UE Einführung Lineare Algebra und Geometrie WS 18

Blatt 4

$\boxed{\mathbf{75}}$ Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und U ein Teilraum von V. Zeigen Sie:

(a) $\dim U \leq \dim V$;

(b) $\dim U = \dim V \iff U = V$.

$\boxed{\mathbf{76}}$ Welche Dimension haben jeweils die Teilräume in den Aufgaben (a) 66 bzw. (b) 67.

$\boxed{\mathbf{77}}$ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie $w_1, \ldots, w_m \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

(a) Zeigen Sie: $m > n \implies w_1, \ldots, w_m$ linear abhängig.

(Hinweise: Welches Resultat aus der VO wird hier verstärkt? Zusammen mit welchem nachfolgenden Satz der VO ergibt sich ein sehr einfacher Beweis der obigen Behauptung?)

(b) Was wissen wir über $v_1, \ldots, v_n$, falls $m = n$ ist und $w_1, \ldots w_m$ linear unabhängig sind?

$\boxed{\mathbf{78}}$ Es sei $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) Zeige, dass B eine Basis ist.

(b) Stelle $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombination aus B dar.

$\boxed{\mathbf{79}}$ Es sei U der Teilraum von $\mathbb{R}[x]$ bestehend aus den Polynomen vom Grad höchstens 2 und $A := \{x^2 - 5, 2x^2 - 3x - 4, x - 2, 2x^2 + 5x + 1\} \subset \mathbb{R}[x]$.

(a) Ist A linear unabhängig? Oder entsteht durch Wegnahme eines geeigneten Polynoms eine linear unabhängige Menge?

(b) Ist A ein Erzeugendensystem für U? Wenn ja, geben Sie eine Teilmenge von A an, die eine Basis von U ergibt.

$\boxed{\mathbf{80}}$ Es sei $U \subset \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Teilmenge der ungeraden Abbildungen, d.h. U besteht aus allen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-x) = -f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass U ein Teilraum ist und $G := \{g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}\colon g(-x) = g(x)\}$ ein Komplementärraum für U ist.

$\boxed{\mathbf{81}}$ Es sei $U_1 := \{(x, y, z) \mid 3x + 4y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Ist U_1 ein Teilraum? Welcher Dimension? Gibt es einen Teilraum U_2 von $\mathbb{R}^3$, sodass $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$ gilt? Wie kann so ein U_2 angegeben werden? Geben Sie schließlich einen zweidimensionalen Teilraum W von $\mathbb{R}^3$ an, sodass $\mathbb{R}^3 = U_1 + W$ gilt. Kann dies auch durch eine direkte Summe erreicht werden?