UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 4

In den folgenden beiden Aufgaben sind Eigenschaften der Logarithmusfunktion nachzuweisen, die in der VO behauptet wurden.

25 (a) Für $a, b > 0$ gilt $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ und $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ ist $\log(x^n) = n \cdot \log x$.

26 (a) Für $x > -1$ mit $x \neq 0$ gilt $\log(1 + x) < x$.

(b) Für $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit $c > 1/n$ und $x > 4n^2$ gilt $\log x < \dfrac{x}{n} < cx$. Illustrieren Sie die geometrische Bedeutung dieser Aussage in einer Skizze.

27 Begründen Sie folgende Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion, die in der VO behauptet wurden: Für $x, y > 0$ und $r, s \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$(xy)^r = x^r y^r, \quad (x^r)^s = x^{rs}, \quad x^{r+s} = x^r x^s, \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}.$$

28 Beweisen Sie folgende Aussage, die in der VO als Grundlage zur Einführung des Zehnerlogarithmus diente: Die Abbildung $x \mapsto 10^x$ ist streng monoton wachsend und bijektiv $\mathbb{R} \to]0, \infty[$. Für ihre Umkehrfunktion $\log_{10} \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gilt die Formel $\log_{10}(x) = \dfrac{\log x}{\log 10}$.

(Im Buch von Fischer-Kaul, S. 62, ist diese Formel mit Definitionspunkten versehen, was ich [GH] aber nur als Tippfehler interpretieren kann.)

29 Was wissen wir über die Koeffizienten a, b, c der Polynomfunktion $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, falls wir drei Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von p kennen? (Diese müssen nicht alle verschieden sein, aber z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$ soll bedeuten, dass λ_1 zumindest eine doppelte [2-fache] Nullstelle ist usw.)

30 Die van-der-Waals-Zustandsgleichung für den Druck p, das Volumen V und die Temperatur T eines realen Gases lautet

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

wobei a, b und R geeignete physikalische Konstanten sind. Stellen Sie p bei konstanter Temperatur T_0 als rationale Funktion $V \mapsto p(V)$ des Volumens V dar und geben Sie den maximalen Definitionsbereich für diese Funktion an. Wie ist das Konvergenzverhalten der Folge $(p(n))_{n \in \mathbb{N}}$, also für „$V \to \infty$"?

31 Leiten Sie folgende Relationen aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen ab:

(a) $\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(\varphi)}{2}}$ und $\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 + \cos(\varphi)}{2}}$ $\quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$,

(b) $\tan(\psi) - \tan(\varphi) = \dfrac{\sin(\psi - \varphi)}{\cos(\varphi)\,\underset{\text{cos}}{\cancel{\sin}}(\psi)}$ $\quad (-\frac{\pi}{2} < \varphi < \psi < \frac{\pi}{2})$.

32 Die Überlagerung der beiden gleichfrequenten Schwingungen $f(t) = c\cos(\omega t)$ und $g(t) = d\sin(\omega t)$ (also mit Kreisfrequenz $\omega > 0$ und Amplituden $c, d > 0$) berechnet sich aus $h(t) = f(t) + g(t)$. Stellen Sie h als cos-Schwingung mit Amplitude A und Nullphase α dar, d.h. bestimmen Sie A und α so, dass $h(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.