UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 1

Im Laufe des Studiums mag es gelegentlich vorkommen, dass Sie ungefähr so empfinden wie in dem folgenden Bonmot beschrieben, das ich dem Vorspann des Buches *Stochastic Differential Equations* von Bernt Øksendal, Springer-Verlag, 5. Auflage 1998, entnommen habe (zur Quellenfrage siehe auch den *Quote Investigator* im World Wide Web):

> „We have not succeeded in answering all our problems. The answers we have found only serve to raise a whole set of new questions. In some ways we feel we are as confused as ever, but we believe we are confused on a higher level and about more important things.“

. . . .

$\boxed{\mathbf{1}}$ Division von $n \in \mathbb{N}$ durch $d \in \mathbb{N}$, $d \leq n$ mit Rest: Betrachten Sie $n-d, n-2d, n-3d, \ldots$ und begründen (quasi algorithmisch), warum wir Zahlen $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < d$ finden können, sodass $n = q \cdot d + r$ gilt. Argumentieren Sie anschließend auch, warum der *Quotient* q und der *Rest* r durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt sind.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

(b) Wenn $a^2 \leq b^2$ gilt, dann ist $|a| \leq b$ oder $b \leq -|a|$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (a) Begründen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $n(n+1)(n+2)$ stets durch 2 und auch durch 3 teilbar. (Bemerkung: Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist die Zahl sogar durch 6 teilbar.[1])

(b) Skizzieren Sie in der Ebene die Mengen $A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$, $A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $A_\infty := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$. Welche davon sind Teilmengen einer der anderen Mengen?

$\boxed{\mathbf{4}}$ (a) Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ für beliebige Teilmengen C und D von N.

(a) Für die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ bestimmen Sie die Mengen $g(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $g^{-1}([0, \infty[)$, $g^{-1}(\{-2\})$, $g^{-1}(\{4\})$, $g(g^{-1}([-1, 1]))$ und $g^{-1}(g([0, 1]))$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Überprüfen Sie, ob die gegebenen Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Geben Sie jeweils eine Begründung an. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) := \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$.

(c) $f_3\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

[1] In der VO haben wir gar nicht ausreichende Methoden besprochen, um auch diesen Schluss bequem zu beweisen. Die Teilerfremdheit ist dafür eine wesentliche Bedingung, wie das Beispiel der Zahl 12 lehrt, die durch 4 und durch 6 teilbar ist, aber nicht durch $4 \cdot 6 = 24$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (a) Begründen Sie, warum streng monotone Funktionen immer injektiv sind.

(b) Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f\colon I \to J$ streng monoton wachsend und surjektiv. Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ besitzt, die ebenfalls streng monoton wachsend ist.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Wir betrachten zwei mathematische Aussagen:

$\mathcal{A}$: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt $y = 1 - x$, $y^2 = x^2 - 9$ und $y \geq 0$.

$\mathcal{B}$: $x = 5$.

Begründen Sie, warum $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ gilt, aber nicht $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Was erfahren wir daraus für die Lösbarkeit des Gleichungssystems $y = 1 - x$, $y^2 = x^2 - 9$ in Abhängigkeit von den Grundmengen $M_1 := \mathbb{R}^2$ und $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Führen Sie einen Induktionsbeweis, um $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

Bemerkung: Ein verbreiterter Fehler im Nachweis eines Induktionsschrittes ist es übrigens, z.B. von der (noch unbewiesenen!) Gleichung $\sum_{j=1}^{n+1} j^3 = (n+1)^2(n+2)^2/4$ auszugehen und diese dann sukzessive in eine „offensichtlich wahre Aussage“ (wie etwa „$0 = 0$“) umzuformen. Dass so ein Argumentationsschema nicht gültig sein kann, zeigt aber bereits das folgende extreme Beispiel nach genau demselben Muster: Wir nehmen $1 = 0$ als Ausgangsgleichung und multiplizieren beide Seiten mit 0; also entsteht daraus die stets richtige Gleichung $0 = 0$, aus der Sie aber wohl nicht zu schließen wagten, dass tatsächlich $1 = 0$ gilt.