängend.

4.3. Beispiel: 1) Ein diskreter Raum X, der mindestens zwei Punkte besitzt, ist nicht zusammenhängend. Für $x \in X$ ergeben nämlich die Teilmengen $\{x\}$ und $X \setminus \{x\}$ eine Zerlegung durch nichtleere, offene und disjunkte Mengen.

Allgemeiner wird ein topologischer Raum *total unzusammenhängend* genannt, wenn darin keine Teilmenge aus mindestens zwei Punkten zusammenhängend ist. Wir haben also gerade gesehen, dass jeder diskrete Raum total unzusammenhängend ist. Die Umkehrung davon gilt nicht, wie das folgende Beispiel lehrt.

2) $\mathbb{Q}$ (mit der Spurtopologie der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$) ist total unzusammenhängend: Besitzt $A \subseteq \mathbb{Q}$ mindestens zwei Elemente $x, y \in A$ mit $x \neq y$, dann gibt es eine irrationale Zahl r, die zwischen x und y liegt. Daher ist dann $A = (]-\infty, r[\cap A) \cup (]r, \infty[\cap A)$ eine disjunkte Zerlegung durch Mengen, die nichtleer und in A offen sind.

3) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie sind die nichtleeren zusammenhängenden Teilmengen genau die Intervalle, insbesondere ist $\mathbb{R}$ zusammenhängend. (Übungsaufgabe.)
(Hier ein Hinweis für ein Lemma, das man auf dem Weg zu einem möglichen Beweis zeigen könnte. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt: A ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A, x < y \colon [x, y] \subseteq A$.)

4.4. Theorem: Ist $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und X zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Insbesondere ist damit der Zusammenhang eine topologische Eigenschaft, wird also unter Homöomorphismen vererbt.

Beweis: Angenommen $f\colon X \to Y$ ist stetig und $f(X)$ nicht zusammenhängend. Dann gibt es offene Teilmengen $U, V \subseteq Y$, sodass $U_1 := U \cap f(X)$, $V_1 := V \cap f(X)$ nichtleer und disjunkt sind und $f(X) = U_1 \cup V_1$ erfüllen. Es ist $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U)$ offen und nichtleer und Entsprechendes gilt für $f^{-1}(V_1)$. Weiters gilt $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(V_1) = f^{-1}(U_1 \cap V_1) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ sowie $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(V_1) = f^{-1}(U_1 \cup V_1) = f^{-1}(f(X)) = X$. Somit ist X nicht zusammenhängend. □

In Kombination mit der Erkenntnis, dass die zusammenhängenden nichtleeren Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind (vgl. 3) im obigen Beispiel), können wir als einfache Folgerung nun illustrieren, warum das vorige Theorem als Verallgemeinerung des aus der Analysis bekannten Zwischenwertsatzes betrachtet werden kann.

4.5. Korollar: Es sei X ein zusammenhängender Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Sind $x_1, x_2 \in X$ Punkte mit verschiedenen Funktionswerten, sagen wir $f(x_1) < f(x_2)$, dann gibt es zu jedem Zwischenwert $t \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) < t < f(x_1)$ einen Punkt $x \in X$ mit $f(x) = t$.

Beweis: Da X zusammenhängend und f stetig ist, muss auch $\emptyset \neq f(X) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend sein, also ist $f(X)$ ein Intervall. Daher gilt $]f(x_1), f(x_2)[\subseteq f(X)$. □

4.6. Proposition: Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum, dann gilt:

(i) X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen diskreten Raum Y konstant ist (d.h. $\exists y_0 \in Y\colon f(x) = y_0$ für jedes $x \in X$).

(ii) Der Abschluss einer zusammenhängenden Teilmenge von X ist zusammenhängend.

(iii) **Kleeblattlemma:** Ist $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen $A_i \subseteq X$ $(i \in I)$, sodass für ein gewisses $j_0 \in I$ stets $A_{j_0} \cap A_i \neq \emptyset$ für jedes $i \in I$ gilt, dann ist $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ zusammenhängend.

Beweis: (i) Sei X zusammenhängend. Ist $y_0 \in f(X)$ beliebig, dann ist $f^{-1}(\{y_0\})$ offen, abgeschlossen und nichtleer. Daher gilt $f^{-1}(\{y_0\}) = X$, also f konstant.

Ist umgekehrt X nicht zusammenhängend, dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $X = U \cup V$ durch nichtleere offene Mengen U, V. Wir definieren $f\colon X \to \{0, 1\}$ durch $f(x) = 0$ für $x \in U$, $f(x) = 1$ für $x \in V$, und versehen $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie. Die Einschränkungen $f|_U$ und $f|_V$ sind stetig, daher ist nach Proposition 3.6(ii) auch f stetig, aber sichtlich nicht konstant.

(ii) Für die leere Teilmenge ist die Aussage trivial, daher nehmen wir $\emptyset \neq A \subseteq X$ an. Sei Y ein diskreter Raum und $f\colon \overline{A} \to Y$ stetig. Dann ist auch $f|_A\colon A \to Y$ setig, also nach (i) konstant. Sei $y_0 \in Y$ mit $f(A) = \{y_0\}$. Weil f stetig ist, folgt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{\{y_0\}} = \{y_0\}$, also ist f konstant. Nach (i) ist somit $\overline{A}$ zusammenhängend.

(iii) Sei Y ein diskreter Raum und $f\colon A \to Y$ stetig. Für jedes $i \in I$ ist dann $f|_{A_i}$ stetig, also konstant, weil A_i zusammenhängend ist. Somit gibt es zu jedem $i \in I$ ein $y_i \in Y$ mit $f(A_i) = \{y_i\}$. Wegen $A_{j_0} \cap A_i \neq \emptyset$ muss daher $y_i = y_{j_0}$ für jedes $i \in I$ gelten, also ist f konstant. Somit folgt aus (i), dass A zusammenhängend ist. □

4.7. Definition: Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist nach dem Kleeblattlemma die Menge

$$C_x := \bigcup_{\substack{A \text{ zusammen-} \\ \text{hängend, } x \in A}} A$$

zusammenhängend und heißt die *Zusammenhangskomponente von x.*

Für $x \in X$ ist C_x die größte zusammenhängende Menge, die x enthält. Ein Raum X ist also genau dann total unzusammenhängend, wenn $C_x = \{x\}$ für jedes $x \in X$ gilt.

Die Zusammenhangskomponenten besitzen folgende Eigenschaften (Übungsaufgabe):

(i) Für jedes $x \in X$ ist C_x ist abgeschlossen,

(ii) $\forall x, y \in X \colon C_x = C_y$ oder $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Wir erhalten also eine Partition von X durch abgeschlossene Mengen.

In der Analysis und Differentialgeometrie spielt der folgende Zusammenhangsbegriff, der sich auf „Punkt zu Punkt Verbindungen“ durch Kurven stützt, eine große Rolle.

4.8. Definition: Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend* (oder auch bogenweise zusammenhängend), falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen stetigen Weg $c \colon [0,1] \to X$ mit Anfangspunkt $c(0) = x$ und Endpunkt $c(1) = y$ gibt.

4.9. Proposition: Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.

Beweis: Indirekt, angenommen X ist wegzusammenhängend, aber nicht zusammenhängend. Sei $X = U \cup V$ eine disjunkte offene Zerlegung durch nichtleere Teilmengen U, V. Wähle $x \in U$ und $y \in V$ beliebig, dann gibt es einen stetigen Weg $c \colon [0,1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge ist nun $B := c([0,1])$ zusammenhängend in X. Wegen $x \in B \cap U$, $y \in B \cap V$ sind $B \cap U$ und $B \cap V$ nichtleer, disjunkt und offen in B, weiters folgt $B = (B \cap U) \cup (B \cap V)$, im Widerspruch dazu, dass B zusammenhängend ist. □

4.10. Beispiel: 1) Konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind wegzusammenhängend, denn als stetige Verbindungswege können hier sogar Geradenstücke dienen. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend.

2) Im $\mathbb{R}^2$ ist die Menge $G := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in]0,1]\}$ wegzusammenhängend (als Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall). Ihr Abschluss ist $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1,1])$ und ist nicht wegzusammenhängend, aber als Abschluss einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend. (Übungsaufgabe.)

4.11. Bemerkung: Eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist (für einen Beweis siehe z.B. [Wil70, Corollary 27.6] oder auch Satz 161.4 im *Lehrbuch der Analysis, Teil 2* von H. Heuser). In der komplexen Analysis werden offene (weg)zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bekanntlich als *Gebiete* bezeichnet.

5 Konvergenz und Abzählbarkeitseigenschaften

Der geeignete Konvergenzbegriff für Folgen in topologischen Räumen ergibt sich wiederum aus der bewährten Verallgemeinerung der metrischen Kugelumgebungen zu Umgebungen.

5.1. Definition: Sei X ein topologischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$. Wir sagen, dass die Folge (x_n) gegen x *konvergiert*, in Zeichen $x_n \to x$, falls gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon x_n \in U.$$

(Es genügt hier natürlich auch, nur Basisumgebungen zu betrachten.)

5.2. Beispiel: 1) In einem metrischen Raum (M, d) ergibt sich daher die Konvergenz $x_n \to x$ bzgl. der metrischen Topologie τ_d genau dann, wenn $x_n \to x$ im Sinne der Metrik d gilt, weil die ε-Umgebungen von x eine Umgebungsbasis bei x bilden.

2) In $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit der Produkttopologie wie in Beispiel 3.13 beschrieben sind Basisumgebungen für $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ durch eine endliche Menge $J \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben als

$$U_{J,\varepsilon}(f) = \{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid |g(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in J\}.$$

Daher gilt für eine Folge (f_n) in $\mathbb{R}^\mathbb{R}$: $f_n \to f \ \Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R} \colon f_n(x) \to f(x)$.
Deshalb wird die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ *Topologie der punktweisen Konvergenz* genannt.

Wie wir früher gesehen haben, besitzen metrische Räume stets abzählbare Umgebungsbasen bei jedem ihrer Punkte (nämlich z.B. die Kugeln mit Radien $1, 1/2, 1/3, \ldots$). Eine solche Eigenschaft eines topologischen Raumes erlaubt es, in ihm mit Konvergenz und Stetigkeit im wesentlichen wie aus der Analysis gewohnt umzugehen.

5.3. Definition: Ein topologischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom* und wird als *AA1-Raum* bezeichnet, falls jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Jeder metrische Raum ist also ein AA1-Raum. Wie in metrischen Räumen können wir in AA1-Räumen den Abschluss durch Limiten von Folgen beschreiben.

5.4. Proposition: Sei X ein AA1-Raum, $E \subseteq X$ und $x \in X$. Dann gilt:

$$x \in \overline{E} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{es gibt eine Folge } (x_n) \text{ in } E \text{ (d.h. } x_n \in E\ \forall n) \text{ mit } x_n \to x.$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Sei $\mathcal{B}(x) = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis bei x. OBdA gilt $U_1 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq U_{n+1} \supseteq \ldots$ (andernfalls gehen wir zu Durchschnitten $\widetilde{U_n} := \bigcap_{j=1}^{n} U_j$ über).

Weil $x \in \overline{E}$ ist, gilt $U_n \cap E \neq \emptyset$ für alle n. Daher können wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n \cap E$ wählen, wodurch wir eine Folge (x_n) in E erhalten. Ist $U \in \mathfrak{U}(x)$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U_{n_0} \subseteq U$ und somit auch $x_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq U$ für $n \geq n_0$. Also konvergiert (x_n) gegen x.

$\boxed{\Leftarrow}$ Für jede Umgebung U von x gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U$ für $n \geq n_0$ gilt. Insbesondere ist also $U \cap E \neq \emptyset$. Also ist $x \in \overline{E}$. $\square$

Für Funktionen auf AA1-Räumen ist Stetigkeit äquivalent zur sogenannten *Folgenstetigkeit*, wie sie im folgenden Satz beschrieben ist.

5.5. Theorem: Sei X ein AA1-Raum, Y ein topologischer Raum und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig,

(ii) für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to x$ gilt auch $f(x_n) \to f(x)$ in Y.

(Wie der Beweis zeigen wird, gilt die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) allgemein.)

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei V eine Umgebung von $f(x)$, dann gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$. Zu U gibt es ein n_0, sodass $x_n \in U$ für $n \geq n_0$. Daher gilt weiters für $n \geq n_0$ auch $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$. Also konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei zunächst $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Umgebungsbasis bei x, die OBdA fallend geschachtelt ist, d.h. $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$ wie im Beweis der obigen Proposition. Wir nehmen indirekt an, es gebe einen Punkt $x \in X$, in dem f nicht stetig ist. Dann gibt es eine Umgebung V von $f(x)$, sodass $f(U_n) \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset$ für jedes n gilt. Wähle jeweils ein $x_n \in U_n$, sodass $f(x_n) \in f(U_n) \setminus V$ ist. Dann gilt $x_n \to x$, aber $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ kann nicht konvergent gegen $f(x)$ sein — ein Widerspruch. $\square$

Wir haben also gesehen, dass in AA1-Räumen wesentliche Grundelemente der Topologie durch Folgenkonvergenz charakterisiert werden können. Jenseits der AA1-Räume gelten allerdings die Aussagen der vorangegangenen beiden Sätze nicht mehr. Zumindest reicht die Folgenkonvergenz nicht mehr aus, um Abschlüsse und Stetigkeit adäquat zu beschreiben, wie wir in den folgenden Beispielen sehen werden.

5.6. Beispiel: 1) In $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz betrachten wir die Teilmenge

$$E := \{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid g(x) \neq 0 \text{ für nur endlich viele } x\}.$$

Es sei f die konstante Funktion mit $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f \notin E$, aber es gilt $f \in \overline{E}$: Für jede endliche Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}$ und für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist nämlich z.B. die Funktion $g(x) := 1$ für $x \in J$, $g(x) := 0$ sonst, im Durchschnitt $U_{J,\varepsilon}(f) \cap E$ enthalten.

Wir zeigen nun, dass es keine Folge (f_n) in E geben kann, die gegen f konvergiert: Für jedes $f_n \in E$ ist nämlich die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \neq 0\}$ endlich, daher ist die abzählbare

Vereinigung $T := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \neq 0\}$ höchstens abzählbar. Falls eine Funktion h der punktweise Limes der Folge (f_n) ist, dann ist für $x \in \mathbb{R} \setminus T$ der Wert $h(x) = \lim f_n(x) = 0$ festgelegt, also $h \neq f$.

2) Sei $\Omega = [0, \omega_1]$ der Ordinalzahlraum aus Beispiel 2.23 und $\Omega_0 = [0, \omega_1[$. Wir haben gesehen, dass $\omega_1 \in \overline{\Omega_0}$ gilt und $\sup A < \omega_1$ ist für jede abzählbare Teilmenge $A \subseteq \Omega_0$.

- Es gibt keine Folge (α_n) in Ω_0 mit $\alpha_n \to \omega_1$:

  Ist nämlich (α_n) eine Folge in Ω_0, dann ist die Menge aller Folgenglieder $A := \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Omega_0$ abzählbar und daher $\gamma := \sup A < \omega_1$. Somit ist $U :=]\gamma, \omega_1]$ eine Umgebung von ω_1, in der aber kein einziges α_n enthalten ist.

- Die Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(\alpha) := 0$ für $\alpha \in \Omega_0$ und $f(\omega_1) := 1$, ist folgenstetig, aber unstetig:

  Wir zeigen zunächst, dass f folgenstetig ist: Sei $\alpha \in \Omega$ und (α_n) eine Folge mit $\alpha_n \to \alpha$. Falls $\alpha = \omega_1$ ist, dann muss nach dem Obigen $\alpha_n = \omega_1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Daher ist $f(\alpha_n) = f(\omega_1) = f(\alpha)$ für fast alle n, also $f(\alpha_n) \to f(\alpha)$. Im Falle $\alpha < \omega_1$ ist höchstens endlich oft $\alpha_n = \omega_1$, daher $f(\alpha_n) = 0 = f(\alpha)$ für fast alle n, also $f(\alpha_n) \to f(\alpha)$.

  f ist unstetig: Es ist $\overline{\Omega_0} = \Omega$. Wäre f stetig, so müsste daher $\{0, 1\} = f(\Omega) = f(\overline{\Omega_0}) \subseteq \overline{f(\Omega_0)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$ gelten, was absurd ist.

Bemerkung: Die soeben besprochenen Phänomene in 1) und 2) zeigen, dass weder $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ noch Ω ein AA1-Raum sein kann; somit sind diese beiden Räume auch sicher nicht metrisierbar.

Nachdem also Folgen auf Grund ihrer „eingebauten Abzählbarkeit“ für allgemeine topologische Untersuchungen nicht ausreichend sind, kann man an eine angemessene Verallgemeinerung der Indexmenge $\mathbb{N}$ mit ihrer linearen Ordnungsstruktur denken. Dies wird uns auf den Begriff der *Netze* führen, die den Folgen formal noch recht ähnlich sind. In der rein topologischen Literatur findet man an ihrer Stelle noch öfter das abstraktere Konvergenzkonzept mittels sogenannter *Filter* (siehe dazu weiter unten), und zwar einerseits, weil Netze gerade durch ihre formale Ähnlichkeit mit Folgen im ungeübten Umgang zu manchen Trugschlüssen verleiten und andererseits, weil Filter zum Beispiel in Form von Umgebungssystemen in der Topologie quasi natürlich auftreten.

Zunächst aber zur Verallgemeinerung der total geordneten abzählbaren Indexmenge $(\mathbb{N}, \leq)$ einer Folge.

5.7. Definition: Eine *gerichtete Menge* ist ein Paar $(I, \leq)$, bestehend aus einer Menge I zusammen mit einer Relation $\leq$ auf I, die folgende Eigenschaften hat:

(R1) $\forall i \in I \colon i \leq i$ (Reflexivität),

(R2) $\forall i, j, k \in I \colon\ i \leq j$ und $j \leq k \implies i \leq k$ (Transitivität),

(R3) $\forall i, j \in I\ \exists k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

Eigenschaften (R1) und (R2) sind Teil der üblichen partiellen Ordnungsstrukturen, wobei wir hier die Antisymmetrie nicht verlangen (in der Literatur ist dies nicht ganz einheitlich gehandhabt, macht aber keinen Unterschied für die Konvergenzbegriffe selbst). Die Eigenschaft (R3) ermöglicht bei Netzen die passende Verallgemeinerung der Sprechweise „für $n \to \infty$“ bei Folgen und gibt in diesem Sinne eine „Richtung ins Unendliche“ an.

5.8. Beispiel: 1) $I = \mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnungsrelation ist eine gerichtete Menge.

2) Für jede nach oben unbeschränkte Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnungsrelation der reellen Zahlen ist $(I, \leq)$ gerichtet.

3) Sei $I =]0,1]$ mit der Relation $t_1 \widetilde{\leq} t_2 \;:\Leftrightarrow\; t_1 \geq t_2$; dann ist $(I, \widetilde{\leq})$ eine gerichtete Menge.

4) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$ beliebig. Dann ergibt das Umgebungssystem $I = \mathcal{U}(x)$ bei x zusammen mit der Relation $U \leq V \;:\Leftrightarrow\; V \subseteq U$ eine gerichtete Menge.

5) Sei $\mathcal{P}$ die Menge der endlichen Zerlegungen des Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, das sind endliche Mengen $P = \{t_0, \ldots, t_N\}$ mit $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_N = b$. Wir erinnern an die Feinheit einer Zerlegung $\delta(P) := \max_{0 \leq k \leq N-1} |t_{k+1} - t_k|$, also die maximale Länge der auftretenden Teilintervalle, und definieren eine Relation auf $\mathcal{P}$ durch $P_1 \leq P_2 \;:\Leftrightarrow\; \delta(P_1) \geq \delta(P_2)$. Dann ist $(\mathcal{P}, \leq)$ eine gerichtete Menge. (Hier gilt z.B. die Antisymmetrie der Relation nicht; dies lässt sich aber leicht erreichen, indem zusätzlich $P_1 \subseteq P_2$ verlangt wird.)

5.9. Definition: Es sei X eine Menge. Ein *Netz* (oder eine Moore-Smith-Folge) in X ist eine Abbildung $\widetilde{x} \colon I \to X$, wobei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge ist. Als Notation für das Netz verwenden wir $(x_i)_{i \in I}$, wobei $x_i := \widetilde{x}(i)$ gezetzt wird.

Eine *Verfeinerung* (oder ein Teilnetz) von $(x_i)_{i \in I}$ (oder ein *feineres Netz* als $(x_i)_{i \in I}$) ist gegeben durch eine Verknüpfung $\widetilde{x} \circ \varphi \colon H \to X$, wobei $(H, \leq_H)$ eine gerichtete Menge ist und die Abbildung $\varphi \colon H \to I$ folgende Eigenschaften erfüllt:
(a) $h_1 \leq_H h_2 \;\Rightarrow\; \varphi(h_1) \leq \varphi(h_2)$ (φ ist monoton),
(b) $\forall i \in I \; \exists h \in H \colon i \leq \varphi(h)$ (φ ist konfinal).
Wir verwenden für feinere Netze die Schreibweise $(x_{i_h})_{h \in H}$ mit $x_{i_h} := \widetilde{x}(\varphi(h))$.

Eine Teilfolge ist in diesem Sinne ein feineres Netz: Ist (x_n) eine Folge in X, dann entspricht eine Teilfolge ja genau der Angabe einer streng monoton wachsenden (daher konfinalen) Funktion $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die durch Wahl von $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ mittels $\varphi(k) = n_k$ definiert wird, und die in der Analysis übliche Schreibweise ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Aber Vorsicht: Nicht alle Teilnetze einer Folge sind Folgen! (Z.B. $(]0,1], \widetilde{\leq})$ als gerichtete Menge wie in Beispiel 3) oben und $\varphi_1 \colon]0,1] \to \mathbb{N}$, $\varphi_1(t) := \lfloor \frac{1}{t} \rfloor$ statt φ ergibt ein feineres Netz für jede Folge.)

In der Definition der Konvergenz und eines Häufungspunktes eines Netzes sind nach wie vor die aus der Analysis typischen Sprechweisen formal mit Hilfe der gerichteten Indexmenge umgesetzt: Konvergenz gegen einen Punkt, falls für eine beliebige gegebe Umgebung desselben das Netz „schließlich“ in dieser Umgebung ist; Häufungspunkt, falls für eine beliebige gegebe Umgebung desselben das Netz „immer wieder“ in dieser Umgebung ist.

5.10. Definition: Sei X ein topologischer Raum, $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X und $x \in X$.

(i) Das Netz $(x_i)_{i\in I}$ heißt *konvergent* gegen x, wir schreiben in dem Fall $x_i \to x$, falls gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists i_0 \in I\ \forall i \in I\colon\ i_0 \le i \ \Rightarrow\ x_i \in U.$$

(ii) Der Punkt x ist ein *Häufungspunkt* von $(x_i)_{i\in I}$, falls gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \forall i \in I\ \exists j \in I, i \le j\colon\ x_j \in U.$$

(In beiden Fällen genügt es natürlich, die Bedingungen mit Basisumgebungen zu prüfen.)

5.11. Beispiel: 1) Eine Folge in einem topologischen Raum konvergiert genau dann im Sinne der Netzkonvergenz, wenn sie als Folge gemäß Definition 5.1 konvergent ist.

2) Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\mathcal{B}(x)$ eine Umgebungsbasis bei x: Ähnlich wie im Beispiel 4) weiter oben nehmen wir $\mathcal{B}(x)$ als Indexmenge mit der Richtungsrelation $U_1 \le U_2 \ :\Leftrightarrow\ U_2 \subseteq U_1$. Wählen wir für jedes $U \in \mathcal{B}(x)$ ein $x_U \in U$, so erhalten wir ein Netz $(x_U)_{U\in\mathcal{B}(x)}$ in X.

Es gilt $x_U \to x$: Sei $V \in \mathcal{U}(x)$, dann gibt es ein $U_0 \in \mathcal{B}(x)$ mit $U_0 \subseteq V$. Für jedes $U \in \mathcal{B}(x)$ mit $U \ge U_0$ [d.h. $U \subseteq U_0$] gilt $x_U \in U \subseteq U_0 \subseteq V$.

3) **Riemann-Integrierbarkeit als Netzkonvergenz:** Es sei wieder $\mathcal{P}$ die Menge der endlichen Zerlegungen des Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten nun zusätzlich zu jeder Zerlegung $P = \{t_0, \ldots, t_N\}$ beliebige Zwischenvektoren $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ mit $t_{j-1} \le \xi_j \le t_j$ $(j = 1, \ldots, N)$. Auf der Menge

$$I := \{(P,\xi) \mid P \in \mathcal{P}, \xi \text{ Zwischenvektor zu } P\}$$

definieren wir eine Richtungsrelation wieder mit Hilfe der Feinheit von Zerlegungen durch

$$(P,\xi) \le (P',\xi') \quad :\Longleftrightarrow \quad \delta(P) \ge \delta(P')$$

(die Zwischenvektoren beeinflussen hier die Relation absichtlich nicht).

Für eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir das zugeordnete Riemann-Netz R_f in $\mathbb{R}$, also $R_f\colon I \to \mathbb{R}$, durch die Riemann-Summen

$$R_f(P,\xi) := \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \qquad \text{für } (P,\xi) = (\{t_0,\ldots,t_N\},(\xi_1,\ldots,\xi_N)) \in I.$$

Es gilt nun (vgl. z.B. Heusers *Lehrbuch der Analysis*, Satz 79.2):

$$f \text{ ist Riemann-integrierbar und } \int_a^b f(x)\,dx = \varrho \quad \Longleftrightarrow \quad R_f \text{ konvergiert in } \mathbb{R} \text{ gegen } \varrho.$$

Wenn wir konsequent das Wort Folge durch Netz und Teilfolge durch feineres Netz ersetzen, dann können wir entsprechende Varianten vieler bekannter Aussagen aus der Theorie der metrischen Räume auf allgemeine topologische Räume übertragen.

5.12. Proposition: Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz im topologischen Raum X und $x \in X$. Dann gilt:

(i) Ist $(x_i)_{i\in I}$ konvergent gegen x, dann konvergiert auch jedes feinere Netz gegen x,

(ii) x ist Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I} \iff$ es gibt ein feineres Netz, das gegen x konvergiert.

Beweis: (i) Übungsaufgabe.

(ii) $\boxed{\Rightarrow}$ Wir setzen $L := \{(i,U) \mid i \in I, U \in \mathfrak{U}(x), x_i \in U\}$ und $(i_1,U_1) \preceq (i_2,U_2) :\Leftrightarrow i_1 \leq i_2, U_2 \subseteq U_1$, dann ist sehr leicht zu sehen, dass $(L,\preceq)$ eine gerichtete Menge ist. Wir definieren $\varphi\colon L \to I$ durch $\varphi(i,U) := i$, was eine monotone und konfinale Abbildung ergibt, weil $(I,\leq)$ gerichtet ist. Wir zeigen, dass das feinere Netz $\widetilde{x}\circ\varphi$ gegen x konvergiert: Sei V eine Umgebung von x. Wähle ein $i_0 \in I$ mit $x_{i_0} \in V$. Dann ist $(i_0,V) \in L$ und für $(i,U) \succeq (i_0,V)$ gilt $i \geq i_0$, $U \subseteq V$ und somit $\widetilde{x}(\varphi(i,U)) = x_i \in U \subseteq V$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei vermöge $\varphi\colon H \to I$ ein feineres Netz $\widetilde{x}\circ\varphi$ definiert, das gegen x konvergiert, d.h. für jede Umgebung U von x gibt es ein $h_U \in H$, sodass $\widetilde{x}(\varphi(h)) \in U$ für alle $h \geq_H h_U$ gilt.

Nun sei eine Umgebung U von x und ein $i_0 \in I$ vorgegeben. Weil φ konfinal ist, gibt es ein $h_0 \in H$ mit $\varphi(h_0) \geq i_0$. Weiters gibt es ein $h_U \in H$ mit der Eigenschaft, dass aus $h \geq_H h_U$ stets $\widetilde{x}(\varphi(h)) \in U$ folgt. Wir wählen ein $h^* \in H$ mit $h^* \geq_H h_0$ und $h^* \geq_H h_U$. Setze $i^* := \varphi(h^*)$, dann folgt $i^* = \varphi(h^*) \geq \varphi(h_0) \geq i_0$ und wegen $h^* \geq_H h_U$ auch $x_{i^*} = \widetilde{x}(\varphi(h^*)) \in U$. Also ist x ein Häufungspunkt. $\square$

5.13. Proposition: Sei X ein topologischer Raum, $E \subseteq X$ und $x \in X$, dann gilt:

$$x \in \overline{E} \quad \iff \quad \text{es gibt ein Netz } (x_i)_{i\in I} \text{ in } E \text{ mit } x_i \to x.$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Für jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ ist $E \cap U \neq \emptyset$, somit können wir $x_U \in E \cap U$ wählen und erhalten ein Netz $(x_U)_{U\in\mathfrak{U}(x)}$ wie im Beispiel 2) oben, für das $x_U \to x$ gilt.

$\boxed{\Leftarrow}$ Zu beliebigem $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es ein $i_0 \in I$, sodass $x_i \in E \cap U$ für alle $i \geq i_0$ gilt; insbesondere ist $E \cap U \neq \emptyset$. Somit ist $x \in \overline{E}$. $\square$

5.14. Theorem: Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig in x,

(ii) für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X mit $x_i \to x$ folgt $f(x_i) \to f(x)$ in Y.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq V$. Zu U gibt es ein $i_0 \in I$, sodass $x_i \in U$ für $i \geq i_0$. Also folgt für $i \geq i_0$ auch $f(x_i) \in f(U) \subseteq V$. Daher gilt $f(x_i) \to f(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Indirekt, angenommen es gilt (ii), aber f ist nicht stetig bei x. Dann gibt es eine Umgebung V von $f(x)$ mit der Eigenschaft, dass für jede Umgebung U von x ein $x_U \in U$ existiert mit $x_U \notin f^{-1}(V)$, d.h. $f(x_U) \notin V$. Somit gilt (wie in Beispiel 2) oben) $x_U \to x$, daher zwingend $f(x_U) \to f(x)$, was aber im Widerspruch zu $f(x_U) \notin V$ steht. $\square$

Wir hatten am Anfang dieses Kapitels gesehen, dass Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \prod_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{R}$ bzgl. der Produkttopologie genau der punktweisen Konvergenz von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entspricht. Dies verallgemeinert sich entsprechend auf beliebige Produkträume und Netze darin, d.h. die Konvergenz von Netzen bzgl. einer Produkttopologie entspricht genau der koordinatenweisen Konvergenz.

5.15. Theorem: Sei $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ mit der Produkttopologie versehen, $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X und $x \in X$. Dann gilt:

$$x_i \to x \text{ in } X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \alpha \in \Lambda\colon \pi_\alpha(x_i) \to \pi_\alpha(x) \text{ in } X_\alpha.$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Für jedes $\alpha \in \Lambda$ ist $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ stetig und daher folgt $\pi_\alpha(x_i) \to \pi_\alpha(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sei $V = \pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\lambda_m}^{-1}(U_{\lambda_m})$ eine typische Basisumgebung von x im Produktraum. Für $j = 1, \ldots, m$ gilt: Wegen $\pi_{\lambda_j}(x_i) \to \pi_{\lambda_j}(x)$ gibt es ein $i_j \in I$, sodass $\pi_{\lambda_j}(x_i) \in U_{\lambda_j}$ für $i \geq i_j$. Durch Induktion folgt aus der Eigenschaft (R3) für gerichtete Mengen, dass es ein $i_0 \in I$ gibt mit $i_0 \geq i_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Nun gilt also für jedes $i \in I$ mit $i \geq i_0$ demnach $x_i \in \pi_{\lambda_j}^{-1}(U_{\lambda_j})$ $(j = 1, \ldots, m)$, d.h. $x_i \in V$. $\square$

Weitere Abzählbarkeitseigenschaften in topologischen Räumen

Neben abzählbaren Umgebungsbasen wie bei den AA1-Räumen sind auch andere Abzählbarkeitsbedingungen für viele konkrete Konstruktionen in der Topologie oder Analysis von Bedeutung.

5.16. Definition: Ein topologischer Raum erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* und wird als *AA2-Raum* bezeichnet, falls er eine abzählbare Basis für seine Topologie besitzt.

5.17. Eigenschaften und Beispiele zum Verhältnis von AA1 zu AA2:

(i) Jeder AA2-Raum ist auch ein AA1-Raum. Dies folgt aus Theorem 2.15

(ii) Ein überabzählbarer diskreter Raum ist ein AA1-Raum, der kein AA2-Raum sein kann: Jeder Punkt x darin besitzt nämlich die einelementige Umgebungsbasis $\{\{x\}\}$, während eine Basis der Topologie mindestens alle einpunktigen Teilmengen enthalten muss.

(iii) Teilräume von AA2-Räumen sind AA2-Räume (Definition der Spurtopologie).

Die AA2-Eigenschaft kann in manchen Fällen etwas schwierig zu überprüfen sein. Es gibt eine sehr nützliche einfachere Bedingung, die im Allgemeinen zwar schwächer ist, sich aber in metrischen Räumen sogar als äquivalent herausstellt.

5.18. Definition: Ein topologischer Raum heißt *separabel*, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

5.19. Einfache Eigenschaften und Beispiele separabler Räume:

(i) $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie ist separabel, weil z.B. $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Ein diskreter Raum ist genau dann separabel, wenn er abzählbar ist.

(iii) Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er AA2 ist. (Übungsaufgabe.)

(iv) Achtung: Im Allgemeinen sind Teilräume separabler Räume nicht notwendig separabel.
(Ein Beispiel ist die x-Achse im separablen Niemytzki-Raum (vgl. Übungen).

(v) Offene Teilräume separabler topologischer Räume sind separabel.
(Weil dann die „Spuren" offener Mengen auch offen in der ursprünglichen Topologie sind.)

(vi) Beliebige Teilräume separabler metrischer Räume sind separabel.
(Folgt aus (iii) und 5.17(iii).)

(vii) Ein separabler AA1-Raum muss im Allgemeinen nicht AA2 sein.
(Z.B. ist der Niemytzki-Raum AA1 und separabel, kann aber nach 5.17(ii),(iii) nicht AA2 sein, weil die x-Achse als Teilraum darin nicht AA2 ist. Ein weiteres Beispiel für einen separablen AA1-Raum, der nicht AA2 ist, ist die Sorgenfrey-Gerade; siehe z.B. [SS79].)

(viii) Jeder AA2-Raum ist separabel.
(Wähle einen Punkt aus jeder Menge einer abzählbaren Basis für die Topologie.)

Filter, Ultrafilter und ultrafeine Netze

Wie bereits weiter oben erwähnt, sind Filter zumindest in der mengentheoretischen Topologie fast die beliebtere Alternative zu Netzen. Wir geben hier einen kurzen Vergleich und nützen die abstrakte Eleganz der Filtertheorie aber gleich aus, um auch Ultrafilter und ultrafeine Netze einzuführen.

5.20. Definition: Es sei S eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ heißt *Filter* auf S, wenn gilt:

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,

(F3) für $A \subseteq S$ gilt: $F \in \mathcal{F}, F \subseteq A \implies A \in \mathcal{F}$.

Sind $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zwei Filter auf S, dann heißt $\mathcal{F}_1$ *feiner* als $\mathcal{F}_2$ (und $\mathcal{F}_2$ *gröber* als $\mathcal{F}_1$), wenn $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$ gilt.

5.21. Beispiel (Der Umgebungsfilter): Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist das Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$ ein Filter auf X. Dies folgt unmittelbar aus den Eigenschaften (U1), (U2) und (U4) von Umgebungssystemen.

5.22. Definition: Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist *konvergent* gegen x, wir schreiben $\mathcal{F} \to x$, falls $\mathcal{F}$ feiner als der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ist, d.h., wenn $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$ gilt.

5.23. Übersetzung zwischen Filtern und Netzen:

Von Netz zu Filter: Es sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X.
Für $i_0 \in I$ setze $B_{i_0} := \{x_i \mid i \geq i_0\}$, dann ist $\mathcal{F} := \{F \subseteq X \mid \exists i_0 \in I \colon B_{i_0} \subseteq F\}$ ein Filter, wie man leicht direkt überprüft. Wir nennen $\mathcal{F}$ den von (den Endabschnitten von) $(x_i)_{i\in I}$ erzeugten Filter.

Von Filter zu Netz: Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.
Wir setzen $I_{\mathcal{F}} := \{(x, F) \in X \times \mathcal{P}(X) \mid x \in F \in \mathcal{F}\}$ und führen darauf eine Relation durch $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2) \;:\Leftrightarrow\; F_2 \subseteq F_1$ ein. Es ist leicht zu zeigen, dass $(I_{\mathcal{F}}, \leq)$ eine gerichtete Menge ist. Wir definieren nun $\widetilde{x} \colon I_{\mathcal{F}} \to X$ durch $\widetilde{x}(x, F) := x$. Dann nennen wir $\widetilde{x}$ das auf $\mathcal{F}$ basierende Netz.

Eigenschaften der Übersetzung: Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$, dann gilt:

(i) Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in X konvergiert genau dann gegen x, wenn der von $(x_i)_{i\in I}$ erzeugte Filter gegen x konvergiert,

(ii) ein Filter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert genau dann gegen x, wenn das auf $\mathcal{F}$ basierende Netz gegen x konvergiert.

Die Beweise dieser beiden Aussagen sind Routineaufgaben, werden hier aber übersprungen.

Ein wesentlicher Vorteil der Filter oder Netze gegenüber dem Folgenbegriff ist die Existenz von „maximalen Verfeinerungen“ zu einem gegeben Filter oder Netz. Wir führen zunächst die entsprechenden Begriffe des Ultrafilters und des ultrafeines Netzes ein und zeigen später Aussagen zu deren Existenz.

5.24. Definition: Es sei X eine Menge. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt *Ultrafilter*, falls es keinen echt feineren Filter auf X gibt. (D.h.: für jeden Filter $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gilt $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.)

5.25. Lemma: Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $E \subseteq X$ gilt, dass entweder $E \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus E \in \mathcal{F}$ zutrifft.

Beweis: Sei zunächst $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und $E \subseteq X$.
Wir behaupten: $\big(\forall F \in \mathcal{F} \colon F \cap E \neq \emptyset\big)$ oder $\big(\forall F \in \mathcal{F} \colon F \cap (X \setminus E) \neq \emptyset\big)$.
Andernfalls existieren $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, sodass $F_1 \cap E = \emptyset$ und $F_2 \cap (X \setminus E) = \emptyset$ gilt. Dann ist aber $F_1 \cap F_2 = (F_1 \cap F_2) \cap (E \cup (X \setminus E)) \subseteq (F_1 \cap E) \cup (F_2 \cap (X \setminus E)) = \emptyset$ im Widerspruch zur Filtereigenschaft $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Somit können wir oBdA annehmen, dass $F \cap E \neq \emptyset$ für jede Filtermenge $F \in \mathcal{F}$ zutrifft. Es ist leicht zu zeigen, dass das Mengensystem $\mathcal{G} := \{G \subseteq X \mid \exists F \in \mathcal{F} : F \cap E \subseteq G\}$ ein Filter ist, der wegen $F \cap E \subseteq F$ feiner als $\mathcal{F}$ ist. Weiters ist $E \in \mathcal{G}$, weil stets $E \supseteq F \cap E$ gilt. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, muss $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ gelten und somit ist $E \in \mathcal{F}$.

Für die Umkehrung nehmen wir nun an, dass für jede Teilmenge $E \subseteq X$ entweder $E \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus E \in \mathcal{F}$ gilt. Ist $\mathcal{G}$ ein feinerer Filter als $\mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, so muss daher $X \setminus A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gelten. Aber $A \in \mathcal{G}$ und $X \setminus A \in \mathcal{G}$ ist im Widerspruch zur Filtereigenschaft $\emptyset \notin \mathcal{G}$. $\square$

5.26. Definition: Es sei X eine Menge. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X heißt *Ultranetz* (oder *ultrafeines* oder *universelles* Netz), falls für jede Teilmenge $E \subseteq X$ gilt: $(x_i)_{i \in I}$ ist schließlich in E oder $(x_i)_{i \in I}$ ist schließlich in $X \setminus E$.

Aus Lemma 5.25 folgt unmittelbar: Der oben angegebene Übersetzungsprozess zwischen Filtern und Netzen führt Ultranetze in Ultrafilter über und umgekehrt.

Wir kommen nun zur Existenz von hinreichend vielen Ultrafiltern bzw. Ultranetzen, die sich aus dem Auswahlaxiom ergibt.

5.27. Theorem: Es sei X eine Menge.

(i) Jeder Filter auf X ist in einem feineren Ultrafilter enthalten.

(ii) Jedes Netz in X besitzt ein feineres, ultrafeines Netz.

Beweis: (i) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf der Menge X. Es bezeichne Φ die Menge aller Filter auf X, die feiner als $\mathcal{F}$ sind. Wegen $\mathcal{F} \in \Phi$ ist Φ nicht leer und die Mengeninklusion $\subseteq$ definiert eine partielle Ordnung auf Φ. Ist $\Gamma \subseteq \Phi$ eine Kette in $(\Phi, \subseteq)$, so ist $\mathcal{T} := \bigcup_{\mathscr{E} \in \Gamma} \mathscr{E}$ ein Filter (leicht zu zeigen), also eine Oberschranke von Γ in Φ. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\mathcal{G}$ in $(\Phi, \subseteq)$, das somit ein Ultrafilter ist, der $\mathcal{F}$ enthält.

(ii) Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und bezeichne $\mathcal{F}$ den gemäß 5.23 von $(x_i)_{i \in I}$ erzeugten Filter auf X. Zu $\mathcal{F}$ existiert wegen (i) ein feinerer Ultrafilter $\mathcal{G}$. Wir übersetzen nun $\mathcal{G}$ zurück in eine Verfeinerung von $(x_i)_{i \in I}$. Hier reicht allerdings die vereinfachte Konstruktion aus 5.23 nun nicht aus, sondern muss zusätzlich an die Indexmenge I des ursprünglichen Netzes angepasst werden.

Wir definieren auf der neuen Indexmenge $H := \{(i, G) \in I \times \mathcal{G} \mid i \in I, G \in \mathcal{G}, x_i \in G\}$ die Relation $(i, G) \leq_H (i', G') :\Leftrightarrow i \leq i'$ und $G \supseteq G'$. Dadurch wird $(H, \leq_H)$ zur gerichteten Menge, denn (R1),(R2) sind klar und (R3) folgt so: zu $h_1 = (i_1, G_1) \in H$ und $h_2 = (i_2, G_2) \in H$ wähle zunächst $i_0 \in I$ mit $i_0 \geq i_1, i_2$ und setze $G_3 := G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$; wegen $B_{i_0} := \{x_i \mid i \geq i_0\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ist $B_{i_0} \cap G_3 \neq \emptyset$, daher gibt es $i_3 \geq i_0$ mit $x_{i_3} \in G_3$; mit $h_3 := (i_3, G_3)$ ist dann (R3) erfüllt. Die Abbildung $\varphi \colon H \to I$, $(i, G) \mapsto i$ ist monoton und konfinal (leicht zu zeigen) und definiert somit mittels $y_h := x_{\varphi(h)}$ ein Teilnetz $(y_h)_{h \in H}$ von $(x_i)_{i \in I}$. Es bleibt zu zeigen, dass $(y_h)_{h \in H}$ ein Ultranetz ist.

Sei $E \subseteq X$. Wegen der Ultrafiltereigenschaft von $\mathcal{G}$ dürfen wir oBdA annehmen, dass $E \in \mathcal{G}$ gilt. Fixiere $i_0 \in I$ beliebig, dann ist wegen $B_{i_0} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ wieder $B_{i_0} \cap E \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $j_0 \in I$ mit $x_{j_0} \in B_{i_0} \cap E$. Wir setzen $h_0 := (j_0, E)$, dann gilt für jedes $h = (i, G) \geq_H h_0$ nach Konstruktion $y_h = x_i \in G \subseteq E$. Somit ist (y_h) schließlich in E. $\square$

5.28. Proposition: Bilder von Ultranetzen sind Ultranetze, d.h. ist $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $(x_i)_{i \in I}$ ein Ultranetz in X, dann ist $(f(x_i))_{i \in I}$ ein Ultranetz in Y.

Beweis: Sei $B \subseteq Y$, dann ist (x_i) als Ultranetz schließlich in $f^{-1}(B)$ oder in $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$. Somit ist $(f(x_i))$ schließlich in B oder in $Y \setminus B$. $\square$

Bemerkung: Die Menge der Bilder der Mengen eines Filters unter einer Abbildung ergibt eine sogenannte Filterbasis in der Zielmenge. Der davon erzeugte Filter ist sozusagen der „Bildfilter“ und man kann zeigen, dass in diesem Sinne ein Ultrafilter auf einen Ultrafilter abgebildet wird.

5.29. Proposition: Hat ein Ultranetz in einem topologischen Raum einen Häufungspunkt, dann konvergiert es gegen diesen.

Beweis: Sei (x_i) ein Ultranetz im topologischen Raum X und $x \in X$ ein Häufungspunkt von (x_i). Für jede Umgebung U von x gilt, dass das Netz (x_i) immer wieder in U ist; nachdem (x_i) aber ein Ultranetz ist, muss es zudem schließlich in U oder $X \setminus U$ sein, daher ist es schließlich in U. Somit konvergiert (x_i) gegen x. $\square$

6 Trennungseigenschaften und normale Räume

6.1. Definition: Ein topologischer Raum X heißt

(i) T_1-*Raum*, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X, x \neq y \; \exists U \in \mathcal{U}(x) \; \exists V \in \mathcal{U}(y)\colon x \notin V \text{ und } y \notin U,$$

(ii) T_2- *oder Hausdorff-Raum*, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X, x \neq y \; \exists U \in \mathcal{U}(x) \; \exists V \in \mathcal{U}(y)\colon U \cap V = \emptyset.$$

Offensichtlich ist jeder T_2-Raum auch ein T_1-Raum. Beispiele von T_1-Räumen, die nicht T_2 sind, können als Übungsaufgabe konstruiert werden.

Die T_1-Eigenschaft eines topologischen Raumes X ist unter anderem äquivalent zur Forderung, dass für jedes $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen ist.

6.2. Proposition: Sei X ein topologischer Raum, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ein T_1-Raum,

(ii) jede einpunktige Teilmenge von X ist abgeschlossen,

(iii) für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt $A = \bigcap\limits_{\substack{G \text{ offen} \\ G \supseteq A}} G$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $x \in X$. Für jedes $y \in X$ mit $y \neq x$ gibt es eine Umgebung V mit $x \notin V$. Daher ist $X \setminus \{x\}$ offen, also $\{x\}$ abgeschlossen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es ist klar, dass A eine Teilmenge der angegebenen Schnittmenge ist. Für jedes $x \in X$ mit $x \notin A$ ist $X \setminus \{x\}$ eine offene Obermenge von A und es gilt

$$A = \bigcap_{x \in X \setminus A} X \setminus \{x\} \supseteq \bigcap_{\substack{G \text{ offen} \\ G \supseteq A}} G.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \in X$ beliebig, dann gilt $\{x\} = \bigcap\limits_{\substack{U \text{ offen}, \\ x \in U}} U$. Ist $y \in X$ mit $y \neq x$, dann gibt es also eine offene Menge U mit $x \in U$ und $y \notin U$. Nun kann man dasselbe Spiel mit vertauschten Rollen von x und y durchgehen und erhält auch eine offene Menge V mit $y \in V$ und $x \notin V$. □

Die etwas stärkere T_2-Eigenschaft zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass Grenzwerte von Netzen oder Filtern eindeutig sind. Daher treten in den Anwendungen der Topologie fast nur Hausdorff-Räume auf.

6.3. Theorem: Sei X ein topologischer Raum, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ein Hausdorff-Raum,

(ii) Grenzwerte von Netzen sind eindeutig, d.h. ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X und $x, y \in X$ mit $x_i \to x$ und $x_i \to y$, dann folgt $x = y$, (ebenso für Filter)

(iii) die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Wäre $x \neq y$, so gebe es Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $V \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Aus der Konvergenz folgt die Existenz von $i_1, i_2 \in I$ mit $x_i \in U$ für alle $i \geq i_1$ und $x_i \in V$ für alle $i \geq i_2$. Weiters gibt es ein $i_0 \in I$ mit $i_0 \geq i_1$ und $i_0 \geq i_2$, für das nun $x_{i_0} \in U \cap V = \emptyset$ gelten müsste — ein Widerspruch.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wäre Δ nicht abgeschlossen, so gebe es Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und ein Netz $\big((x_i, x_i)\big)_{i \in I}$ in Δ, das in $X \times X$ gegen $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ konvergiert. Nach den Eigenschaften der Produkttopologie folgt nun $x_i \to x$ und $x_i \to y$ — ein Widerspruch.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $x, y \in X$ und $x \neq y$. Dann ist $(x,y) \notin \Delta$ und, weil $(X \times X) \setminus \Delta$ offen ist, können wir eine Basisumgebung der Form $U \times V$ von (x,y) mit offenen Mengen $U, V \subseteq X$ finden, sodass $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ gilt. Es gilt also $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. □

6.4. Beispiele und Bemerkungen: 1) Folgende topologische Räume sind keine T_1-Räume (und somit nicht T_2): Jede mindestens zweipunktige Menge mit der chaotischen Topologie; $X = \{1,2\}$ mit der Topologie $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$.

2) Jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum, wie bereits in Korollar 0.7 festgestellt.

3) Ordnungstopologien haben stets die Hausdorff-Eigenschaft. Gilt nämlich $x < y$ in der totalgeordneten Menge $(X, \leq)$, so unterscheiden wir zwei Fälle:
a) falls es kein $c \in X$ gibt mit $x < c < y$, dann sind $U :=]-\infty, y[\ni x$ und $V :=]x, \infty[\ni y$ disjunkte offene Umgebungen,
b) gibt es ein $c \in X$ mit $x < c < y$, so sind $U :=]-\infty, c[\ni x$ und $V :=]c, \infty[\ni y$ disjunkte offene Umgebungen.

4) Folgende Aussagen sind leicht zu zeigen: Teilräume von T_2-Räumen sind stets T_2-Räume; Produkttopologien sind genau dann T_2, wenn jeder Faktor es ist.
(Achtung: Quotienten von T_2-Räumen sind nicht notwendig T_2.)

6.5. Proposition: Es sei X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorff-Raum und f und g seien stetige Abbildungen $X \to Y$. Dann gilt:

(i) die Menge $F := \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$,

(ii) die Menge $E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in X,

(iii) ist $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge und gilt $f|_D = g|_D$, dann folgt $f = g$.

Beweis: (i) Sei $(x, y) \in (X \times X) \setminus F$, dann gilt $f(x) \neq f(y)$ und wir können disjunkte Umgebungen U von $f(x)$ und V von $f(y)$ finden. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ eine Umgebung von (x, y) in der Produkttopologie, die $\big(f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)\big) \cap F = \emptyset$ erfüllt. Also ist F abgeschlossen.

(ii) Sei $x \in X$ und (x_i) ein Netz in E, d.h. $f(x_i) = g(x_i)$, mit $x_i \to x$ in X. Aus der Stetigkeit von f und g folgt $f(x_i) \to f(x)$ und $g(x_i) \to g(x)$ in Y. Wegen der Eindeutigkeit von Grenzwerten in Y muss daher $f(x) = g(x)$ gelten, d.h. $x \in E$. Also ist E abgeschlossen.

(iii) Mit der Bezeichnung und der Aussage von (ii) ist $D \subseteq E = \overline{E}$, daher gilt $X = \overline{D} = E$, also $f = g$. □

6.6. Kurze Bemerkung zu weiteren Trennungseigenschaften: Ein topologischer Raum heißt[1]

T_0-*Raum*, falls gilt: $\forall x \neq y\ \exists U \in \mathfrak{U}(x)\ \exists V \in \mathfrak{U}(y)$, sodass $x \notin V$ oder $y \notin U$,

T_3-*Raum*, falls gilt: zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ und für jeden Punkt $x \in X \setminus A$ gibt es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ und eine offene Menge V, $V \supseteq A$ (eine *offene Umgebung von* A), sodass $U \cap V = \emptyset$,

regulär, falls X sowohl T_1- als auch T_3-Raum ist,

$T_{3\frac{1}{2}}$-*Raum*, falls es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subseteq X$ und für jeden Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f \colon X \to [0, 1]$ gibt, sodass $f(x) = 1$ und $f(A) \subseteq \{0\}$ gilt,

vollständig regulär, falls X sowohl T_1- als auch $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum ist.

Die vollständig regulären Räume sind einerseits wichtig im Zusammenhang mit sogenannten uniformen Strukturen, die unter anderem die Formulierung von Begriffen wie gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz erlauben; andererseits kann deren Topologie charakterisiert werden als initiale Topologie bzgl. aller stetigen Abbildungen $X \to \mathbb{R}$.

Man kann zeigen, dass vollständig reguläre Räume stets regulär sind, und diese wiederum Hausdorff-Räume sind; weiters, dass die Eigenschaft $T_{3\frac{1}{2}}$ immer T_3 impliziert, aber aus T_3 im Allgemeinen nicht T_1 folgt … eine wahre Spielwiese für tabellarische Darstellungen von diversen Implikationen in Kombination verschiedener Zusatzbedingungen.

[1] Vorsicht: Leider ist die Nomenklatur hier in der Literatur nicht ganz einheitlich, z.B. ist in [Wil70] der Begriff regulär mit T_3 vertauscht zu lesen, $T_{3\frac{1}{2}}$ heißt dort vollständig regulär und vollständig reguläre Räume heißen dort Tychonoff-Räume.

Eine für vielfältige Anwendungen wichtige Klasse von topologischen Räumen wird durch Kopplung von T_1 mit einer weiteren Trennungseigenschaft für disjunkte abgeschlosse Teilmengen beschrieben.

6.7. Definition: Ein topologischer Raum X heißt *T_4-Raum*, falls gilt: Zu zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subseteq X$ gibt es stets offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ (d.h. offene Umgebungen von A bzw. B), sodass $U \cap V = \emptyset$ gilt.

Ein topologischer Raum heißt *normal*, wenn er sowohl T_1- als auch T_4-Raum ist.[2]

6.8. Beispiel: 1) Jeder metrische Raum (M, d) ist normal: Die T_1-Eigenschaft folgt aus der T_2-Eigenschaft. Für den Nachweis der T_4-Eigenschaft konstruieren wir zu gegeben abgeschlossenen, disjunkten, nichtleeren Teilmengen $A, B \subseteq M$ eine geeignete stetige Funktion, die diese beiden Mengen durch ihre Funktionswerte „trennt“. Wir definieren $f \colon M \to [0, 1]$ durch

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad (x \in M).$$

Als Übungsaufgabe kann überlegt werden, dass f stetig ist. Ist $x \in A$, so folgt $d(x, A) = 0$ und es ergibt sich $f(x) = 0$; für $x \in B$ ist $d(x, B) = 0$ und daher $f(x) = 1$. Setzen wir also $U := f^{-1}([0, \frac{1}{3}[)$ und $V := f^{-1}(]\frac{2}{3}, 1])$, dann sind U, V offene Mengen in M mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. (Die Funktion f ist eine sogenannte *Urysohn-Funktion* für A und B; vgl. Theorem 6.9.)

2) Die *Tychonoff-Planke*: Es sei $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der durch $n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erweiterten Totalordnung und der davon abgeleiteten Ordnungstopologie versehen. Weiters sei $\Omega = [0, \omega_1]$ der Ordinalzahlraum aus 2.23 und $\Omega_0 = [0, \omega_1[= \Omega \setminus \{\omega_1\}$.

Wir setzen $X := (\Omega \times \overline{\mathbb{N}}) \setminus \{(\omega_1, \infty)\}$ und statten dies mit der Spurtopologie der Produkttopologie von $\Omega \times \overline{\mathbb{N}}$ aus. X ist ein Hausdorff-Raum (als Teilraum eines Produktes von T_2-Räumen), von dem wir nun zeigen werden, dass er nicht normal ist.

Die beiden Teilmengen $A := \{\omega_1\} \times \mathbb{N} \subseteq X$ und $B := \Omega_0 \times \{\infty\} \subseteq X$ sind abgeschlossen in X (Übung) und offensichtlich disjunkt.

Sei U eine in X offene Teilmenge mit $U \supseteq A$, dann gilt: $\forall (\omega_1, n) \in A \subseteq U\ \exists \alpha_n \in \Omega_0$, sodass $]\alpha_n, \omega_1] \times \{n\} \subseteq U$, weil die Basisumgebungen von (ω_1, n) mit $n \in \mathbb{N}$ im Produktraum diese Form haben. Nach 2.23 existiert $\beta := \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und es gilt $\beta < \omega_1$. Daher gilt $]\beta, \omega_1] \times \mathbb{N} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]\alpha_n, \omega_1] \times \{n\} \subseteq U$.

Für jedes $\alpha \in \Omega_0$ mit $\alpha > \beta$ ist $(\alpha, \infty) \in B$. Eine Umgebungsbasis von (α, ∞) in X ist durch $\mathcal{B}(\alpha, \infty) = \{(]\gamma, \delta[\times]m, \infty]) \cap X \mid \gamma, \delta \in \Omega, \gamma < \alpha < \delta, m \in \mathbb{N}\}$ gegeben. Jedes Element von $\mathcal{B}(\alpha, \infty)$ hat einen nichtleeren Durchschnitt mit U, weil z.B. die Punkte (α, n) mit großem $n \in \mathbb{N}$ darin enthalten sind. Daher muss für jede offene Umgebung V von B jedenfalls $V \cap U \neq \emptyset$ gelten. Da U eine beliebige offene Umgebung von A in X war, kann X nicht normal sein.

[2]Vorsicht: Gegenüber [Wil70] ist T_4 mit normal zu vertauschen.

Bemerkung: Wie wir später sehen werden, ist $\Omega \times \overline{\mathbb{N}}$ als Produkt kompakter Räume selbst kompakt und kompakte Hausdorff-Räume sind stets normal. Hier ist also verblüffender Weise X ein nicht normaler Teilraum im normalen Raum $\Omega \times \overline{\mathbb{N}}$.

Die große Bedeutung der normalen Räume kommt daher, dass es auf solchen immer „unter Garantie genügend viele" stetige Funktionen gibt, wie durch die folgenden beiden Sätze (Lemma von Urysohn und Ausdehnunssatz von Tietze) belegt wird.

6.9. Theorem (Lemma von Urysohn): Es sei X ein T_1-Raum, dann gilt: X ist genau dann normal, wenn es zu zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen $A, B \subseteq X$ immer eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(B) \subseteq \{1\}$ gibt (*Urysohn-Funktion*).

(Der Beweis zeigt, dass die T_4-Eigenschaft allein äquivalent zur Existenz von Urysohn-Funktionen ist.)

Beweis: Wenn es so eine Urysohn-Funktion gibt, dann erhalten wir durch $U := f^{-1}([0, \frac{1}{3}[)$ und $V := f^{-1}(]\frac{2}{3}, 1])$ offene disjunkte Umgebungen von A bzw. B, also ist die T_4-Eigenschaft erfüllt. Weil X laut Voraussetzung auch ein T_1-Raum ist, ist er somit normal.

Nun habe umgekehrt X die T_4-Eigenschaft und $A, B \subseteq X$ seien zwei abgeschlosse disjunkte Teilmengen.

Zunächst behaupten wir, dass in einem T_4-Raum folgende Schachtelung möglich ist:
Zu $F \subseteq X$ abgeschlossen und $O \subseteq X$ offen mit $F \subseteq O$ gibt es eine offene Menge $O_1 \subseteq X$ mit $F \subseteq O_1 \subseteq \overline{O_1} \subseteq O$.

Beweis der Behauptung: Es ist nämlich $E := X \setminus O$ abgeschlossen und $E \cap F = \emptyset$. Daher gibt es nach der T_4-Eigenschaft offene Umgebungen U, V von F, E mit $U \cap V = \emptyset$. Wir setzen $O_1 := U$, dann gilt offensichtlich $F \subseteq O_1 \subseteq \overline{O_1}$. Weiters gilt wegen $X \setminus \overline{O_1} = (X \setminus O_1)^\circ = (X \setminus U)^\circ \supseteq V^\circ = V \supseteq E = X \setminus O$ auch $\overline{O_1} \subseteq O$.

Wir werden nun obige Schachtelungskonstruktion sukzessive auf die Ausgangssituation mit $F = A$ und $O = X \setminus B$ und auf jeweils zwischengeschachtelte Mengen anwenden und zu einer Folge von immer feineren disjunkten „Mengenapproximationen zwischen A und B" gelangen. Diese Folge von Zwischenschachtelungen wird dann in einem weiteren Schritt noch „kontinuierlich interpoliert", bevor in einem letzten Schritt daraus die Urysohn-Funktion als eine Art „Limes von zugeordneten Treppenfunktionen" konstruiert wird. (Sehr schöne Illustrationen dieser Beweistechnik finden sich in [Jae05, Abschnitt 8.2].)

Es sei $\mathbb{D} := \{\frac{p}{2^k} \mid p, k \in \mathbb{N}, 0 \leq p \leq 2^k\}$, also die Menge der dyadisch rationalen Zahlen im Intervall $[0,1]$, für die wir eine Abzählung $\mathbb{D} = \{d_l \mid l \in \mathbb{N}\}$ nach dem Muster einer „Gleichverteilung" $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$ wählen.

Schritt 1: Durch zweifache Anwendung der obigen Schachtelungsaussage erhalten wir offene Teilmengen G_0 und G_1 mit $A \subseteq G_0 \subseteq \overline{G_0} \subseteq G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq X \setminus B$.

Schritt 2 – Induktion: Es sei $b = \frac{2p+1}{2^n} = d_m \in \mathbb{D}$ und für jedes $d \in \{d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}\} \subseteq \mathbb{D}$ sei bereits eine offene Menge G_d konstruiert, sodass für $d' \in \{d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}\}$ und $d < d'$ stets $\overline{G_d} \subseteq G_{d'}$ gilt.

Es ist $a := \max\{d_l \mid l \leq m-1 \text{ und } d_l \leq b\} = \frac{2p}{2^n} = \frac{p}{2^{n-1}}$ und ähnlich erhalten wir $c := \min\{d_l \mid l \leq m-1 \text{ und } d_l \geq b\} = \frac{2p+2}{2^n} = \frac{p+1}{2^{n-1}}$ auf Grund des Aufzählungsmusters. Wegen $a < c$ gilt $\overline{G_a} \subseteq G_c$.

Gemäß Schachtelungseigenschaft gibt es eine offene Menge G_b mit $\overline{G_a} \subseteq G_b \subseteq \overline{G_b} \subseteq G_c$.

Schritt 3: Für $t \in [0,1]$ setze $H_t := \bigcup\limits_{d \in \mathbb{D}, d \leq t} G_d$.

Die Menge H_t ist als Vereinigung offener Mengen offen. Sind $t, t' \in [0,1]$ mit $t < t'$, so können wir $r_1, r_2 \in \mathbb{D}$ mit $t < r_1 < r_2 < t'$ wählen und erhalten die Inklusionskette $H_t \subseteq G_{r_1} \subseteq \overline{G_{r_1}} \subseteq G_{r_2} \subseteq H_{t'}$, aus der auch $\overline{H_t} \subseteq H_{t'}$ folgt.

Schritt 4: Wir definieren $f\colon X \to [0,1]$ durch $f(x) := \begin{cases} 1 & x \notin H_1, \\ \inf\{t \in [0,1] \mid x \in H_t\} & x \in H_1. \end{cases}$

Für $x \in A$ folgt $x \in G_0 = H_0$ und somit $f(x) = 0$; für $x \in B$ gilt $x \in X \setminus \overline{G_1} = X \setminus \overline{H_1}$ und daher $f(x) = 1$. Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist.

Es seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $V :=]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\cap [0,1]$ (die Spur der ε-Umgebung von $f(x)$ auf $[0,1]$). Wähle $\delta \in]0, \varepsilon[$ und setze $U := H_{f(x)+\varepsilon-\delta} \setminus \overline{H_{f(x)-\varepsilon}}$. Dann ist U offen und es gilt $x \in U$, also ist U eine Umgebung von x in X. Für beliebiges $y \in U$ gilt nach Konstruktion $f(y) \leq f(x) + \varepsilon - \delta < f(x) + \varepsilon$ und $f(y) > f(x) - \varepsilon$ (und $0 \leq f(y) \leq 1$ sowieso), daher ist $f(y) \in V$. Somit gilt $f(U) \subseteq V$. $\square$

Durch eine einfache Modifikation lässt sich natürlich für beliebige α, β mit $\alpha < \beta$ auch eine Urysohn-Funktion mit Bildbereich $[\alpha, \beta]$ und $f(A) \subseteq \{\alpha\}$, $f(B) \subseteq \{\beta\}$ erreichen.

Die Bedingung der Existenz einer Urysohn-Funktion lässt sich auch so interpretieren, dass eine Funktion $h\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ vorgegeben ist, die auf A konstant gleich 0 und auf B konstant gleich 1 ist, und stetig auf ganz X fortgesetzt wird. Die passende Verallgemeinerung dieser Bedingung wird im folgenden Satz diskutiert.

6.10. Theorem (Ausdehnunssatz von Tietze): Es sei X ein T_1-Raum, dann gilt: X ist genau dann normal, wenn es für jede stetige Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq X$ eine stetige Fortsetzung auf X gibt, d.h. eine stetige Funktion $F\colon X \to \mathbb{R}$ mit $F|_A = f$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass die Ausdehnungseigenschaft die T_4-Eigenschaft impliziert. Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Wir definieren $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := 0$ für $x \in A$, $f(x) := 1$ für $x \in B$. Die Funktion f ist nach Proposition 3.6(ii) stetig und $A \cup B$ ist abgeschlossen. Sei $F\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung von f. Wir setzen $U :=$

$F^{-1}(]-\infty,\frac{1}{3}[)$ und $V := F^{-1}(]\frac{2}{3},\infty[)$. Dann sind U, V offen, disjunkt und erfüllen $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Somit ist X auch ein T_4-Raum.

Nun nehmen wir an, dass X ein T_4-Raum ist, und zeigen die behauptete Ausdehnungseigenschaft.

1. Schritt: Die Aussage gilt für Funktionen mit Bildbereich $[-1,1]$ statt $\mathbb{R}$, d.h. $f\colon A \to [-1,1]$ lässt sich stetig fortsetzen zu $F\colon X \to [-1,1]$.

Wir konstruieren induktiv eine Folge stetiger Funktionen $g_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n = 0,1,2,\dots)$ mit den Eigenschaften:

(a) für $x \in X\colon\ -1 + (\frac{2}{3})^n \le g_n(x) \le 1 - (\frac{2}{3})^n$,

(b) für $x \in A\colon\ |f(x) - g_n(x)| \le (\frac{2}{3})^n$,

(c) für $x \in X\colon\ |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \le \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$,

(d) für $x \in X$, $m, n \ge p\colon\ |g_n(x) - g_m(x)| \le (\frac{2}{3})^p$.

Wir setzen zunächst $g_0(x) := 0$ für $x \in X$, dann ist (a),(b) erfüllt ((c),(d) sind hier noch zu ignorieren).

Angenommen, es sind $g_0, \dots, g_n$ schon definiert und erfüllen zumindest (a), (b), (c).
(Eigenschaft (d) wird unten als Folgerung bewiesen.)

Setze $B_{n+1} := \{x \in A \mid f(x) - g_n(x) \ge \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\}$, $C_{n+1} := \{x \in A \mid f(x) - g_n(x) \le -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\}$, dann sind B_{n+1} und C_{n+1} wegen der Stetigkeit von f und g_n in der Spurtopologie von A abgeschlossen und somit wegen der Abgeschlossenheit von A auch abgeschlossen in X. Weiters gilt $B_{n+1} \cap C_{n+1} = \emptyset$, also gibt es nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $v_n\colon X \to [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ mit $v_n(B_{n+1}) \subseteq \{-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\}$ und $v_n(C_{n+1}) \subseteq \{\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\}$.

Wir setzen $g_{n+1} := g_n - v_n$, dann zeigt eine direkte Rechnung, dass g_{n+1} auch die Eigenschaften (a), (b), (c) erfüllt.

Die Folge (g_n) erfüllt auch Eigenschaft (d), denn für $n = m + k$ und $m \ge p$ und $x \in X$ gilt

$$
\begin{aligned}
|g_{m+k}(x) - g_m(x)| &= |\sum_{j=1}^{k}(g_{m+j}(x) - g_{m+j-1}(x))| \le \sum_{j=1}^{k} |g_{m+j}(x) - g_{m+j-1}(x)| \\
&\overset{[(c)]}{\le} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+j-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{m} \cdot \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{m} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{p}.
\end{aligned}
$$

Wegen (a) und (d) ist (g_n) eine Cauchy-Folge im Raum $C_b(X,\mathbb{R})$ der stetigen beschränkten Funktionen $X \to \mathbb{R}$ bzgl. der Supremumsnorm $\|g\|_\infty := \sup_{x\in X}|g(x)|$. Mit dem Wissen, dass dies ein Banachraum ist, dürften wir sofort schließen, dass die Folge (g_n) gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $F\colon X \to \mathbb{R}$ strebt. Wir wollen dies zusammen mit den anderen Eigenschaften von F hier aber trotzdem direkt nachweisen.

Zunächst ist für beliebiges, festes $x \in X$ die Folge $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, daher existiert $F(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ und definiert eine Funktion $F\colon X \to \mathbb{R}$. Wegen (a) gilt $F(X) \subseteq [-1,1]$.

Aus (b) folgt für $x \in A$ einfach $|f(x) - F(x)| = \lim |f(x) - g_n(x)| = 0$, also $F(x) = f(x)$.

Es bleibt also nur noch, die Stetigkeit von F zu zeigen. Dies ist der „übliche $\varepsilon/3$-Beweis": Sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wir bemerken zunächst, dass wir mit $n \to \infty$ in (d) die Ungleichung $|F(x) - g_p(x)| \leq (2/3)^p$ für alle $x \in X$ und $p \in \mathbb{N}$ erhalten; wähle ein $p_0 \in \mathbb{N}$ mit $(2/3)^{p_0} \leq \varepsilon/3$. Weiters benützen wir die Stetigkeit von g_{p_0} und wählen eine Umgebung U von x_0, sodass $g_{p_0}(U) \subseteq \,]g_{p_0}(x_0) - \frac{\varepsilon}{3}, g_{p_0}(x_0) + \frac{\varepsilon}{3}[$ gilt. Dann folgt für jedes $y \in U$

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x_0)| &= |F(y) - g_{p_0}(y) + g_{p_0}(y) - g_{p_0}(x_0) + g_{p_0}(x_0) - F(x_0)| \\ &\leq |F(y) - g_{p_0}(y)| + |g_{p_0}(y) - g_{p_0}(x_0)| + |g_{p_0}(x_0) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Schritt: Die Aussage gilt mit Bildbereich $]-1,1[$ statt $\mathbb{R}$.

Sei also $f\colon A \to]-1,1[$ stetig. Nach Schritt 1 gibt es eine stetige Fortsetzung $F\colon X \to [-1,1]$ von f. Wir setzen $B := \{x \in X \mid |F(x)| = 1\}$, dann ist B abgeschlossen und $A \cap B = \emptyset$. Falls $B = \emptyset$ gilt, sind wir fertig; also nehmen wir nun $B \neq \emptyset$ an.

Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine stetige Funktion $g\colon X \to [0,1]$ mit $g(A) \subseteq \{1\}$ und $g(B) = \{0\}$. Setzen wir $\widetilde{F}(x) := g(x) \cdot F(x)$ $(x \in X)$, dann ist die Funktion $\widetilde{F}\colon X \to \mathbb{R}$ stetig (z.B. als Verknüpfung $\widetilde{F} = m \circ (g, F)$ der stetigen Abbildungen $m\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(r,s) \mapsto r \cdot s$ und $(g,F)\colon X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (g(x), F(x))$). Weiters gilt $|\widetilde{F}(x)| < 1$ für jedes $x \in X$ nach Konstruktion und für $x \in A$ ist $\widetilde{F}(x) = F(x) = f(x)$.

3. Schritt: Reduktion der Aussage auf jene für den Bildbereich $]-1,1[$.

Es sei $h\colon \mathbb{R} \to]-1,1[$ ein Homöomorphismus (z.B. $h(t) = 2\arctan(t)/\pi$). Gemäß Schritt 2 gibt es eine stetige Fortsetzung $\widetilde{F}\colon X \to]-1,1[$ von $h \circ f\colon A \to]-1,1[$. Dann ist $F := h^{-1} \circ \widetilde{F}\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung von $f\colon A \to \mathbb{R}$. $\square$

7 Kompaktheit

Der Begriff der Kompaktheit in $\mathbb{R}^n$ oder in metrischen Räumen ist aus der Analysis bekannt und seine zentrale Bedeutung bei wichtigen Konstruktionen wurde dort bereits sichtbar (z.B. Existenz von konvergenten Teilfolgen, Existenz eines Maximums). Wir beginnen hier mit der beweistechnisch günstigsten allgemeinen Variante der Definition mittels offener Überdeckungen. Eine Bemerkung zur Nomenklatur: In der Literatur werden die hier als kompakt bezeichneten topologischen Räume gelegentlich quasikompakt genannt, wenn die Hausdorff-Eigenschaft nicht zusätzlich gefordert wird.

7.1. Definition: (i) Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. ist I eine Menge und $U_i \subseteq X$ offen $(i \in I)$ mit $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, dann existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcup_{j\in J} U_j = X$.

(ii) Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *kompakt*, falls A in der Spurtopologie kompakt ist, d.h., falls für eine Menge I und offene Mengen U_i $(i \in I)$ mit $\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq A$ stets eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, sodass $\bigcup_{j\in J} U_j \supseteq A$ gilt.

7.2. Beispiel: 1) In $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie sind für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Intervalle $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ nicht kompakt. Ebenso sind die Teilmengen $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$ und $\mathbb{R}$ nicht kompakt. Das beschränkte abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist kompakt (Übung.)

2) Der Ordinalzahlraum $\Omega = [0, \omega_1]$ (vgl. 2.23) ist kompakt: Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Ω. Es gibt ein $i_1 \in I$, sodass $\omega_1 \in U_{i_1}$. Da U_{i_1} eine offene Umgebung von ω_1 ist, gibt es ein $\beta \in \Omega_0 = [0, \omega_1[$, sodass $]\beta, \omega_1] \subseteq U_{i_1}$ gilt.
Wir setzen $\alpha_1 := \min\{\beta \in \Omega_0 \mid]\beta, \omega_1] \subseteq U_{i_1}\}$ (Wohlordnungseigenschaft!). Falls $\alpha_1 = 0$ ist, sind wir bereits fertig, weil dann U_{i_1} ganz Ω umfasst. Andernfalls wählen wir $i_2 \in I$ mit $\alpha_1 \in U_{i_2}$ und setzen $\alpha_2 := \min\{\beta \in \Omega_0 \mid]\beta, \alpha_1] \subseteq U_{i_2}\}$. Auf diese Art fahren wir induktiv fort, solange $\alpha_n > 0$ gilt. D.h. wir wählen $i_{n+1} \in I$ mit $\alpha_n \in U_{i_{n+1}}$ und setzen $\alpha_{n+1} := \min\{\beta \in \Omega_0 \mid]\beta, \alpha_n] \subseteq U_{i_{n+1}}\}$.
Die Folge $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ muss nach endlich vielen Schritten bei $\alpha_m = 0$ anlangen: Wegen der Wohlordungseigenschaft existiert nämlich $\gamma := \min\{\alpha_j \mid j \in \mathbb{N}\}$; es sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_m = \gamma$; wäre $\alpha_m > 0$, so gebe es ein $i_{m+1} \in I$ und $\beta \in [0, \alpha_m[$ mit $]\beta, \alpha_m] \subseteq U_{i_{m+1}}$ und daher $\alpha_{m+1} \leq \beta < \alpha_m$ im Widerspruch zur Minimalität von α_m.
Wir wählen schließlich ein $i_{m+1} \in I$ mit $0 \in U_{i_{m+1}}$ und erhalten $\bigcup_{j=1}^{m+1} U_{i_j} = \Omega$, also eine endliche Teilüberdeckung.

Der folgende Satz beschreibt wesentliche Charakterisierungen der Kompaktheit.

7.3. Theorem: Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist kompakt,

(ii) ist $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen $F_i \subseteq X$ mit $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, dann gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, sodass $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$ (endliche Durchschnittseigenschaft),

(iii) jedes Netz in X besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt,

(iv) jedes Ultranetz in X ist konvergent.

Beweis: (Wir zeigen hier mehr einzelne Implikationen als nötig, damit man z.B. auch ohne Kenntnis von Ultranetzen einen Beweis für die Äquivalenz von (i), (ii), (iii) nachvollziehen kann.)

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist eine einfache Übungsaufgabe.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Für $i \in I$ setzen wir $F_i := \overline{\{x_k \mid k \in I, k \geq i\}}$. Ist $J = \{i_1, \ldots, i_N\}$ eine beliebige endliche Teilmenge von I, so gibt es in der gerichteten Menge ein $l \in I$, sodass $l \geq i_j$ $(j = 1, \ldots, N)$. Damit folgt $x_l \in \bigcap_{j=1}^{N} F_{i_j}$. Also sind endliche Durchschnitte über Mengen aus der Familie $(F_i)_{i\in I}$ nie leer, sodass wegen (ii) auch $F := \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ gelten muss.
Sei $x \in F$ und U eine Umgebung von x. Dann gilt $\forall i \in I$ zunächst $x \in F_i = \overline{\{x_k \mid k \geq i\}}$ und weiter $U \cap \{x_k \mid k \geq i\} \neq \emptyset$, weil x zum Abschluss von $\{x_k \mid k \geq i\}$ gehört. D.h. zu jedem $i \in I$ gibt es ein $k_i \in I$, $k_i \geq i$, sodass $x_{k_i} \in U$ gilt. Also ist x ein Häufungspunkt.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(F_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen $F_i \subseteq X$, sodass $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt. Wir zeigen, dass dann auch $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ gelten muss.
Sei $\mathcal{J} := \{J \subseteq I \mid J \text{ ist endlich}\}$ und darauf die Relation $J_1 \leq J_2 \;:\Leftrightarrow\; J_1 \subseteq J_2$ definiert. Wir erhalten eine gerichtete Menge $(\mathcal{J}, \leq)$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $J \in \mathcal{J}$ ein Element $x_J \in \bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ existiert. Somit ist $(x_J)_{J\in\mathcal{J}}$ ein Netz in X, das gemäß (iii) einen Häufungspunkt x in X besitzt. Wir zeigen, dass $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$ gilt, dann sind wir fertig.
Für beliebiges $i \in I$ ist $\{i\} \in \mathcal{J}$ und, weil x Häufungspunkt des Netzes (x_J) ist, gibt es für jede Umgebung U von x eine Menge $J \in \mathcal{J}$ mit $i \in J$ (d.h. $J \geq \{i\}$), sodass $x_J \in U$ gilt. Wegen $x_J \in \bigcap_{j\in J} F_j \subseteq F_i$ gilt insbesondere $U \cap F_i \neq \emptyset$. Da sowohl $i \in I$ als auch $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig waren, folgt $x \in \overline{F_i} = F_i$ für alle $i \in I$. Somit gilt $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei (x_i) ein Ultranetz in X. Nach (iii) hat (x_i) jedenfalls einen Häufungspunkt x in X. Als Ultranetz muss (x_i) dann aber sogar gegen x konvergieren (Proposition 5.29).

(iv) $\Rightarrow$ (iii): Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein beliebiges Netz in X. Nach Theorem 5.27 besitzt (x_i) ein feineres Ultranetz $(y_h)_{h\in H}$. Gemäß (iv) ist (y_h) konvergent, sagen wir gegen $y \in X$. Somit folgt aus Proposition 5.12(ii), dass y ein Häufungspunkt von (x_i) ist. $\square$

7.4. Bemerkung: Für die Kompaktheitsbedingungen werden oft auch verschiedene Varianten betrachtet, die im Allgemeinen aber nicht gleichwertig sind. Die prominentesten Beispiele für andere Kompaktheitsbegriffe auf einem Hausdorff-Raum X sind (siehe z.B. [vQu01, Abschnitt 8.C]):

(a) jede Folge in X hat einen Häufungspunkt,

(b) *abzählbar kompakt:* jede abzählbare offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung,

(c) *folgenkompakt:* jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Hiervon sind (a) und (b) äquivalent und (c) impliziert stets (b). In AA1-Räumen sind (b) und (c) äquivalent und für metrische Räume fallen alle drei Bedingungen zusammen mit der Kompaktheit (letzteres zeigen wir auch im nächsten Kapitel). Kompakte Hausdorff-Räume sind stets abzählbar kompakt, die Umkehrung davon gilt in AA2-Räumen. Kompakte Hausdorff-Räume müssen nicht folgenkompakt sein und folgenkompakte Räume sind im Allgemeinen nicht kompakt.

7.5. Proposition: Es sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, dann gilt:

(i) Ist X kompakt und A abgeschlossen, so ist A kompakt,

(ii) ist X ein T_2-Raum und A kompakt, so ist A abgeschlossen.

Bemerkung: Wie bereits eingangs erwähnt werden in der Literatur oftmals kompakte Räume inklusive T_2-Eigenschaft definiert (z.B. in [Bou66] und [CR87]) und die Aussage (ii) deutet an, welche Vorteile das hat. (Zumal (ii) ohne T_2-Bedingung nicht immer gilt; siehe z.B. [vQu01, Beispiel 8.8].)

Beweis: (i) als Übungsaufgabe.

(ii) Sei $x \in \overline{A}$, dann gibt es ein Netz (x_i) in A mit $x_i \to x$ in X. Weil A kompakt ist, hat das Netz einen Häufungspunkt $y \in A$. Daher gibt es ein feineres Netz (x_{i_h}), das gegen y konvergiert. Das feinere Netz konvergiert aber ebenso gegen x, also folgt aus der Hausdorff-Eigenschaft $x = y \in A$. $\square$

Aus der Analysis wissen wir zum Beispiel, dass die Bildmenge einer stetigen Abbildung $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist. Die allgemeine Fassung dieser Aussage lautet wie folgt.

7.6. Theorem: Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist X kompakt, dann ist auch $f(X)$ kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von Y mit $f(X) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Dann liefert $U_i := f^{-1}(V_i)$ $(i \in I)$ wegen $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) \supseteq f^{-1}(f(X)) = X$ eine offene Überdeckung von X. Daher gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, sodass $\bigcup_{j\in J} U_j = X$ gilt. Somit folgt $f(X) = f(\bigcup_{j\in J} U_j) = \bigcup_{j\in J} f(U_j) \subseteq \bigcup_{j\in J} V_j$. $\square$

7.7. Bemerkung: 1) Als Folgerung des obigen Theorems sehen wir, dass Kompaktheit eine topologische Eigenschaft ist: Wenn $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus ist und X kompakt, dann ist auch $Y = f(X)$ kompakt.

2) Wir betrachten den Spezialfall einer stetigen reellwertigen Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$. Ist X kompakt, so ist auch $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Demnach ist $f(X)$ abgeschlossen, weil $\mathbb{R}$ ein Hausdorff-Raum ist, und beschränkt, weil in einer endlichen Teilüberdeckung der Familie $(]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten. Somit sind $y_1 := \inf f(X)$ und $y_2 := \sup f(X)$ sogar in $f(X)$ enthalten (weil das Infimum und Supremum als Limiten von geeigneten Folgen aus $f(X)$ auftreten), d.h. es gibt $x_1, x_2 \in X$, sodass $f(x_1) = \min f(X)$ und $f(x_2) = \max f(X)$. Mit anderen Worten: Eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten topologischen Raum nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an.

7.8. Korollar: Es sei X ein kompakter Raum, Y ein Hausdorff-Raum und $f\colon X \to Y$ eine bijektive stetige Abbildung. Dann ist f ein Homöomorphismus. (Daher auch Y kompakt.)

Beweis: Wir zeigen, dass f eine abgeschlossene Abbildung ist, dann ist die Stetigkeit der Umkehrabbildung gezeigt. Sei $E \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist E kompakt und daher $f(E)$ kompakt im T_2-Raum Y. Somit ist $f(E)$ abgeschlossen. □

7.9. Theorem: Jeder kompakte Hausdorff-Raum ist normal.

Beweis: Sei X ein kompakter T_2-Raum. Dann ist X jedenfalls ein T_1-Raum und wir müssen noch die T_4-Eigenschaft nachweisen. Es seien abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gegeben. Dann sind sowohl A als auch B kompakt.

Schritt 1: Es sei $x \in A$ beliebig und zunächst fest. Wegen der T_2-Eigenschaft gibt es zu jedem $y \in B$ offene Umgebungen $U_x^y \in \mathfrak{U}(x)$ und $V_y \in \mathfrak{U}(y)$ mit $U_x^y \cap V_y = \emptyset$. Die Familie $(V_y)_{y\in B}$ bildet eine offene Überdeckung von B, daher gibt es eine endliche Teilmenge $L_x \subseteq B$, sodass $B \subseteq \bigcup_{y\in L_x} V_y =: V^x$ gilt. Der endliche Durchschnitt $U_x := \bigcap_{y\in L_x} U_x^y$ ist eine offene Umgebung von x und es gilt $U_x \cap V^x = \emptyset$. (Somit erfüllt X die T_3-Eigenschaft.)

Schritt 2: Wir denken uns Schritt 1 für jedes $x \in A$ durchgeführt. Die Familie $(U_x)_{x\in A}$ bildet eine offene Überdeckung von A, daher gibt es eine endliche Teilmenge $M \subseteq A$, sodass $A \subseteq \bigcup_{x\in M} U_x =: U$ gilt. Der endliche Durchschnitt $V := \bigcap_{x\in M} V^x$ ist offen und erfüllt $B \subseteq V$. Weiters gilt laut Konstruktion $U \cap V = \emptyset$. Somit ist X ein T_4-Raum, also normal. □

7.10. Theorem (Satz von Tychonoff): Es sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ nichtleeres Produkt der topologischen Räume X_i $(i \in I)$. Dann gilt:

$$X \text{ ist kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I\colon X_i \text{ ist kompakt.}$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Für jedes $i \in I$ ist die Projektion $\pi_i\colon X \to X_i$ stetig und surjektiv, daher ist $X_i = \pi_i(X)$ kompakt.

$\boxed{\Leftarrow}$ Wir zeigen, dass jedes Ultranetz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X konvergent ist. Für jedes $i \in I$ ist das Bildnetz $(\pi_i(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ein Ultranetz in X_i (vgl. 5.28) und konvergiert demnach gegen einen Punkt $p_i \in X_i$. Wir setzen $p := (p_i)_{i\in I} \in X$, dann gilt nach den Eigenschaften der Produkttopologie $x_\lambda \to p$ in X. □

7.11. Bemerkung: Der obige Beweis des Satzes von Tychonoff stützt sich auf das Auswahlaxiom, weil die Charakterisierung der Kompaktheit mittels Ultranetzen verwendet wird und im Beweis der Implikation (iv) $\Rightarrow$ (iii) von Theorem 7.3 die Existenz einer ultrafeinen Verfeinerung eines beliebigen Netzes verwendet wird. Für endlich viele Faktoren im kartesischen Produkt kann der Satz von Tychonoff auch ohne diesen Rückgriff auf das Auswahlaxiom bewiesen werden, wie z.B. in [Čap07, 5.6] für den Fall von zwei Faktoren ausgeführt. Andererseits gilt aber: Der allgemeine Satz von Tychnoff impliziert seinerseits sogar das Auswahlaxiom, wie Kelley in einer kurzen Arbeit 1950 gezeigt hat (vgl. [Kel50]).

7.12. Beispiel: 1) Nachdem beschränkte abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ kompakt sind (vgl. 7.2), sind abgeschlossene beschränkte Quader $Q = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ für $i = 1, \ldots, n$) kompakt im $\mathbb{R}^n$.

2) In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist $[0,1]^{\mathbb{R}} = \prod_{t\in\mathbb{R}}[0,1]$ kompakt, weil $[0,1]$ kompakt in $\mathbb{R}$ ist und es sich um die Produkttopologie handelt. Die Menge $[0,1]^{\mathbb{R}}$ entspricht der Menge aller Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $[0,1]$.

3) Der Ordinalzahlraum Ω ist kompakt (vgl. 7.2). Ebenso ist $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (aus Beispiel 2) in 6.8) mit der Ordnungstopologie kompakt: Ist (U_i) eine offene Überdeckung von $\overline{\mathbb{N}}$, dann gibt es ein i_0 mit $\infty \in U_{i_0}$; weil U_{i_0} offene Umgebung von ∞ ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $]m, \infty] \subseteq U_{i_0}$; die Restmenge $\overline{\mathbb{N}} \setminus U_{i_0} \subseteq \{1, 2, \ldots, m-1\}$ ist endlich und wird daher sicher von höchstens endlich vielen weiteren U_i überdeckt.

Somit ist $\Omega \times \overline{\mathbb{N}}$ kompakt und als Produkt von Hausdorff-Räumen (Ordnungstopologien sind T_2; 6.4) auch selbst ein Hausdorff-Raum. Daher ist $\Omega \times \overline{\mathbb{N}}$ auch normal.
Wir erinnern: Der Teilraum $(\Omega \times \overline{\mathbb{N}}) \setminus \{(\omega_1, \infty)\}$ davon – die Tychonoff-Planke – hat sich in 6.8 als nicht normal herausgestellt.

Der aus der Analysis bekannte Satz von Heine-Borel über die Charakterisierung kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ lässt sich nun als einfache Folgerung des Satzes von Tychonoff und der Proposition 7.5 beweisen.

7.13. Theorem (Satz von Heine-Borel): Es sei K eine Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie, dann gilt:

$$K \text{ ist kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad K \text{ ist beschränkt und abgeschlossen.}$$

Beweis: $\boxed{\Rightarrow}$ Nachdem $\mathbb{R}^n$ ein Hausdorff-Raum ist, ist K jedenfalls abgeschlossen. Die Familie von offenen Kugeln $U_1(x)$ ($x \in K$) bildet eine offene Überdeckung von K und besitzt daher eine endliche Teilüberdeckung. Somit ist K in einer endlichen Vereinigung von Kugeln mit Radius 1 enthalten, also beschränkt.

$\boxed{\Leftarrow}$ Als beschränkte Menge ist K in einem Würfel der Form $W := [-c, c]^n$ für passendes $c > 0$ enthalten. Die Menge W ist als Produkt kompakter Mengen kompakt und $K \subseteq W$ ist abgeschlossen, daher selbst kompakt. $\square$

7.14. Bemerkung: Die Richtung $\boxed{\Rightarrow}$ im obigen Beweis kann gleichlautend in allgemeinen metrischen Räumen bewiesen werden. Die Umkehrung gilt aber nicht. Wir nennen zwei Beispiele dafür (hier ohne Beweisdetails):
1) Für jedes $p \in [1, \infty[$ im normierten Raum $l^p = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$ mit $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_k|^p}$ ist die (abgeschlossene) Einheitskugel $K = \{x \in l^p \mid \|x\|_p \le 1\}$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt. (Es genügt hier, zu zeigen, dass die Folge $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in K mit $e_j(k) = \delta_{jk}$ keinen Häufungspunkt hat.)
2) Sei d die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ und definiere daraus eine neue Metrik ρ auf $\mathbb{R}^n$ durch $\rho(x, y) := d(x, y)/(1 + d(x, y))$; dann induziert ρ ebenfalls die euklidische Topologie, aber jede Teilmenge ist beschränkt bzgl. ρ.

Weitaus häufiger als kompakte Räume treten topologische Räume auf, die um jeden ihrer Punkte „wie kompakte Räume aussehen“. Wir geben abschließend einen kurzen Ausblick.

7.15. Lokalkompakte Räume: Wir nennen einen topologischen Raum X *lokalkompakt*, wenn es bei jedem $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen gibt. Für Hausdorff-Räume ist dies äquivalent zur Existenz wenigstens einer kompakten Umgebung bei jedem Punkt (siehe [Wil70, Theorem 18.2]). Beispiele dafür sind der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie oder $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie.

Für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum (X, τ), der nicht kompakt ist, gibt es die Konstruktion der sogenannten *Alexandroff-* oder *Einpunkt-Kompaktifizerung*, die wir hier kurz skizzieren:

Wir setzen $\alpha(X) := X \cup \{\infty\}$, wobei hier ∞ ein beliebiges Element bezeichnet, das nicht zu X gehört, und definieren eine Topologie τ_α auf $\alpha(X)$ wie folgt: eine Teilmenge $A \subseteq \alpha(X) \setminus \{\infty\} = X$ gehört zu τ_α, falls A offen in X bzgl. τ ist; eine Teilmenge $A \subseteq \alpha(X)$ mit $\infty \in A$ ist τ_α-offen, falls $\alpha(X) \setminus A$ kompakt in X bzgl. τ ist. Es ist leicht, zu zeigen, dass τ_α eine Topologie auf $\alpha(X)$ definiert.
Der Raum $(\alpha(X), \tau_\alpha)$ hat die T_2-Eigenschaft, denn Punkte in X können wie gehabt getrennt werden und Punkte $x \in X$ und $y = \infty$ trennen wir durch Wahl einer kompakten Umgebung K von x in X mittels der offenen Umgebungen $U := K^\circ$ und $V := \alpha(X) \setminus K$.
Schließlich zeigen wir noch, dass $(\alpha(X), \tau_\alpha)$ kompakt ist: Sei (U_i) eine offene Überdeckung von $\alpha(X)$. Sei i_0 ein Index mit $\infty \in U_{i_0}$. Dann ist $\alpha(X) \setminus U_{i_0}$ kompakt und wird von den restlichen offenen Mengen U_i $(i \neq i_0)$ der Familie überdeckt. Daher gibt es $i_1, \ldots, i_N$, sodass $U_{i_1}, \ldots, U_{i_N}$ die Menge $\alpha(X) \setminus U_{i_0}$ überdecken, also gilt insgesamt $\alpha(X) \subseteq \bigcup_{j=0}^{N} U_{i_j}$.

Beispiele: Es ist $\alpha(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}}$ aus 6.8 und $\alpha(\mathbb{R}^n) \cong S^n$. Insbesondere gilt $\alpha(\mathbb{C}) = \alpha(\mathbb{R}^2) \cong S^2$, wie man mit der sogenannten stereographischen Projektion direkt sehen kann, in der vom Nordpol aus jeweils eine Gerade durch die anderen Sphärenpunkte gezogen wird und der Schnittpunkt mit der Ebene als Bildpunkt genommen wird; der Nordpol entspricht dem unendlich fernen Punkt ∞.

8 Vollständigkeit und Kompaktheit in metrischen Räumen

Vollständige metrische Räume bilden die Grundlage für eine Fülle von Methoden in der Analysis und Funktionalanalysis. Dies liegt an einer gewissen „garantierten Reichhaltigkeit an inneren Punkten“, wie sie im unten folgenden Satz von Baire präzisiert wird. Davor führen wir noch einige weitere Begriffe der allgemeinen Topologie ein, die wir für den Satz von Baire benötigen.

8.1. Definition: Es sei X ein topologischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *nirgends dicht*, wenn $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ gilt.

(ii) Eine Teilmenge $B \subseteq X$ heißt *mager*, wenn sie eine (höchstens) abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist. (In der Literatur auch *Menge von 1. Kategorie* genannt.)

8.2. Bemerkungen und Beispiele: 1) Es ist $X \setminus (\overline{A})^\circ = \overline{X \setminus \overline{A}} = \overline{(X \setminus A)^\circ}$, somit gilt: $A \subseteq X$ ist genau dann nirgends dicht, wenn $(X \setminus A)^\circ$ dicht in X ist.

2) Teilmengen, Abschlüsse und endliche Vereinigungen nirgends dichter Mengen sind nirgends dicht.

3) Endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nirgends dicht.

4) $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist nirgends dicht in $\mathbb{R}^2$.

5) $\mathbb{Q}$ ist zwar nicht nirgends dicht in $\mathbb{R}$, aber als abzählbare Vereinigung einpunktiger Teilmengen mager.

6) Sei X ein topologischer Raum und $E \subseteq X$ offen oder abgeschlossen, dann ist der Rand ∂E nirgends dicht. (Übungsaufgabe.)

8.3. Proposition: In einem topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) nichtleere offene Teilmengen von X sind nicht mager,

(ii) magere Mengen in X haben leeres Inneres,

(iii) Komplemente von mageren Mengen in X sind dicht,

(iv) ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie offener Teilmengen von X, sodass U_n dicht in X für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $A \subseteq X$ mager. Dann ist A° ebenfalls mager und $A^\circ \neq \emptyset$ würde (i) widersprechen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ = X$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Wir setzen $A_n := X \setminus U_n$. Dann gilt $(\overline{A_n})^\circ = A_n^\circ = X \setminus \overline{U_n} = \emptyset$, also ist A_n nirgends dicht ($n \in \mathbb{N}$). Somit ist $X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mager und aus (iii) folgt, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X ist.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Angenommen $E \subseteq X$ ist offen und mager. Dann gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nirgends dichter Mengen mit $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $U_n := X \setminus \overline{A_n} = (X \setminus A_n)^\circ$ offen und dicht, weil A_n nirgends dicht ist. Gemäß (iv) ist daher $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X und somit $E = E^\circ = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^\circ \subseteq (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n})^\circ = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus U_n))^\circ = (X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n)^\circ = X \setminus \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n} = \emptyset$. $\square$

8.4. Definition: Ein topologischer Raum X heißt *Bairescher Raum*, wenn er eine der äquivalenten Bedingungen aus Proposition 8.3 erfüllt.

8.5. Theorem (Satz von Baire): Vollständige metrische Räume sind Bairesche Räume.

Beweis: Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Wir weisen die Eigenschaft (iv) aus Proposition 8.3 nach. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge U_n offen und dicht in M.
Es ist zu zeigen, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in M ist. Wir werden beweisen, dass $G \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$ für jede nichtleere offene Teilmenge $G \subseteq M$ gilt.

Es gilt $G \cap U_1 \neq \emptyset$, weil U_1 dicht ist; außerdem ist $G \cap U_1$ offen. Daher gibt es ein $x_1 \in G \cap U_1$ und ein $r_1 \in \mathbb{R}$, $0 < r_1 < \frac{1}{2}$, sodass $\overline{B_{r_1}(x_1)} \subseteq G \cap U_1$ gilt. Diese Konstruktion setzen wir induktiv fort, und zwar jeweils mit $B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap U_n$ an Stelle von $G \cap U_1$, und erhalten eine Folge von offenen Kugeln $(B_{r_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 < r_n < \frac{1}{n+1}$ und

$$\overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap U_n \subseteq G \cap \bigcap_{j=1}^{n} U_j.$$

Wir setzen $B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_{r_n}(x_n)} \subseteq G \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Wir werden zeigen, dass $B \neq \emptyset$ gilt, dann ist der Beweis beendet.

Die Folge der Kugelmittelpunkte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, denn zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ wählen und erhalten dann für $n, m \geq N$ wegen $B_{r_k}(x_k) \subseteq B_{r_l}(x_l)$ $(k \geq l)$ die Abschätzung

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da (M, d) vollständig ist, existiert $x := \lim x_n$. Es gilt nach Konstruktion $x \in \overline{B_{r_k}(x_k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, daher folgt $x \in B$, somit ist $B \neq \emptyset$. $\square$

8.6. Bemerkung: Eine andere wichtige Klasse von Baireschen Räumen ist jene der lokalkompakten Hausdorff-Räume. Der Beweis dafür verläuft über eine ähnliche Schachtelungskonstruktion wie oben, wobei als Ersatz der Vollständigkeit die entscheidende Existenz eines Grenzwertes aus der Kompaktheit geschöpft wird (siehe z.B. [CR87, Abschnitt 5.4] oder [Sch75, Kapitel II, Abschnitt 3.9]).

8.7. Vervollständigung eines metrischen Raumes: Wir skizzieren im Folgenden eine Konstruktion für beliebige metrische Räume, die der klassischen Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ nachempfunden ist: Jedes Element ist dabei ein Repräsentant einer Klasse von rationalen Cauchy-Folgen „mit demselben Limes", d.h. bzgl. der Relation $(x_n) \sim (y_n) \;:\Leftrightarrow\; (x_n - y_n)$ ist eine Nullfolge; letzteres mit anderen Worten heißt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ für die euklidische Metrik d.

Definition: Zwei metrische Räume (M, d) und (N, ρ) sind *isometrisch*, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon M \to N$ gibt, sodass $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in M$ gilt. In diesem Fall nennen wir f eine *Isometrie*.

Eine Isometrie ist immer auch ein Homöomorphismus für die induzierten Topologien, denn die Stetigkeit von f und f^{-1} bzgl. der Metriken folgt direkt aus der Isometriebedingung.

Theorem: Zu jedem metrischen Raum (M, d) gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ und eine Abbildung $f\colon M \to \widetilde{M}$, vermöge der M isometrisch einem dichten Teilraum $\iota(M)$ von $\widetilde{M}$ ist. Diese *Vervollständigung* $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ von (M, d) ist im folgenden Sinne eindeutig: Ist (M', d') ein vollständiger metrischer Raum und ergibt $\iota'\colon M \to M'$ eine Isometrie von M mit dem in M' dichten Bild $\iota'(M)$, dann gibt es eine Isometrie $f\colon M' \to \widetilde{M}$ mit $f \circ \iota' = \iota$.

Beweis: Wir setzen $\mathcal{M} := \{(x_n) \in M^{\mathbb{N}} \mid (x_n) \text{ ist eine Cauchy-Folge}\}$.

Für $(x_n), (y_n) \in \mathcal{M}$ ist $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, denn es gilt

$$\begin{aligned}|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &= |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n) + d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \\ &\le |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n)| + |d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \le d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).\end{aligned}$$

Daher existiert $\bar{d}((x_n), (y_n)) := \lim d(x_n, y_n)$ und definiert eine Abbildung $\bar{d}\colon \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$. Diese erfüllt die Eigenschaften (M2) und (M3) einer Metrik und von (M1) aber nur den Teil der Nichtnegativität. Um die kompletten Metrikeigenschaften zu erzwingen führen wir auf $\mathcal{M}$ die Äquivalenzrelation

$$(x_n) \sim (y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim d(x_n, y_n) = 0$$

ein, schreiben $[(x_n)]$ für die Klasse von (x_n), und definieren $\widetilde{M} := \mathcal{M}/\sim$ mit der Metrik $\widetilde{d}\colon \widetilde{M} \times \widetilde{M} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\widetilde{d}([(x_n)], [(y_n)]) := \bar{d}((x_n), (y_n))$.

Wir definieren $\iota\colon M \to \widetilde{M}$ durch $\iota(x) = [(x)]$ (Klasse der konstanten Folge mit $x_n = x$ für jedes n). Dann gilt $\widetilde{d}(\iota(x), \iota(y)) = \widetilde{d}([(x)], [(y)]) = \bar{d}((x), (y)) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$, also ist ι eine Isometrie als Abbildung $M \to \iota(M)$.

Die Bildmenge $\iota(M)$ ist dicht in $\widetilde{M}$: Es sei $\widetilde{x} = [(x_n)] \in \widetilde{M}$. Setze $\widetilde{x}^{(k)} := \iota(x_k) \in \iota(M)$, dann gilt $\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{x}^{(k)}) = \bar{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_k)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_k)$. Da (x_n) eine Cauchy-Folge ist, folgt aus dieser Gleichung, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{x}^{(k)}) < \varepsilon$ für $k \geq k_0$ ist. Somit gilt $\widetilde{x}^{(k)} \to \widetilde{x}$ in $\widetilde{M}$.

Schließlich beweisen wir, dass $(\widetilde{M}, \widetilde{d})$ vollständig ist: Sei $(\widetilde{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\widetilde{M}$. Da $\iota(M)$ dicht ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $y_k \in M$ mit $\widetilde{d}(\widetilde{x}^{(k)}, \iota(y_k)) < \frac{1}{k+1}$. Wegen

$$\begin{aligned} d(y_k, y_l) = \widetilde{d}(\iota(y_k), \iota(y_l)) &\leq \widetilde{d}(\iota(y_k), \widetilde{x}^{(k)}) + \widetilde{d}(\widetilde{x}^{(k)}, \widetilde{x}^{(l)}) + \widetilde{d}(\widetilde{x}^{(l)}, \iota(y_l)) \\ &\leq \frac{1}{k+1} + \widetilde{d}(\widetilde{x}^{(k)}, \widetilde{x}^{(l)}) + \frac{1}{l+1} \end{aligned}$$

ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M. Wir setzen $\widetilde{y} := [(y_n)] \in \widetilde{M}$, dann gilt $\widetilde{x}^{(k)} \to \widetilde{y}$ in $\widetilde{M}$, weil

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(\widetilde{x}^{(k)}, \widetilde{y}) \leq \widetilde{d}(\widetilde{x}^{(k)}, \iota(y_k)) + \widetilde{d}(\iota(y_k), \widetilde{y}) &\leq \frac{1}{k+1} + \bar{d}((y_k)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \frac{1}{k+1} + \lim_{n\to\infty} d(y_k, y_n) \end{aligned}$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_k, y_n) \to 0$ für $k \to \infty$ gilt.

Eindeutigkeit: Es sei (M', d') vollständig und $\iota' \colon M \to M'$ eine Isometrie auf das in M' dichte Bild $\iota'(M)$. Für jedes $x' \in M'$ gibt es eine Folge (x_n) in M, sodass $\iota'(x_n) \to x'$ in M' gilt. Weil ι' eine Isometrie und $(\iota'(x_n))$ konvergent ist, muss (x_n) eine Cauchy-Folge in M sein. Wir setzen $f(x') := [(x_n)] \in \widetilde{M}$.

Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung $f \colon M' \to \widetilde{M}$, denn für zwei Folgen $\iota'(x_n) \to x'$ und $\iota'(y_n) \to x'$ ergibt sich $d(x_n, y_n) = d'(\iota'(x_n), \iota'(y_n)) \to 0$.

Seien $x', y' \in M'$ mit $x' = \lim \iota'(x_n)$, $y' = \lim \iota'(y_n)$, dann folgt

$$\widetilde{d}(f(x'), f(y')) = \bar{d}((x_n), (y_n)) = \lim d(x_n, y_n) = \lim d'(\iota(x_n), \iota'(y_n)) = d'(x', y'),$$

d.h. f ist eine Isometrie. Weiters gilt $f(\iota'(x)) = [(x)] = \iota(x)$ für alle $x \in M$. □

8.8. Kompaktheit in metrischen Räumen: Wir haben schon in 7.4 erwähnt, dass in metrischen Räumen alle der dort erwähnten Kompaktheitsbegriffe zusammenfallen. Darüberhinaus hängt die Kompaktheit dann auch mit der Vollständigkeit und der folgenden Verstärkung des Beschränktheitsbegriffes zusammen.

Definition: Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt *totalbeschränkt* (oder *präkompakt*), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \subseteq A, N_\varepsilon \text{ endlich, } \forall x \in A\ \exists a \in N_\varepsilon \colon\ d(a, x) < \varepsilon.$$

D.h. die Menge A kann bei noch so klein vorgegebenem Radius $\varepsilon > 0$ mit endlich vielen Kugeln $B_\varepsilon(a_k)$ um Mittelpunkte $a_k \in A$ überdeckt werden.

Theorem: Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist kompakt,

(ii) A ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in A besitzt eine Teilfolge, die in A konvergiert,

(iii) jede Folge in A besitzt einen Häufungspunkt,

(iv) A ist totalbeschränkt und vollständig.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei (a_n) eine Folge in A. Wir setzen $A_n := \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $F_n := \overline{A_n}$. Dann folgt $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_{N-1} \supseteq F_N$ für jedes $N \in \mathbb{N}$.

Es gilt $A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, denn andernfalls wäre $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A \cap F_n) = \emptyset$ und wegen der Kompaktheit von A gebe es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap_{1\le n\le N}(A \cap F_n) = \emptyset$, insbesondere $\emptyset \neq A_N \subseteq A \cap F_N = \bigcap_{1\le n\le N}(A \cap F_n) = \emptyset$.

Es gibt also ein $a \in A \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, also $a \in A$ und $a \in \overline{A_n}$ für alle n. Daher gibt es zu jedem n ein $k_n \geq n$ (somit $a_{k_n} \in A_n$), sodass $d(a, a_{k_n}) < \frac{1}{n}$. Dann ist $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n) mit $a_{k_n} \to a$ $(n \to \infty)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Zunächst zur Vollständigkeit: Sei (a_n) eine Cauchy-Folge in A. Gemäß (iii) besitzt sie einen Häufungspunkt $x \in A$. Dann konvergiert die Cauchy-Folge aber gegen x, denn zu $\varepsilon > 0$ wähle zunächst N, sodass $m, n \geq N$ immer $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ impliziert und zu N existiert $k_N \geq N$, sodass $d(a_{k_N}, x) < \varepsilon/2$ ist; insgesamt erhalten wir also $d(a_n, x) \leq d(a_n, a_{k_N}) + d(a_{k_N}, x) < \varepsilon$ für $n \geq N$.

Zur Totalbeschränktheit: Indirekt angenommen, A wäre nicht totalbeschränkt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass wir für jede endliche Teilmenge $B \subseteq A$ stets ein $a \in A$ mit $d(a, B) \geq \varepsilon$ finden können. Wir gehen induktiv vor und wählen $a_1 \in A$ beliebig, denken uns $B_1 := \{a_1\}$ und finden $a_2 \in A$ mit $d(a_2, a_1) \geq \varepsilon$; dann denken wir uns $B_2 := \{a_1, a_2\}$ und finden $a_3 \in A$ mit $d(a_3, a_j) \geq \varepsilon$ $(j = 1, 2)$ und so weiter erhalten wir eine Folge (a_n) in A mit $d(a_i, a_j) \geq \varepsilon$ für $i \neq j$. Dann kann (a_n) im Widerspruch zu (iii) aber keinen Häufungspunkt besitzen.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Angenommen, es gilt (iv), aber A ist nicht kompakt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von A, die keine endliche Teilüberdeckung zulässt.

Auf Grund der Totalbeschränktheit von A mit gewähltem Radius $\varepsilon = 1$, gibt es ein $x_1 \in A$, sodass $B_1(x_1) \cap A$ nicht von endlich vielen der U_i überdeckt werden kann.

Es seien bereits zu Radien $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$ Kugeln $B_1 := B_1(x_1), \ldots, B_{n-1} := B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_{n-1})$ so definiert, dass $B_j \cap B_{j-1} \neq \emptyset$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ gilt und $B_{n-1} \cap A$ nicht von endlich vielen der U_i überdeckt werden kann.

Dann verwenden wir für den Induktionsschritt $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ in der Definition der Totalbeschränktheit und finden ein $x_n \in A$, sodass $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ gilt und $B_{\frac{1}{2^n}}(x_n) \cap A$ nicht von endlich vielen der U_i überdeckt werden kann. Wir setzen $B_n := B_{\frac{1}{2^n}}(x_n)$.

Wegen $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ gilt stets $d(x_{n-1}, x_n) < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein $a_n \in A \cap B_n$, dann gilt

$$d(a_{n-1}, a_n) \leq d(a_{n-1}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, a_n) < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^{n-1}}$$

und daher weiters für $m, p \in \mathbb{N}$ stets

$$d(a_m, a_{m+p}) \leq d(a_m, a_{m+1}) + \ldots + d(a_{m+p-1}, a_{m+p}) \leq 3 \sum_{l=m}^{m+p-1} \frac{1}{2^l} \leq \frac{3}{2^m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{3}{2^{m-1}}.$$

Somit ist (a_n) eine Cauchy-Folge in A, hat also einen Grenzwert $a \in A$. Es gibt ein $i_0 \in I$ mit $a \in U_{i_0}$. Weil U_{i_0} also eine offene Umgebung von a ist, gibt es ein $r > 0$, sodass $B_r(a) \subseteq U_{i_0}$ gilt. Wir wählen nun n so groß, dass sowohl $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{4}$ als auch $d(a, a_n) < \frac{r}{2}$ gilt. Dann gilt für alle Punkte $x \in A \cap B_n$

$$d(x, a) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a_n) + d(a_n, a) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{r}{2} < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} + \frac{r}{2} = r,$$

daher folgt $A \cap B_n \subseteq B_r(a) \subseteq U_{i_0}$ und somit wäre $A \cap B_n$ sogar durch U_{i_0} allein überdeckt, was im Widerspruch zur Konstruktion von B_n steht. □

8.9. Gleichmäßige Stetigkeit: Es seien (M, d) und (N, ρ) metrische Räume. Wir nennen eine Abbildung $f\colon M \to N$ *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in M\colon\ d(x, y) < \delta\ \Rightarrow\ \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(Im Vergleich zur Stetigkeit an einem Punkt x kann also δ zu jedem ε gleichmäßig für alle x gewählt werden. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt die Stetigkeit.)

Allgemeiner als in metrischen Räumen wird dieser Begriff auch in sogenannten *uniformen Räumen* betrachtet – wie übrigens auch der Begriff einer Cauchy-Folge bzw. eines Cauchy-Netzes oder -Filters.

Zwei wesentliche Eigenschaften in Bezug auf die gleichmäßige Stetigkeit sind die folgenden:

(i) Ist $f\colon M \to N$ stetig und M kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: Wähle zu $\varepsilon > 0$ für jedes $x \in M$ ein $\delta(x)$ gemäß Stetigkeitsdefinition für $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε. Wir erhalten eine offene Überdeckung von M durch die Kugeln $B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x))$ ($x \in M$), die eine endliche Teilüberdeckung $B_{\frac{\delta(x_1)}{2}}(x_1), \ldots, B_{\frac{\delta(x_N)}{2}}(x_N)$ besitzt. Nun ist mit $\delta := \min(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_N))/2$ die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit erfüllbar, denn zu $x, y \in M$ gibt es zunächst ein x_i mit $d(x, x_i) < \delta(x_i)/2$ und aus $d(x, y) < \delta$ folgt $d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{\delta(x_i)}{2} \leq \delta(x_i)$; daher weiters

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

(ii) Ist $f\colon M \to N$ gleichmäßig stetig und N vollständig, dann gibt es eine eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzung von f auf die Vervollständigung $\widetilde{M}$ von M, d.h. eine eindeutige gleichmäßig stetige Abbildung $\widetilde{f}\colon \widetilde{M} \to N$ mit $\widetilde{f}|_M = f$.

Beweisskizze: Als gleichmäßig stetige Abbildung führt f Cauchy-Folgen in Cauchy-Folgen über. Weil M dicht in $\widetilde{M}$ ist, folgt daraus die Eindeutigkeit der Fortsetzung $\widetilde{f}$. Für die Existenz von $\widetilde{f}$ betrachten wir die Abbildung, die jeder Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen in M den (eindeutigen) Grenzwert der Bild-Cauchy-Folgen zuordnet. $\square$

Bemerkung: Für eine stetige Abbildung ist eine stetige Fortsetzung auf die Vervollständigung zwar auch eindeutig, sie muss aber nicht existieren, wie schon das elementare Beispiel $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für $x < 0$ und $f(x) = 2 + x$ für $x > 0$ lehrt.

Appendix: Auswahlaxiom, Wohlordnung und Lemma von Zorn

1) Auswahlaxiom: Ist I eine nichtleere Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Abbildung $s\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ mit $s(i) \in A_i$ für alle $i \in I$. Eine Abbildung s mit dieser Eigenschaft heißt *Auswahlfunktion.*

2) Das kartesische Produkt von zwei (oder endlich vielen Mengen) wird wie in [SS09, Definition 4.1.38] mittels geordneter Paare (oder Tupel) definiert. Für eine beliebige nichtleere Indexmenge I ist das *kartesische Produkt* von Mengen X_i $(i \in I)$ definiert durch

$$\prod_{i\in I} X_i := \{x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I : x(i) \in X_i\}.$$

Für endliche Indexmengen lässt sich diese Definition mit der Konstruktion über Tupel identifizieren. Insbesondere ist damit bei endlichen Produkten klar, dass nichtleere Faktoren zu einer nichtleeren Produktmenge führen. Für allgemeine Indexmengen folgt diese Aussage zunächst aus dem Auswahlaxiom und ist darüberhinaus aber sogar gleichwertig damit (vgl. z.B. auch [Cie97, Theorem 2.3.2]):

Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) Auswahlaxiom
(ii) Ist $I \neq \emptyset$ und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen, dann ist $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Bilde für jedes $i \in I$ die Menge $A_i := \{i\} \times X_i$. Dann ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von paarweise disjunkten, nichtleeren[1] Mengen und das Auswahlaxiom garantiert die Existenz einer Auswahlfunktion s mit $s(i) \in \{i\} \times X_i$ für alle $i \in I$. Somit ist immer $s(i) = (i, x(i))$ für geeignetes $x(i)$ und wir erhalten durch $i \mapsto x(i)$ ein Element im Produkt, welches daher nicht die leere Menge sein kann.

(ii)$\Rightarrow$(i): Laut Voraussetzungen ist $A := \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Somit existiert ein $s \in A$, d.h. eine Auswahlfunktion für $(A_i)_{i\in I}$. $\square$

[1] Das kartesische Produkt zweier nichtleerer Mengen ist eben vorher schon als nichtleer erkannt, weil explizit die geordneten Paare gebildet werden können (nämlich z.B. (a, b) als Menge der Form $\{\{a\}, \{a, b\}\}$).

3) Eine *Wohlordnung* auf einer Menge M ist eine Totalordnung (oder lineare Ordnung) $\leq$ auf M (vgl. [SS09, Definition 4.2.24]) mit der Zusatzeigenschaft, dass jede nichtleere Teilmenge $E \subseteq M$ ein kleinstes Element besitzt, d.h. ein $k \in E$, sodass $\forall a \in E$ gilt $k \leq a$.

Wohlordnungssatz (von Zermelo): Jede Menge kann wohlgeordnet werden.

(Der Beweis stützt sich auf das Auswahlaxiom, siehe [Cie97, Theorem 4.3.3].)

4) Es sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heißt *Kette*, falls (die Einschränkung von) $\leq$ auf K eine Totalordnung ist.

Lemma von Zorn: Ist $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede Kette in M eine obere Schranke besitzt, dann gibt es in M ein maximales Element bzgl. $\leq$, d.h. es gibt ein $m \in M$, sodass gilt: $a \in M$ und $m \leq a \implies a = m$.

(Der Beweis stützt sich ebenfalls auf das Auswahlaxiom, siehe [Cie97, Theorem 4.3.4].)

(Wir verwenden diesen Satz für den Beweis der Existenz von nichttrivialen Ultrafiltern bzw. Ultranetzen.)

5) Bemerkung: Der Wohlordnungssatz und das Lemma von Zorn sind sogar äquivalent zum Auswahlaxiom, wie z.B. in [Cie97, Corollary 4.3.5 and Remark] gezeigt wird.

Literaturverzeichnis

[Bou66] N. Bourbaki: *Elements of mathematics. General topology. Part 1 and Part 2.* Hermann 1966.

[Čap07] A. Čap: *Grundbegriffe der Topologie.* Vorlesungsskriptum. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, WS 2007/08.

[Cie97] K. Ciesielski: *Set Theory for the Working Mathematician.* Cambridge University Press 1997.

[CR87] J. Cigler und H.-C. Reichel: *Topologie.* Bibliographisches Institut, 2. Auflage 1987.

[Eng89] R. Engelking: *General Topology.* Heldermann, revised edition 1989.

[Jae05] K. Jänich: *Topologie.* Springer, 8. Auflage 2005.

[Kel50] J. L. Kelley: *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice.* *Fundamenta Mathematicae* **37** (1950) 75–76.

[SS09] H. Schichl und R. Steinbauer: *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer-Verlag 2009.

[Sch75] H. Schubert: *Topologie.* Teubner, 4. Auflage 1975.

[SS79] L.A. Steen und J.A.. Seebach: *Counterexamples in Topology.* Springer, second edition 1978.

[vQu01] B. von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie.* Springer, 3. Auflage 2001.

[Wil70] S. Willard: *General Topology.* Addison-Wesley 1970.