

### Aufgaben zum VO-Kapitel B Praktisches Lösen von linearen Gleichungssystemen (bzw. Waldmanns Kapitel 4, Abschnitt 1)

Entscheiden Sie in allen Aufgaben dieses Kapitels jeweils die Lösbarkeit, indem Sie das Gleichungssystem mittels Gauß-Algorithmus auf Zeilenstufenform bringen. Bestimmen Sie dann gegebenenfalls die Lösungsmenge in  $\mathbb{K}^m$  in Parameterform.

**58** Über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 8x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**59** Über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 3 \\ -3x_1 - 5x_3 - 10x_4 &= 5 \end{aligned}$$

**60** Über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 - x_5 &= 8 \end{aligned}$$

**61** Über  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (2-i)z_3 &= 2+i \\ (1+i)z_1 + 3iz_3 &= 1+4i \\ -2z_1 + (1-i)z_2 + (1+2i)z_3 &= i \end{aligned}$$

**62** Über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Für welche  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$  ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

lösbar? Berechnen Sie in diesen Fällen die Lösung in Abhängigkeit von  $b_1, b_2, b_3$ .

**63** Vergleichen Sie die Lösungsmengen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y - z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$$

für  $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ , wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist. Was erhalten wir, falls wir die Koeffizienten im obigen Gleichungssystem als Restklassen in  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$  interpretieren (also  $\bar{0}$  statt  $0$ ,  $\bar{1}$  statt  $1$  und  $-\bar{1}(=\bar{1})$  statt  $-1$  nehmen) und Lösungen  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}_2^3$  suchen?

[Freiwillige Fleißaufgabe: Und wie ist das nun wiederum mit  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$  für eine Primzahl  $p \geq 3$ ? (Beachte aber nun bei der Interpretation des Gleichungssystems, dass  $-\bar{1} = \overline{p-1}$  in  $\mathbb{Z}_p$  gilt.)]

## Aufgaben zum VO-Kapitel C Vektorräume und Basen (Waldmann 4.2-5)

**64** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$  und  $M$  eine nichtleere Menge. Wie in der VO erwähnt, können wir auf der Menge  $\text{Abb}(M, V)$  aller Abbildungen  $M \rightarrow V$  eine Addition und eine Multiplikation mit Skalaren punktweise aus den entsprechenden Operationen auf  $V$  definieren, indem wir für  $f, g \in \text{Abb}(M, V)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $x \in M$  setzen

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x).\end{aligned}$$

(Machen Sie sich nochmal klar, dass hier jeweils auf der rechten Seite für jedes eingesetzte Argument  $x$  eine Operation auf dem Vektorraum  $V$  verwendet wird, um dadurch punktweise die Operationen auf Ebene der Abbildungen zu definieren.) Begründen bzw. beantworten Sie:

(a)  $\text{Abb}(M, V)$  wird mit diesen Operationen zu einem Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Was ist der Nullvektor in diesem Vektorraum?

(b) Wenn  $U$  ein Teilraum von  $V$  ist, dann ist  $\{f \in \text{Abb}(M, V) \mid f(M) \subseteq U\}$  ein Teilraum von  $\text{Abb}(M, V)$ .

**65** Begründen Sie aus entsprechenden Eigenschaften von Suprema und Limiten<sup>1</sup>, warum die folgenden Teilmengen des Vektorraumes  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  aller reellen Folgen auch Teilräume sind:

(a) die Menge  $l^\infty := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$  der beschränkten Folgen;

(b) die Menge  $c$  der konvergenten Folgen.

---

<sup>1</sup>Evtl. kommt der Begriff des Limes in der Analysis-VO erst ein bisschen später dran, aber Sie sollten hierfür auch mit Schulwissen auskommen. Außerdem illustriert dann zumindest diese Aufgabe schon vorweg einen wichtigen strukturellen Aspekt des entsprechenden Ergebnisses aus der Analysis.