

Zu Kapitel **F** Determinanten

Aus dem Buch *Lineare Algebra* von Gerd Fischer, 18. Auflage 2014, Springer Spektrum:

(Seite 174) „In den vorhergehenden Kapiteln wurde laufend mit Linearkombinationen gerechnet, das gilt als der „triviale“ Teil der linearen Algebra. Nun steigen wir eine Stufe höher zur Determinante, das ist eine Zahl, die man einer quadratischen Matrix zuordnet. Leibniz gab schon um 1690 eine Formel zur Berechnung dieser Zahl an. Weierstraß benutzte in seinen Vorlesungen eine andere Methode: Er führte die Determinante mit axiomatisch angegebenen Eigenschaften ein. Dadurch kann man die chronischen Vorzeichenprobleme erst einmal im Hintergrund halten ...“

(Seite 193) „Für den Existenzbeweis definieren wir nun die Determinante durch die Formel von Leibniz, und es sind die Axiome von Weierstraß nachzuprüfen. Danach herrscht wieder Frieden zwischen den beiden alten Herren.“

7 Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die symmetrische Gruppe S_n hat $n!$ Elemente und ist für $n \geq 3$ nicht kommutativ.

8 Wir notieren eine Permutation $\sigma \in S_n$ gelegentlich in der Form $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ und daher für die Verknüpfung mit $\rho \in S_n$ auch

$$\sigma \circ \rho = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \rho(1) & \cdots & \rho(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(\rho(1)) & \cdots & \sigma(\rho(n)) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\sigma \circ \rho$, ρ^2 , $\text{sign}(\sigma)$ und $\text{sign}(\rho)$ für $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und stellen Sie σ und ρ als Produkt von Transpositionen dar.

9 (Alternierende Gruppe) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \text{sign}(\sigma) = 1\}$ ist eine normale Untergruppe von S_n mit $n!/2$ Elementen. [Wiederhole: Eine Untergruppe H einer Gruppe G ist *normal*, falls für alle $g \in G$ gilt $gH = Hg$; d.h. die Linksnebenklassen stimmen mit den Rechtsnebenklassen überein.]

10 Zeigen Sie, dass für $\sigma \in S_n$ gilt: $\text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

[Also ausgehend von der Definition in der VO in der Form $\text{sign}(\sigma) := \prod_{i < j} \text{sgn}(\sigma(j) - \sigma(i))$.]

11 Durch Rückgriff auf anfangs im WS 18 behandelte spezifische Eigenschaften von Vektoren im \mathbb{R}^3 begründen Sie:

(a) Das Vektorprodukt definiert eine alternierende bilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(b) Das Spatprodukt definiert eine Determinantenform auf \mathbb{R}^3 . Entwickeln Sie eine konkrete Formel für die entsprechende Abbildung $M_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. („Entdecken“ Sie also die Formel von Sarrus.)

12 Es seien V und W Vektorräume über dem Körper \mathbb{K} und $\Phi: V \times \cdots \times V \rightarrow W$ eine alternierende k -lineare Abbildung. Beweisen Sie direkt aus der Definition, dass für linear abhängige Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ stets $\Phi(v_1, \dots, v_k) = 0$ gelten muss.

13 Es sei \mathbb{K} ein Körper und $A \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\beta: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, gegeben durch $\beta(u, v) := u^T \cdot (A \cdot v)$, ist bilinear. Unter welchen Bedingungen an A ist β alternierend bzw. symmetrisch?

(b) Für $u, v \in \mathbb{K}^n$ ist $(A \cdot u) \cdot v^T \in M_n(\mathbb{K})$ und die Abbildung $\Phi: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow M_n(\mathbb{K})$, gegeben durch $\Phi(u, v) := (A \cdot u) \cdot v^T$, ist bilinear.