Übung: Algebra für LAK SS 15

Blatt 5

37. Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und $I \subseteq R$. Zeige, dass I genau dann ein Ideal in R ist, wenn gilt: $0 \in I$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in I$ sowie $x_1, \ldots, x_n \in R$ ist die „Linearkombination“ $x_1a_1 + \ldots + x_na_n \in I$.

38. Bestimme alle Ideale im Restklassenring $\mathbb{Z}_6$.

39. Es sei $\varphi\colon R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Zeige:
(a) I' Ideal in $R' \Rightarrow \varphi^{-1}(I')$ Ideal in R,
(b) I Ideal in R und φ surjektiv $\Rightarrow \varphi(I)$ Ideal in R'.
(Bemerkung: In (b) kann die Surjektivität von φ nicht fallen gelassen werden, wie das Beispiel $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(n) = n$, zeigt. Warum?)

40. Studiere nochmals den Beweis des Satzes 4.1 in der VO und entwirf daraus einen Beweis für folgende Aussage: Ein kommutativer Ring R mit $1 \neq 0$ ist ein Körper genau dann, wenn es keine nichttrivialen Ideale in R gibt.

41. Es sei $R \neq \{0\}$ ein Ring, der keine nichttrivialen Ideale enthält. Zeige: Jeder Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to R'$ ist entweder injektiv oder die Nullabbildung.
Welche Möglichkeiten bleiben demnach für einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$?

42. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i)$ der Ringhomomorphismus aus Beispiel 2) in 4.3 der VO.
Zeige: φ ist surjektiv und sein Kern gleich dem von $X^2 + 1$ erzeugten Hauptideal.
(Hinweis für den Nachweis von $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq (X^2 + 1)$: Zeige zunächst, dass Polynome f vom Grad 0 und 1 nicht als Elemente von $\operatorname{Ker}\varphi$ in Frage kommen; für f mit $\deg(f) \geq 2$ dividiere durch $X^2 + 1$ und schließe, dass der Rest [vom Grad kleiner 2] das Nullpolynom sein muss.)

Wir betrachten in den folgenden beiden Aufgaben wieder den kommutativen Ring $C([0,1],\mathbb{R})$ mit punktweise definierter Addition und Multiplikation und seinen Unterring P der reellen Polynomfunktionen auf $[0,1]$.

43. (a) Ist P ein Ideal in $C([0,1],\mathbb{R})$?
(b) Ist $I := \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(t) = 0 \text{ für } 0 \leq t \leq 1/2\}$ ein Ideal in $C([0,1],\mathbb{R})$?

44. (a) Sei $s \in [0,1]$. Ist $J := \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid f(s) = 0\}$ ein Ideal in $C([0,1],\mathbb{R})$?
(b) Bestimme $I \cap P$ und $J \cap P$.