UE Einführung Lineare Algebra und Geometrie WS 18

Blatt 5

Zu Kapitel $\boxed{\text{D}}$ Lineare Abbildungen und Matrizen (Waldmann 5.1-5)

Zwischendurch ein kräftig Wörtlein (wie Mephistopheles sich gelegentlich ausdrückt) aus dem Appendix über „Anfangsgründe der linearen Algebra“ im Buch *Grundzüge der modernen Analysis*, Band 1, 2. Auflage 1972 im Vieweg-Verlag, von Jean Dieudonné:

> „Mit Ausnahme der Booleschen Algebra wird keine Theorie in der Mathematik universeller benutzt als die lineare Algebra. Es gibt kaum eine Theorie, die elementarer ist, trotz der Tatsache, daß Generationen von Professoren und Lehrbuchautoren die Einfachheit dieser Theorie durch höchst unangebrachte Rechnungen mit Matrizen verdunkelt haben.“

82 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0, 3x_1 - 2x_2)$,

(b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_2, 0, 3x_1 - 2)$,

(c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, {x_2}^2, x_2)$,

(d) $\varphi_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (e^{x_1}, x_2x_3, \cos x_4)$,

(e) $\varphi_5 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (3x_4, 5x_2 - x_3)$.

83 Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) Für fixes $a \in \mathbb{K}^n$ betrachte $P_a \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $x \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

(b) Für fixes $b \in \mathbb{K}^n$ betrachte $T_b \colon \mathrm{Abb}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ mit $(T_bf)(x) = f(x + b)$.

(c) Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$.

(d) Wie (c), aber mit $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst.

84 Wir betrachten die folgenden Abbildungen D und S von $\mathbb{R}[x]$ nach $\mathbb{R}[x]$, wobei

$$\begin{aligned} D(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) &= na_nx^{n-1} + \ldots + 2a_2x + a_1, \\ S(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) &= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x. \end{aligned}$$

(a) Sind D und S linear? Berechnen Sie $S \circ D$ sowie $D \circ S$.

(b) Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild von D und S.

[Bemerken einer Analogie zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nicht unerwünscht.]

85 Wir betrachten die beiden Abbildungen Q und P von $\mathbb{C}[x]$ nach $\mathbb{C}[x]$, gegeben durch

$$P(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) = -i \cdot (na_nx^{n-1} + \ldots + 2a_2x + a_1) \text{ und } Q(p) = x \cdot p \ \ (p \in \mathbb{C}[x]).$$

(a) Zeigen Sie, dass beide Abbildungen linear sind.

(b) Argumentieren Sie, warum der Kommutator $[Q, P] := Q \circ P - P \circ Q$ ebenfalls eine lineare Abbildung $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ ist und berechnen Sie diesen explizit.

[Hier ergibt sich eine „Spielart der Heisenberg-Relation zwischen Orts- und Impulsoperator“.]

$\boxed{\mathbf{86}}$ Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 und $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(p) := p - p'$, wobei $p' := Dp$ ist mit D wie in $\boxed{84}$. Zeigen Sie auf zwei Arten, dass φ injektiv und surjektiv ist:

(a) Nur mit allgemeinem Wissen über Abbildungen und Polynome, das heißt durch expliziten Nachweis, dass für $p, q \in V$ aus $p - p' = q - q'$ die Beziehung $p = q$ folgt und für jedes gegebene Polynom $r = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in V$ die Gleichung $p - p' = r$ ein Polynom $p \in V$ als Lösung hat.

(b) Mit der Beobachtung, dass φ linear ist und die die Injektivität bzw. Surjektivität viel einfacher mit Hilfe passender Sätze aus der Vorlesung geschlossen werden kann.

$\boxed{\mathbf{87}}$ Sind die folgenden Abbildungen linear? Sind sie injektiv? Sind sie surjektiv?

(a) $f\colon \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + \bar{2}xz + z^2 + x + z, x^2 + y^2 + z^2)$

(b) $g\colon c \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty}(3a_{n+100} - 2a_n)$

(c) $h\colon l^\infty \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

$\boxed{\mathbf{88}}$ Bestimmen Sie Kern und Bild

(a) der linearen unter allen Abbildungen in Aufgabe $\boxed{82}$,

(b) der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (4x - 2z, 3y + 4z)$.

$\boxed{\mathbf{89}}$ Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $f, g\colon V \to W$ linear.

(a) Ist die Teilmenge $\{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$ ein Teilraum von V? (Begründung!)

(b) Für den Fall $V = W$ zeigen Sie: $\ker(g \circ f) = \ker f \iff (\ker g) \cap (\operatorname{im} f) = \{0\}$.