UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 3

[14] Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{K})$ und für $\lambda \in \mathbb{K}$ jeweils $p(\lambda) := \det(A - \lambda 1_2) = \det \left(\begin{smallmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie die beiden Identitäten

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det(A) \quad \text{und} \quad A^2 - \operatorname{tr}(A)\,A + \det(A)\,1_2 = 0.$$

[15] Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ auf drei Arten, nämlich mittels Gauß-Verfahren, Regel von Sarrus und Laplace-Entwicklung.

[16] Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[17] Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 0 & 1 & 74 & 0 & 91 \\ 0 & 0 & 3 & 97 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 0 & 1 & 74 & 0 & 91 \\ 0 & 0 & 3 & 97 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 99 & 9 & 18 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

[18] Berechnen Sie die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ [vgl. Aufgabe 96 aus WS18] nach der Cramerschen Regel.

[19] Bereiten Sie einen Beweis für die in der Vorlesung erwähnte Vandermonde-Determinante vor. In welchem Fall ist die entsprechende Matrix invertierbar?

[20] Zeigen Sie mit Hilfe der Vandermonde-Determinante, dass im reellen Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die (überabzählbare) Menge $B := \{e_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ linear unabhängig ist, wobei $e_\lambda(t) := e^{\lambda t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. [Hinweis: Nachdem Sie einen geeigneten Ansatz mit einer endlichen Linearkombination gemacht haben, werten Sie diese sowie entsprechend viele Ableitungen davon bei $t = 0$ aus.]