Übung: Algebra für LAK — SS 15

Blatt 4

28. Dividiere $f = 4X^5 + 6X^3 + X + 2$ durch $g = X^2 + X + 1$ mit Rest in $\mathbb{Z}[X]$.

29. Finde Beispiele für Polynome $f, g \in \mathbb{Z}_6[X]$ mit folgenden Eigenschaften:
(a) $\deg(f) = 1$, $\deg(g) = 2$ und $\deg(fg) = 1$,
(b) $\deg(f) = 3$, $\deg(g) = 2$ und $fg = 0$.

30. Bestimme alle Nullstellen von (a) $X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ in $\mathbb{Z}_3$, (b) $X^3 - X \in \mathbb{Z}_6[X]$ in $\mathbb{Z}_6$.

31. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zeige: Hat $f = a_n X^n + \ldots a_1 X + a_0 \in R[X]$ die Nullstelle $c \in R$, dann muss c ein Teiler von a_0 sein, d.h. es gibt ein $b \in R$ mit $a_0 = bc$. (Dies ist natürlich speziell bei $R = \mathbb{Z}$ für das Erraten von Nullstellen interessant.)

32. Zeige: Ist $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom, d.h. mit Leitkoeffizient 1, und $\beta \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f, dann ist β eine ganze Zahl.

Für die folgenden beiden Aufgaben: Sei R ein kommutative Ring mit 1 und R' ein Oberring. Ein Element $\alpha \in R'$ heißt *algebraisch* über R, wenn es ein Polynom $f \in R[X] \setminus \{0\}$ mit $f(\alpha) = 0$ gibt, andernfalls wird α *transzendent* über R genannt.*

33. Zeige: (a) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ und $i \in \mathbb{C}$ sind algebraisch über $\mathbb{Z}$,
(b) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ ist algebraisch über $\mathbb{Z}$.

34. (a) Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, dann ist es auch algebraisch über $\mathbb{Z}$.
(b) $X \in R' = R[X]$ ist nach Konstruktion immer transzendent über R.

35. Zeige: Ist A in der Gruppe $GL(m, \mathbb{C})$ von der Ordnung n, gilt also $A^n = I_m$, dann ist jeder Eigenwert von A eine n-te Einheitswurzel. Bestimme konkret die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ und die Ordnung von A in $GL(2, \mathbb{C})$.

36. Zeige die folgende einfachste Form der Partialbruchzerlegung im Körper $\mathbb{R}(X)$ der rationalen Funktionen: Sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$ und $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f) \leq 1$, dann gibt es eindeutig bestimmte reelle Zahlen A und B, sodass

$$\frac{f}{(X-\lambda)(X-\mu)} = \frac{A}{X-\lambda} + \frac{B}{X-\mu}.$$

*Zum Beispiel sind die Nachweise der Transzendenz von e und π über $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{Z}$) berühmte Resultate (von Hermite 1873 und Lindemann 1882), die nicht leicht zu erzielen sind.