UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 4

Zu Kapitel $\boxed{\text{G}}$ Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

In den Aufgaben $\boxed{21}$-$\boxed{25}$ ist für die angegebenen reellen Matrizen jeweils zu untersuchen, ob sie diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind und in diesem Fall die genaue Diagonalgestalt bezogen auf eine konkrete geordnete Basis aus Eigenvektoren[1] anzugeben.[2] Andernfalls geben Sie so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie möglich an.

21 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **22** $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **23** $C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

24 $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **25** $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

26 Zeigen Sie, dass für einen Eigenwert einer quadratischen Matrix die geometrische Vielfachheit stets kleiner oder höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit ist.
[Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis des Eigenraumes zu einer des gesamten Vektorraumes und betrachten Sie die entsprechende Matrixdarstellung bzw. das zugehörige charakteristische Polynom.]

27 Von den Matrizen $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ seien die charakteristischen Polynome bekannt, nämlich

$$\chi_A(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x \quad \text{und} \quad \chi_B(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6.$$

Wieso können wir daraus schließen, dass B bijektiv und $\dim \ker(A \cdot B) = 1$ ist?

28 Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi \in L(V)$ invertierbar. Zeigen Sie:
(a) 0 ist kein Eigenwert von Φ.
(b) Für $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt: λ ist Eigenwert von $\Phi \iff \frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von Φ^{-1}.

29 Geben Sie einen alternativen Beweis für die Aussage in $\boxed{20}$, indem Sie eine geeignete lineare Abbildung $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ angeben, bezüglich der jede dort mit e_λ bezeichnete Funktion als Eigenvektor, jeweils zum Eigenwert λ, auftritt.

---

[1] Erinnerung, um Ihnen unnötige Rechenarbeit zu ersparen: Die Wechselmatrix von einer geordneten Eigenvektorbasis zur Standardbasis haben wir in der VO mit Q^{-1} bezeichnet und die Diagonalisierung von A ergab sich dann durch $D = QAQ^{-1}$; aber wir können D bereits angeben (speziell eben die Anordnung der Eigenwerte entlang der Diagonalen), sobald Q^{-1} bekannt ist (speziell die gewählte Reihenfolge der Eigenvektoren) und müssen deren Inverse Q nicht als Fleißaufgabe auch noch berechnen.

[2] Wie Sie wahrscheinlich aus der UE „Hilfsmittel aus der EDV“ wissen, können Sie die Korrektheit Ihrer umfangreichen Berechnungen eventuell mal mit `Mathematica` überprüfen – da gibt es insbesondere auch den Befehl `Eigensystem[ ]` ...