UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 5

$\boxed{\textbf{33}}$ (a) Begründen Sie folgende vereinfachte Version des Wurzeltests für Reihen, falls $\left(|a_k|^{1/k}\right)$ konvergent ist mit $\alpha := \lim |a_k|^{1/k}$:

(i) Für $\alpha < 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, (ii) für $\alpha > 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

(b) Begründen Sie folgende vereinfachte Version des Quotiententests für Reihen, falls $\left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\right)$ konvergent ist mit $\alpha := \lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$:

(i) Für $\alpha < 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, (ii) für $\alpha > 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

$\boxed{\textbf{34}}$ (a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ konvergent? Was ist in diesen Fällen die Summe?

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$ konvergent?

Untersuchen Sie in den folgenden drei Aufgaben die angegebenen Reihen jeweils auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz (fallweise in Abhängigkeit auch von $x \in \mathbb{R}$).

$\boxed{\textbf{35}}$ (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

$\boxed{\textbf{36}}$ (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{k}\Big)^k$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(10-9k)^k}{10^k k^k}$.

$\boxed{\textbf{37}}$ (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1-\frac{1}{k})^k}{k}$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(\cos(k+\pi x)\big)^k}{k+k^2}$.

(Teilaufgabe (b) könnte etwas knifflig werden, darum sei verraten, dass diese Reihe konvergent ist, allerdings nicht absolut konvergent.)

$\boxed{\textbf{38}}$ Verwenden Sie das Cauchy-Produkt für Reihen, um folgende Formel zu zeigen:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \qquad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1).$$

$\boxed{\textbf{39}}$ Bestimmen Sie (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ (Hinweis: Halbwinkelformel) und (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

$\boxed{\textbf{40}}$ Bestimmen Sie (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^N - 1}{x-1}$ $(N \in \mathbb{N})$ und (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.