UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 10

73 Untersuchen Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx)^2}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Ändern sich die Antworten bei Einschränkung der Funktionen auf die Teilmenge $[1,\infty[\subseteq \mathbb{R}$?

74 Untersuchen Sie die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

75 Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/n)}{n}$ ist für jedes $x\in\mathbb{R}$ absolut konvergent und für $0\le x\le 1$ ergibt $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x/n)}{n}$ eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$.

76 Zeigen Sie: (a) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\,dx$ konvergiert genau für $\alpha > -1$.

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert genau für $\alpha > 1$.

In den folgenden beiden Aufgaben ist jeweils die Konvergenz der Integrale zu untersuchen.

77 (a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$.

78 (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$.

79 Zeigen Sie $\displaystyle\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2}$ für $y>0$.

80 Verschaffen Sie sich eine Formulierung des sogenannten *Integralkriteriums für Reihen* und berichten Sie davon. Wenden Sie das Kriterium an, um folgende Aussage zu begründen:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ divergiert für $0<\alpha\le 1$ und konvergiert für $\alpha>1$.