Übung: Algebra für LAK — SS 15

Blatt 2

10. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$, C_n wieder die multiplikative Gruppe der n-ten Einheitswurzeln und $\mathbb{Z}_n$ die additive Gruppe der Restklassen modulo n. Zeige, dass die Abbildung $\psi\colon \mathbb{Z}_n \to C_n$, $\overline{k} \mapsto \zeta_n^k$, wohldefiniert und ein Isomorphismus ist.

11. Zeige, dass $\exp\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Was ist sein Bild? Ist dies eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^*, \cdot)$?

12. Zeige, dass $\exp\colon (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist, dessen Kern gleich $\{2\pi i n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist.

13. Sei G eine Gruppe und $a \in G$. Ist die Linkstranslation $l_a\colon G \to G$, $l_a(x) = ax$, ein Homomorphismus? Zeige, dass die Abbildung $L\colon G \to S(G)$, $a \mapsto l_a$, einen Homomorphismus von G in die Gruppe $S(G)$ aller bijektiven Abbildungen $G \to G$ mit der üblichen Verknüpfung von Abbildungen ergibt.

14. Betrachte $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ in der Permutationsgruppe S_3.

    Zeige: $H := \{\mathrm{id}, \tau\}$ ist eine Untergruppe von S_3 und die Links- und die Rechtsnebenklasse von σ bzgl. H sind verschieden.

15. Zeige: Ist $H < G$ mit $\mathrm{ind}(G : H) = 2$, so gilt $H \triangleleft G$.

16. Zeige, dass $GL_+(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ Normalteiler von $GL(n, \mathbb{R})$ ist und Index 2 hat.

17. Ist die Untergruppe $O(2)$ auch ein Normalteiler von $GL(2, \mathbb{R})$?

18. Zeige: Der Isomorphismus ψ aus Aufgabe 10 entsteht als Abbildung $\overline{\varphi}$ gemäß erstem Isomorphiesatz (VO, 2.5) zum Homomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to S^1$, $k \mapsto \zeta_n^k$ aus 2.1, Beispiel 3) der VO (für $m = n$).

19. Zeige, dass $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ Normalteiler von $GL(n, \mathbb{R})$ ist und wende den ersten Isomorphiesatz auf $\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ an, um zum Ergebnis $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$ zu gelangen.