UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 2

$\boxed{9}$ Führen Sie einen Induktionsbeweis, um die Ungleichung $n! \leq 4\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. (Hinweis: $(\frac{n+1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} \geq 2$ mittels Bernoulli-Ungleichung.)

$\boxed{10}$ Untersuchen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ auf Beschränktheit und geben Sie jeweils, soferne existent, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum an:
(a) $A := \mathbb{Q} \cap \,]0, \sqrt{2}]$.
(b) $B := \{-\frac{1}{n} + n \cdot (1 + (-1)^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(c) $C := \{[x] \mid 1 < x < 3\}$.

$\boxed{11}$ (a) Eine positive reelle Zahl x heiße *unendlich groß*, falls $x > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gibt es unendlich große reelle Zahlen? (Begründung!)

(b) Eine reelle Zahl x heiße *unendlich klein*, falls $0 < x < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gibt es unendlich kleine reelle Zahlen? (Begründung!)

$\boxed{12}$ (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[, x \mapsto \sqrt{x}$ streng monoton wachsend und surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in [-1,1]$ die Ungleichung $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$ gilt.

$\boxed{13}$ (Wahrscheinlich/hoffentlich eine Wiederholung aus der Schulzeit.) Verwenden Sie die sogenannte quadratische Ergänzung $x^2 + px = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4}$, um eine Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a > 0, b, c \in \mathbb{R}$$

stets auf die folgende Form zu bringen

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

wobei sich p und q passend aus a, b, c berechnen lassen. Unter der Bedingung $p^2 \geq 4q$ leiten Sie daraus explizite Formeln für alle reellen Lösungen x her.

$\boxed{14}$ (a) Zeigen Sie, dass wir für $r > 0$ durch $i\sqrt{r}$ und $-i\sqrt{r}$ stets zwei verschiedene komplexe Zahlen z erhalten, die $z^2 = -r$ erfüllen.

(b) Verwenden Sie (a) zur geeigneten Modifikation der vorigen Aufgabe für den Fall $p^2 < 4q$.

$\boxed{15}$ Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$(1-i)^2, i^3, i^4, \frac{1}{i}, \frac{1}{1-2i}, \frac{2+i}{1+i}, \frac{1+i}{1-i}.$$

$\boxed{16}$ Wir betrachten die Abbildung $D\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto iz$. Interpretieren Sie die Abbildungen D und $S := D \circ D$ in der komplexen Zahlenebene geometrisch. Ist D bijektiv? Wie lautet gegebenenfalls die Umkehrabbildung?