UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 11

In den Aufgaben dieses Übungsblattes spielen wir einige der etwas abstrakteren Aspekte aus den VO-Abschnitten über reelle symmetrische Bilinearformen, quadratische Funktionen und Quadriken nun speziell für $V = \mathbb{R}^n$ (mit dem Standardskalarprodukt) durch. Es sei hierfür stets $h\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, gegeben durch eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mittels $h(x, y) = x^T \cdot A \cdot y$, und q die zugeordnete quadratische Form, also $q(x) = h(x, x) = x^T \cdot A \cdot x$. Das lineare Funktional $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sei gegeben durch einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ in der Form $\varphi(x) = \langle u, x\rangle = u^T \cdot x$ und c bezeichne eine beliebige reelle Konstante. Schließlich ist die quadratische Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dann konkret gegeben durch

$$f(x) = q(x) + 2\varphi(x) + c = h(x, x) + 2\langle u, x\rangle + c = x^T \cdot A \cdot x + 2u^T \cdot x + c.$$

$\boxed{72}$ Rechnen Sie nach, dass sich ein Basiswechsel in $\mathbb{R}^n$ mittels $S \in GL_n(\mathbb{R})$, also gemäß $x = Sx'$ und $y = Sy'$, auf h so auswirkt, dass ausgedrückt in den Koordinatenvektoren x' und y' eine Bilinearform mit Darstellungsmatrix $S^T AS$ entsteht. Was ergibt sich speziell, falls S eine orthogonale Matrix aus Eigenvektoren zur Matrix A ist? Was ergibt sich andererseits, falls A bereits in Diagonalform vorliegt und auch S eine Diagonalmatrix ist?

$\boxed{73}$ Bestimmen Sie die Signatur von h, falls $n = 3$ und A eine der folgenden Matrizen ist:
(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. In welchem dieser Fälle ist h nicht-ausgeartet?

$\boxed{74}$ Zeigen Sie für die Abbildung $\check{h}\colon \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$, wobei für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ das lineare Funktional $\check{h}(x)$ durch $y \mapsto h(x, y)$ gegeben ist, folgende Eigenschaften:
(a) $\check{h}(x)$ ist gegeben durch (Skalarproduktwirkung mit dem Vektor) Ax,
(b) $\ker \check{h} = \ker A$,
(c) $\varphi \in \operatorname{im} \check{h} \Leftrightarrow u \in \operatorname{im} A$.

$\boxed{75}$ Benützen Sie die vorige Aufgabe, um in unserer konkreten Situation nachzuvollziehen, dass jeweils durch Translation $T_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + x_0$, mit einem geeigneten Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die folgende Situation erreicht werden kann:
(a) Im Falle $\varphi \in \operatorname{im} \check{h}$ für ein gewisses $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ die Form $f \circ T_{x_0} = q + \tilde{c}$.
(b) Im sogenannten parabolischen Fall $\varphi \notin \operatorname{im} \check{h}$ die Form $f \circ T_{x_0} = q + 2\varphi$.

In den Aufgaben $\boxed{76}$-$\boxed{77}$ ist durch Hauptachentransformation die prinzipielle Gestalt der Quadrik $Q(f, \lambda) = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \lambda\}$ zu bestimmen[1]. (In $\boxed{76}$ gibt es einen „kritischen" Wert von λ, wo sich etwas ändert, aber in $\boxed{77}$ nicht — warum eigentlich nicht?)

$\boxed{76}$ $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + 14x_1 + 10x_2 - 1$

$\boxed{77}$ $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 128x_1 - 46x_2 - 430$

[1] Falls Sie Zeit und Laune haben, könnten Sie hier zur Illustration auch in Mathematica mit den Befehlen `ImplicitRegion` und `RegionPlot` experimentieren.