UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 12

Zur Wiederholung noch einmal „quer durch den Gemüsegarten“:

$\boxed{\textbf{89}}$ Es sei $c > 0$, $h\colon [0,\infty[\to [c,\infty[$ eine stetige Funktion und $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ gegeben durch $f(x) := \int_0^x h(t)\,dt$. Ist die Funktion stetig, differenzierbar, monoton, injektiv, surjektiv, bijektiv? Was können wir gegebenenfalls über die Umkehrfunktion f^{-1} bzw. deren Ableitung sagen?

$\boxed{\textbf{90}}$ Für $0 \leq p \leq 1$ und $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ sei $b(p,n,k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{\overset{n-k}{\cancel{k}}}$ (dies entspricht der Wahrscheinlichkeit für k Erfolge bei n-maliger Wiederholung eines sogenannten Bernoulliexperiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p). Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b(p,n,k) = 1$, (b) bei festem k und mit $p_n := \lambda/n$, $\lambda \geq 0$, gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b(p_n,n,k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

(Dies illustriert die sogenannte Poisson-Approximation der Binomialverteilung.)

$\boxed{\textbf{91}}$ Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ konvergent?

$\boxed{\textbf{92}}$ Sind die folgenden Reihen konvergent? Sind sie absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\log k)^k}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\log k}{k}$.

$\boxed{\textbf{93}}$ Ist die Funktion $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$ stetig, differenzierbar, monoton? Gibt es Extremstellen? Existiert $\lim_{x\to\infty} f(x)$?

$\boxed{\textbf{94}}$ Für $n \geq 2$ sei die Funktion $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ zumindest n-mal stetig differenzierbar und es gelte an der Stelle $x_0 \in]a,b[$, dass

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ aber } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Wenden Sie den Satz von Taylor an (mit dem Taylorpolynom der Ordnung $n-1$), um folgende Aussagen zu begründen:

(a) Wenn n ungerade ist, kann x_0 keine Extremalstelle sein.

(b) Wenn n gerade ist, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ gilt, bzw. ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ gilt.

$\boxed{\textbf{95}}$ Bestimmen Sie die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ so, dass für alle x mit $|x| < 1$ und im Konvergenzbereich der Reihe für f die Gleichung

$$x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x}$$

erfüllt ist. Welchen Konvergenzradius hat die resultierende Potenzreihe für f?

$\boxed{\textbf{96}}$ Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ stets $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx$ gilt. Folgern Sie daraus die Formel

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\,dx = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$