Blatt 7

$\boxed{42}$ (a) Unter welchen Bedingungen an $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ist die Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{C})$ unitär?
(b) Ist jede Matrix in $U(n)$ diagonalisierbar? Ist sie unitär diagonalisierbar? Was wissen wir über ihre Eigenwerte?
(c) Zeigen Sie, dass eine komplexe 2×2-Matrix genau dann zu $SU(2)$ gehört, wenn sie von der Form $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{smallmatrix}\right)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ist.

$\boxed{43}$ Zeigen Sie, dass im euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalprojektion gegeben ist. Was ist der Rang von P? Bestimmen Sie Orthonormalbasen von $\operatorname{im} P$ und $\ker P$ und daraus eine (geordnete) Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$. Wie sieht denn die Matrix von P bzgl. B aus?

Sind die Matrizen in den Aufgaben $\boxed{44}$-$\boxed{45}$ normal oder selbstadjungiert als Abbildungen im unitären Standardraum $\mathbb{C}^3$? Wenn ja, führen Sie die unitäre Diagonalisierung durch.

$\boxed{44}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{45}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $F = \begin{pmatrix} 2i & -3i & 0 \\ 3i & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{46}$ Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $A \in L(V)$ normal. Zeigen Sie: A ist selbstadjungiert genau dann, wenn alle Eigenwerte von A reell sind.

$\boxed{47}$ Eine lineare Abbilung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ zwischen den euklidischen Standardräumen sei durch die Matrix $A \in M_{n \times d}(\mathbb{R})$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(\operatorname{im} A)^\perp = \ker A^T$ gilt.
Was lernen wir daraus für die Charakterisierung jener $b \in \mathbb{R}^n$, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^d$ besitzt?

In den Aufgaben $\boxed{48}$-$\boxed{49}$ sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $A \in L(V)$. Zeigen Sie:

$\boxed{48}$ (a) Falls $\langle v, Av \rangle = 0$ für alle $v \in V$ gilt, dann muss $A = 0$ sein. [Hinweis: Zerlegen Sie $\langle w, Av \rangle$ für beliebige $v, w \in V$ geeignet mittels Kombinationen von $w \pm v$ und $w \pm iv$.]
(b) Bereits im Falle $V = \mathbb{C}^2$ gibt es $A \neq 0$ mit 0 als einzigem Eigenwert.
(c) Die Aussage in (a) gilt im Falle euklidischer Vektorräume nicht. (Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$)

$\boxed{49}$ A ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\langle v, Av \rangle \in \mathbb{R}$ gilt für jedes $v \in V$.