UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 11

$\boxed{\mathbf{81}}$ Es sei $u(x) := \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ mit reellen Koeffizienten a_0, a_k, b_k ($k \in \mathbb{N}$) und Konvergenz für jedes $x \in [-\pi, \pi]$. Die komplexen Zahlen c_k ($k \in \mathbb{Z}$) mögen die Relationen $a_0 = 2c_0$ sowie $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$ für $k \in \mathbb{N}$ erfüllen. Zeigen Sie, dass dann auch $u(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ für jedes $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

Bestimmen Sie in den folgenden drei Aufgaben jeweils die reelle Version der Fourierreihe für die auf $[-\pi, \pi]$ konkret angegebene 2π-periodische Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizzieren Sie auch den Graphen von u zumindest auf dem Bereich $-2\pi \le x \le 2\pi$. Was können Sie über das Konvergenzverhalten der Fourierentwicklung sagen?

$\boxed{\mathbf{82}}$ $u(x) = -1$ für $-\pi < x < 0$, $u(x) = 1$ für $0 < x < \pi$ und $u(x) = 0$ für $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$.

$\boxed{\mathbf{83}}$ $u(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$ und $u(x) = 0$ für $x \in \{-\pi, \pi\}$. (Sägezahnfunktion.)

$\boxed{\mathbf{84}}$ $u(x) = |\sin(x)|$ für $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\mathbf{85}}$ Es seien $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische C^2-Funktion und a_k, b_k die (reellen) Fourierkoeffizienten von u. Weiters bezeichne a'_k, b'_k die Fourierkoeffizienten von u' sowie a''_k, b''_k jene von u''. Zeigen Sie: Für $k \ge 1$ gilt

$$a''_k = k \cdot b'_k = -k^2 \cdot a_k \quad \text{und} \quad b''_k = -k \cdot a'_k = -k^2 b_k.$$

(Bemerkung und Hinweis: Hier ist keine gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe von u'' garantiert, daher können wir das Resultat nicht durch zweimaliges gliedweises Differenzieren der Fourierreihe von u ableiten, so verlockend diese Argumentation wäre … na gut, Sie dürfen dies *unter der Zusatzannahme* $u \in C^3(\mathbb{R})$ als Lösung anbieten, falls nötig oder/und interessant.)

$\boxed{\mathbf{86}}$ Wie in der VO sei $D_n(s) := \dfrac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{iks}$ ($s \in \mathbb{R}$) der sogenannte Dirichlet-Kern. Weisen Sie folgende Eigenschaften von D_n nach: $D_n(-s) = D_n(s)$, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)\, ds = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $D_n(s) = \frac{2n+1}{2\pi}$, falls $s \in \{2\pi m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, andernfalls gilt $D_n(s) = \dfrac{\sin((2n+1)s/2)}{2\pi \sin(s/2)}$.

$\boxed{\mathbf{87}}$ Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 1$ und f die entsprechende Summenfunktion, d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ für $|z| < R$. Wir betrachten die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, gegeben durch $u(x) := f(e^{ix})$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass u eine 2π-periodische Funktion ist und bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von u.

$\boxed{\mathbf{88}}$ Was ergibt die Anwendung der Parseval-Gleichung auf die Fourierentwicklungen aus den Aufgaben $\boxed{82}$ und $\boxed{83}$?