UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 1

Zu Kapitel $\boxed{\text{E}}$ Ergänzende Konstruktionen
(d.h. Dualräume, Bilinearformen, Quotientenräume)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V^* sein Dualraum. Für einen Teilraum U von V definieren wir den sogenannten Annihilator von U durch

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \text{ für jedes } u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass U^0 ein Teilraum von V^* ist und für Teilräume U_1, U_2 von V stets die Gleichung $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$ gilt.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (Vorweg eine Erinnerung: In dieser VO ist weiterhin $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.) Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und U ein Teilraum von V. Zeigen Sie, dass folgende Dimensionsformel gilt:

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U.$$

(Hinweis: Beginnen Sie mit einer Basis von U; ergänzen Sie diese zu einer Basis von V und betrachten eine geeignete Teilmenge der dazu dualen Basis in V^*.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (Minkowski-Raum) Es sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$. Wir betrachten die Abbildung $\eta\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\eta((t_1, x_1, y_1, z_1), (t_2, x_2, y_2, z_2)) := -c^2 t_1 t_2 + x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Zeigen Sie, dass η eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^4$ ist und geben Sie die Matrix von η bezüglich der Standardbasis an.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Wir erinnern (vgl. Aufgabe $\boxed{107}$ im WS 18) an die Definition der *Spur* einer quadratischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit Eintragungen a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$, nämlich $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie, dass $S\colon M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $S(A, B) := \operatorname{tr}(A \cdot B^T)$ eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $M_n(\mathbb{K})$ definiert. Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachten Sie speziell die Werte $S(A, A)$ und folgern daraus, dass S nichtausgeartet ist.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und U ein k-dimensionaler Teilraum von V mit $1 \leq k < n$. Zeigen Sie: Ist $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U und $v_1 + U, \ldots, v_{n-k} + U$ eine Basis von V/U, dann ergibt $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}$ eine Basis von V.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$. Zeigen Sie: $\dim(V/\ker\varphi) = 1$.