UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 6

Zu Kapitel $\boxed{\text{H}}$ Euklidische und unitäre Vektorräume

$\boxed{\textbf{36}}$ Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$. Zeigen Sie für alle $v, w \in V$
(a) die Parallelogrammregel $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$,
(b) die Polarisierungsformeln, d.h. im euklidischen Fall $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$ und im unitären Fall $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|i^k v + w\|^2$.
(c) Begründen Sie, warum die Norm $\|(x_1, x_2)\|_\infty := \max(|x_1|, |x_2|)$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht von einem Skalarprodukt stammen kann.

$\boxed{\textbf{37}}$ Für alle f, g aus dem reellen Vektorraum $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

Zeigen Sie: (a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.
(b) Gerade und ungerade Funktionen sind stets orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
(c) 1, cos, sin sind paarweise orthogonal bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und daher auch linear unabhängig.

$\boxed{\textbf{38}}$ Es sei $\alpha \in [0, 2\pi[$ und $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ sowie $S(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass $D(\alpha) \in SO(2)$ und $S(\alpha) \in O(2) \setminus SO(2)$ gilt. Beschreiben Sie die Wirkung der entsprechenden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ elementargeometrisch (Skizze genügt). Sind diese Matrizen diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$?

$\boxed{\textbf{39}}$ Im euklidischen Vektorraum aus Aufgabe **??** betrachten wir den Teilraum V der Polynomfunktionen vom Grad höchstens 2. Dieser hat als Basis die Funktionen $b_0, b_1, b_2 \in V$, wobei $b_j(x) := x^j$ $(j = 0, 1, 2)$. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren an, um daraus eine Orthonormalbasis für V zu gewinnen.

$\boxed{\textbf{40}}$ Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum sowie U ein Teilraum von V, $v \in V \setminus U$ und P bezeichne die Orthogonalprojektion auf U. Zeigen Sie, dass für alle $u \in U$ die Ungleichung $\|v - u\| \geq \|v - Pv\|$ gilt und Gleichheit genau dann eintritt, wenn $u = Pv$ ist. (Somit ist Pv ist die Bestapproximation aus U an v.)

$\boxed{\textbf{41}}$ In $\mathbb{C}^4$ mit dem Standardskalarprodukt sei $U := \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\}$.
Bestimmen Sie Orthonormalbasen b_1, b_2 von U und b_3, b_4 von $U^\perp$.
Wie kann mittels b_1, b_2 die Orthogonalprojektion eines beliebigen Vektors $z \in \mathbb{C}^4$ auf U berechnet werden?