20. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeige: (i) $0a = a0 = 0$, (ii) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
 (iii) $(-a)(-b) = ab$, (iv) ist R ein Ring mit Einselement 1, so gilt: $1 = 0 \Leftrightarrow R = \{0\}$.
21. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
 (i) R ist nullteilerfrei,
 (ii) $\cdot$ ist eine innere Verknüpfung auf $R \setminus \{0\}$,
 (iii) es gelten die Kürzungsregeln für jedes $x \neq 0$: $ax = bx$ oder $xa = xb \Rightarrow a = b$.
22. Zeige: Ein endlicher Integritätsbereich ist ein Körper.
23. Zeige, dass $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow M(2, \mathbb{R}), x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ ein injektiver Ringhomomorphismus mit $\varphi(1) = I_2$ ist. Insofern können wir $\mathbb{C}$ auch als Unterring von $M(2, \mathbb{R})$ auffassen. Während $\mathbb{C}$ ein Körper ist, besitzt $M(2, \mathbb{R})$ nichttriviale Nullteiler — diese liegen natürlich nicht im Bild von φ . Gib ein Paar solcher Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ mit $A \cdot B = 0$ konkret an.
24. Wiederhole kurz, warum $C([0, 1], \mathbb{R})$ ein Unterring der Menge aller Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit punktweise definierter Addition und Multiplikation ist. Ist $C([0, 1], \mathbb{R})$ nullteilerfrei? Was sind die Einheiten im Ring $C([0, 1], \mathbb{R})$?
25. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1. Im Polynomring $R[X]$ hatten wir in der VO $X := (0, 1, 0, 0, \dots)$ gesetzt und konnten mittels Einbettung $a \mapsto (a, 0, 0, \dots)$ den Ring R als Unterring von $R[X]$ auffassen.
 Zeige nun durch Nachrechnen, dass für $f = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in R[X]$ mit $a_j = 0$, falls $j > n$, die Darstellung $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n$ gilt.
 (Einfach zunächst X^k berechnen und dann a_kX^k ; schließlich die Summe bilden ...)
26. In der VO wurde in 3.5 das Einsetzen von Elementen eines beliebigen Oberrings R' von R für die Variable X eines Polynoms aus $R[X]$ besprochen. Betrachte nun den Fall $R' = R[X]$ und zeige, dass durch Einsetzen des Polynoms $g \in R' = R[X]$ in das Polynom $f \in R[X]$ ein Polynom $h \in R[X]$ entsteht, dessen Polynomfunktion $\bar{h}$ gerade mit der Verknüpfung $\bar{f} \circ \bar{g}$ übereinstimmt. (Hier sind keine expliziten Formeln für alle Koeffizienten von h oder $\bar{h}$ verlangt, sondern nur kühle Argumente für die behauptete Gleichheit. Betrachte, wie $f(g)$ entsteht, und vergleiche mit der Definition von $\bar{f} \circ \bar{g}$.)
27. Es bezeichne P die Menge aller reellen Polynomfunktionen (eingeschränkt) auf $[0, 1]$. Argumentiere kurz, warum P ein Unterring von $C([0, 1], \mathbb{R})$ ist. Ist P nullteilerfrei?