UE Einführung Lineare Algebra und Geometrie WS 18

Blatt 3

$\boxed{\textbf{66}}$ Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind Teilräume? Begründen Sie Ihre Antworten und skizzieren Sie für die Aufgaben (a-f) die betreffenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 = 0\}$,
(b) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 = 1\}$,
(c) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = 0,\ x_2 \geq 0\}$,
(d) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 - x_2 = 0\}$,
(e) $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 + {x_2}^2 = 0\}$,
(f) $\{(x_1, x_2) \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{R} : x_1 = 3\lambda,\ x_2 = -2\lambda\}$,
(g) $\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\}$,
(h) $\{(x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1 + 2x_3 = 0 \text{ und } {x_2}^4 = 0\}$.

$\boxed{\textbf{67}}$ Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}[x]$ sind Teilräume? (Begründungen!)

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig $\{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, \deg(p) \leq n\}$,
(b) $\{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(17) = 0\}$,
(c) $\{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 1\}$,
(d) $\{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, \deg(p) = 4\}$,
(e) $\{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, \deg(p) = 0\}$,
(f) $\{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, \deg(p) \leq 5 \text{ und } p(1) = 0\}$.

$\boxed{\textbf{68}}$ Seien $b_1 = x^2$, $b_2 = -2x^2 + 2x$, $b_3 = x^2 - 2x + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ gegeben.
(a) Was ergibt $\operatorname{span}\{b_1, b_2, b_3\}$?
(b) Ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig?

$\boxed{\textbf{69}}$ Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c^2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^3$?

$\boxed{\textbf{70}}$ (a) Finden Sie vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$, so dass je drei von ihnen linear unabhängig sind.
(b) Sei p eine Primzahl. Ist $\{1, \sqrt{p}\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$?

$\boxed{\textbf{71}}$ Begründen Sie: (a) Wir können $\mathbb{C}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ oder auch über $\mathbb{R}$ auffassen.
(b) Sind Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$, dann auch über $\mathbb{R}$. (Was ist jeweils die Dimension von $\mathbb{C}^n$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$?)
(c) Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ linear abhängig über $\mathbb{C}$ sind, aber linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{72}}$ Zeigen Sie, dass die Menge der Monome $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis für $\mathbb{K}[x]$ ist.

73 Es sei $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist B ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^4$? Kann es Erzeugendensystem für einen dreidimensionalen Teilraum des $\mathbb{R}^4$ sein? Ist es überhaupt ein Erzeugendensystem für irgendeinen Teilraum des $\mathbb{R}^4$? Wenn ja, welche Dimension hat der?

74 Kann die Menge $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, wie?

Freiwillige Zusatzaufgabe Es sei $\{p_1, p_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen. Ist die Menge $\{\log(p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$?