UE Analysis für Physiker∗innen I — WS 21

Blatt 6

41 Ein konkretes „ε-δ-Spiel“: Wir betrachten die stetige Funktion $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$.

(a) Geben Sie für beliebige „Daten“ $x_0 \in]0,1]$ und $\varepsilon > 0$ explizite Bedingungen für ein $\delta > 0$ an, sodass für $x \in]0,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ garantiert ist.

(b) Sie werden in (a) beobachtet haben, dass die Wahl von δ auf wesentliche Art sowohl von ε als auch von x_0 abhängt. Zeigen Sie nun, dass im Falle der Funktion f sogar die Abhängigkeit von x_0 bei festem $\varepsilon := 1/2$ grundsätzlich nicht „abgeschüttelt“ werden kann: Konstruieren Sie zwei Nullfolgen (x_n), (y_n) in $]0,1]$ mit den Eigenschaften $0 < y_n - x_n < 1/n$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq 1$. (Die Funktion f ist also nicht *gleichmäßig stetig.*)

42 Untersuchen Sie die Stetigkeit der beiden Funktionen $x \mapsto [x]$ und $x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$ auf dem Intervall $]0,2[$.

43 (a) Begründen Sie, warum eine Polynomfunktion ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzen muss.

(b) Ist die rationale Funktion $r\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$ stetig fortsetzbar auf ganz $\mathbb{R}$?

44 Analysieren Sie die Funktion $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$ bezüglich Monotonie (ohne Differentialrechnung zu verwenden!) und Stetigkeit. Bestimmen Sie die Bildmenge $f([1,2])$ und erörtern Sie die Möglichkeit einer Umkehrfunktion $g\colon f([1,2]) \to [1,2]$?

45 Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ besitzt (mindestens) einen Fixpunkt $x_0 \in [a,b]$, d.h. $f(x_0) = x_0$. Geben Sie eine Funktion $g\colon [-1,1] \to [-1,1]$ an, die keinen Fixpunkt hat.

46 (a) Begründen Sie möglichst kurz und prägnant, warum $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ eine stetige Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ defniert.

(b) Ist die Funktion $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} \cdot \sin(\frac{1}{x})$ stetig fortsetzbar auf $[0,\infty[$?

47 Untersuchen und vergleichen Sie folgende Funktionen bezüglich Stetigkeit und Differenzierbarkeit: $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) := |x|$, $f_2\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) := |x|$, $f_3\colon]-\infty,0] \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) := |x|$ und $f_4\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f_4(x) := \sqrt{x}$.

48 Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung der Tangente an den Funktionsgraphen im angegebenen Punkt:

(a) $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ in $(2, f(2))$,

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ in $(\pi, f(\pi))$.