

**50** In  $M_2(\mathbb{C})$  betrachten wir den reellen Teilraum  $H(2)$  aller Hermiteschen  $2 \times 2$ -Matrizen sowie die *Pauli-Matrizen*  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass  $B := (1_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  eine (geordnete) Basis von  $H(2)$  ist und geben Sie die Inverse  $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow H(2)$  des entsprechenden Koordinatenisomorphismus konkret an. Berechnen Sie  $\det \Phi(t, x, y, z)$ .

**51** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und  $A \in L(V)$  selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass für  $p \in \mathbb{R}[x]$  stets auch  $p(A)$  selbstadjungiert ist und  $\text{spec}(p(A)) = p(\text{spec}(A))$  gilt.

**52** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $V$  ein  $n$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum und  $a \in V \setminus \{0\}$ . Begründen Sie zunächst, dass durch  $H := \{a\}^\perp$  eine *Hyperebene* in  $V$  gegeben ist, d.h.  $H$  ist ein Teilraum der Dimension  $n - 1$ . Weiters sei  $S \in L(V)$  definiert durch

$$Sx = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} a \quad (x \in V).$$

Zeigen Sie:  $S$  ist orthogonal, selbstadjungiert und selbstinvers; weiters gilt  $Sa = -a$  und  $Sh = h$  für alle  $h \in H$ . Somit ergibt die geometrische Interpretation von  $S$  eine Spiegelung an der Hyperebene  $H$ . (Skizze!)

Führen Sie in den Aufgaben **53**-**54** jeweils die orthogonale Diagonalisierung der gegebenen symmetrischen Matrix durch:

**53**  $A = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}$  [mit Eigenwerten 27, -15,9], **54**  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

**55** Im euklidischen Standardraum  $\mathbb{R}^3$  sei  $a$  ein Einheitsvektor und  $R \in L(\mathbb{R}^3)$  für fixes  $\alpha \in [0, \pi]$  gegeben durch

$$Rx = \cos(\alpha) x + (1 - \cos(\alpha)) \langle a, x \rangle a + \sin(\alpha) a \times x \quad (x \in \mathbb{R}^3).$$

Zeigen Sie:  $R$  ist orthogonal<sup>1</sup> und  $Ra = a$ ; weiters nach Ergänzung von  $a$  durch normiertes  $v_1 \in \{a\}^\perp$  sowie  $v_2 := a \times v_1 \in \{a\}^\perp$  zu einer Orthonormalbasis  $B$  von  $\mathbb{R}^3$  auch  $\det R = \det_B[R]_B = 1$  und  $\text{tr}(R) = \text{tr}_B[R]_B = 1 + 2 \cos(\alpha)$ . Diskutieren Sie die geometrische Interpretation von  $R$  als Drehung im Raum um den Winkel  $\alpha$  mit Drehachse  $a$ .

**56** Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  normal ist. Wenden Sie dann

den reellen Spektralsatz an, d.h. finden Sie eine orthogonale Matrix  $O$ , sodass  $OAO^T$  in Blöcke zerfällt, die reell diagonal sind oder von der Form  $\begin{pmatrix} a & \\ & -b \end{pmatrix}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ .

<sup>1</sup>Empfohlen sei dazu ein Rückblick auf Resultate zum Kreuzprodukt im  $\mathbb{R}^3$  aus WS18, speziell die Graßmann-Identität [aus der VO bzw. Waldmann, Band 1, Prop.1.15] und daraus abgeleitet eine Formel für  $\langle a \times b, c \times d \rangle$  [Aufgabe im UE-Blatt 1 vom WS18].